Aksiomi ili djelovanje grupe?*

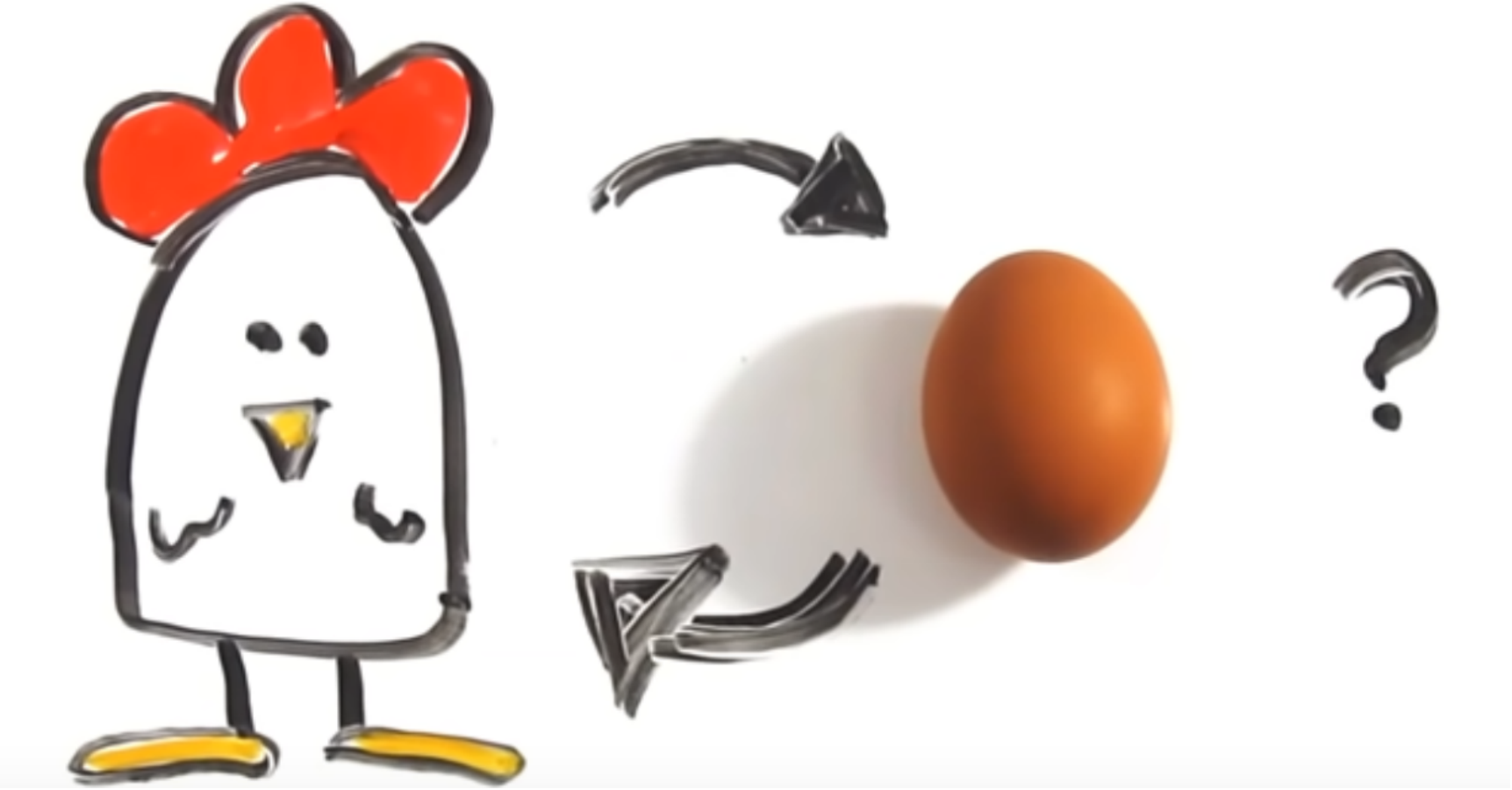
Vedran Krčadinac

PMF-MO

26.9.2022.

* This work was fully supported by the Croatian Science Foundation under the project 9752.

Što je bilo prije?



Slika: https://www.youtube.com/watch?v=1a8pI65emDE

Incidencijske geometrije

Konačna indicencijska struktura: skup V od v točaka, skup $\mathcal{B}$ od b blokova (pravaca) i relacija incidencije $I \subseteq V \times \mathcal{B}$.

Incidencijske geometrije

Konačna indicencijska struktura: skup V od v točaka, skup $\mathcal{B}$ od b blokova (pravaca) i relacija incidencije $I \subseteq V \times \mathcal{B}$.

Za jednostavne incidencijske strukture blokove možemo shvatiti kao podskupove točaka. Inc. struktura je tada familija podskupova $\mathcal{B} \subseteq 2^V$.

Incidencijske geometrije

Konačna indicencijska struktura: skup V od v točaka, skup $\mathcal{B}$ od b blokova (pravaca) i relacija incidencije $I \subseteq V \times \mathcal{B}$.

Za jednostavne incidencijske strukture blokove možemo shvatiti kao podskupove točaka. Inc. struktura je tada familija podskupova $\mathcal{B} \subseteq 2^V$.

Aksiomi: zahtjevi na incidencijske strukture koje proučavamo.

Incidencijske geometrije

Konačna indicencijska struktura: skup V od v točaka, skup $\mathcal{B}$ od b blokova (pravaca) i relacija incidencije $I \subseteq V \times \mathcal{B}$.

Za jednostavne incidencijske strukture blokove možemo shvatiti kao podskupove točaka. Inc. struktura je tada familija podskupova $\mathcal{B} \subseteq 2^V$.

Aksiomi: zahtjevi na incidencijske strukture koje proučavamo.

Kažemo da je incidencijska struktura:

- uniformna, ako na svakom bloku leži isti broj točaka k,

Incidencijske geometrije

Konačna indicencijska struktura: skup V od v točaka, skup $\mathcal{B}$ od b blokova (pravaca) i relacija incidencije $I \subseteq V \times \mathcal{B}$.

Za jednostavne incidencijske strukture blokove možemo shvatiti kao podskupove točaka. Inc. struktura je tada familija podskupova $\mathcal{B} \subseteq 2^V$.

Aksiomi: zahtjevi na incidencijske strukture koje proučavamo.

Kažemo da je incidencijska struktura:

- uniformna, ako na svakom bloku leži isti broj točaka k,
- regularna, ako kroz svaku točku prolazi isti broj blokova r.

Incidencijske geometrije

Konačna indicencijska struktura: skup V od v točaka, skup $\mathcal{B}$ od b blokova (pravaca) i relacija incidencije $I \subseteq V \times \mathcal{B}$.

Za jednostavne incidencijske strukture blokove možemo shvatiti kao podskupove točaka. Inc. struktura je tada familija podskupova $\mathcal{B} \subseteq 2^V$.

Aksiomi: zahtjevi na incidencijske strukture koje proučavamo.

Kažemo da je incidencijska struktura:

- uniformna, ako na svakom bloku leži isti broj točaka k,
- regularna, ako kroz svaku točku prolazi isti broj blokova r.

Jednostavni graf je uniformna incidencijska struktura s $k = 2$. U tom slučaju točke zovemo vrhovima, a blokove bridovima. Regularnost se podudara s uobičajenom definicijom iz teorije grafova.

Incidencijske geometrije

(Parcijalni) linearni prostor je incidencijska struktura koja zadovoljava:

- kroz svake dvije točke prolazi točno (najviše) jedan blok, tj. pravac.

Pritom podrazumijevamo zahtjeve nedegeneriranosti: na svakom pravcu leže bar dvije točke, postoje bar dva pravca.

Incidencijske geometrije

(Parcijalni) linearni prostor je incidencijska struktura koja zadovoljava:

- kroz svake dvije točke prolazi točno (najviše) jedan blok, tj. pravac.

Pritom podrazumijevamo zahtjeve nedegeneriranosti: na svakom pravcu leže bar dvije točke, postoje bar dva pravca.

Uniformni linearni prostor je Steinerov 2-dizajn. Regularnost slijedi automatski i vrijedi $r = \frac{v-1}{k-1}$, $b = \frac{v(v-1)}{k(k-1)}$.

Incidencijske geometrije

(Parcijalni) linearni prostor je incidencijska struktura koja zadovoljava:

- kroz svake dvije točke prolazi točno (najviše) jedan blok, tj. pravac.

Pritom podrazumijevamo zahtjeve nedegeneriranosti: na svakom pravcu leže bar dvije točke, postoje bar dva pravca.

Uniformni linearni prostor je Steinerov 2-dizajn. Regularnost slijedi automatski i vrijedi $r = \frac{v-1}{k-1}$, $b = \frac{v(v-1)}{k(k-1)}$.

Uniformni i regularni parcijalni linearni prostor je (v_r, b_k) konfiguracija.

Incidencijske geometrije

(Parcijalni) linearni prostor je incidencijska struktura koja zadovoljava:

- kroz svake dvije točke prolazi točno (najviše) jedan blok, tj. pravac.

Pritom podrazumijevamo zahtjeve nedegeneriranosti: na svakom pravcu leže bar dvije točke, postoje bar dva pravca.

Uniformni linearni prostor je Steinerov 2-dizajn. Regularnost slijedi automatski i vrijedi $r = \frac{v-1}{k-1}$, $b = \frac{v(v-1)}{k(k-1)}$.

Uniformni i regularni parcijalni linearni prostor je (v_r, b_k) konfiguracija.

Specijalni slučaj Steinerovih 2-dizajna su projektivne i afine ravnine.

Incidencijske geometrije

(Parcijalni) linearni prostor je incidencijska struktura koja zadovoljava:

- kroz svake dvije točke prolazi točno (najviše) jedan blok, tj. pravac.

Pritom podrazumijevamo zahtjeve nedegeneriranosti: na svakom pravcu leže bar dvije točke, postoje bar dva pravca.

Uniformni linearni prostor je Steinerov 2-dizajn. Regularnost slijedi automatski i vrijedi $r = \frac{v-1}{k-1}$, $b = \frac{v(v-1)}{k(k-1)}$.

Uniformni i regularni parcijalni linearni prostor je (v_r, b_k) konfiguracija.

Specijalni slučaj Steinerovih 2-dizajna su projektivne i afine ravnine.
Aksiomi?

Incidencijske geometrije

(Parcijalni) linearni prostor je incidencijska struktura koja zadovoljava:

- kroz svake dvije točke prolazi točno (najviše) jedan blok, tj. pravac.

Pritom podrazumijevamo zahtjeve nedegeneriranosti: na svakom pravcu leže bar dvije točke, postoje bar dva pravca.

Uniformni linearni prostor je Steinerov 2-dizajn. Regularnost slijedi automatski i vrijedi $r = \frac{v-1}{k-1}$, $b = \frac{v(v-1)}{k(k-1)}$.

Uniformni i regularni parcijalni linearni prostor je (v_r, b_k) konfiguracija.

Specijalni slučaj Steinerovih 2-dizajna su projektivne i afine ravnine.
Aksiomi?

Generalizacija: t-(v, k, λ) dizajn je k-uniformna inc. struktura takva da:

- svaki t-člani skup toča sadržan je u točno λ blokova.

Za dizajne s $\lambda > 1$ ima smisla dozvoliti ponovljene blokove, mada se i u tom slučaju obično ograničavamo na jednostavne dizajne.

Incidencijske geometrije

Jako regularni graf $SRG(v, r, \lambda, \mu)$ je r-regularan i zadovoljava:

- za svaka dva vrha, broj zajedničkih susjeda je λ ako su susjedni, a μ ako nisu susjedni.

Incidencijske geometrije

Jako regularni graf $SRG(v, r, \lambda, \mu)$ je r-regularan i zadovoljava:

- za svaka dva vrha, broj zajedničkih susjeda je λ ako su susjedni, a μ ako nisu susjedni.

Odgovarajući pojmovi relaciji susjedstva u grafu su kolinearnost točaka i kopunktalnost pravaca u parcijalnom linearnom prostoru.

Incidencijske geometrije

Jako regularni graf $SRG(v, r, \lambda, \mu)$ je r-regularan i zadovoljava:

- za svaka dva vrha, broj zajedničkih susjeda je λ ako su susjedni, a μ ako nisu susjedni.

Odgovarajući pojmovi relaciji susjedstva u grafu su kolinearnost točaka i kopunktalnost pravaca u parcijalnom linearnom prostoru.

Parcijalna geometrija je (v_r, b_k) konfiguracija koja zadovoljava:

- za svaki neincidentni par točke i pravca (x, B), točno α točaka na B je kolinearno s x.

Parametri se obično zapisuju u obliku $pg(k-1, r-1, \alpha)$.

Incidencijske geometrije

Jako regularni graf $SRG(v, r, \lambda, \mu)$ je r-regularan i zadovoljava:

- za svaka dva vrha, broj zajedničkih susjeda je λ ako su susjedni, a μ ako nisu susjedni.

Odgovarajući pojmovi relaciji susjedstva u grafu su kolinearnost točaka i kopunktalnost pravaca u parcijalnom linearnom prostoru.

Parcijalna geometrija je (v_r, b_k) konfiguracija koja zadovoljava:

- za svaki neincidentni par točke i pravca (x, B), točno α točaka na B je kolinearno s x.

Parametri se obično zapisuju u obliku $pg(k-1, r-1, \alpha)$.

R. C. Bose, *Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs*, Pacific J. Math. **13** (1963), 389–419.

Incidencijske geometrije

Specijalni slučajevi:

- $pg(k-1, r-1, k) \rightsquigarrow$ Steinerov 2-dizajn
- $pg(k-1, r-1, r-1) \rightsquigarrow (r, k)$-mreža
- $pg(k-1, r-1, k-1) \rightsquigarrow$ transverzalni dizajn $TD(r, k)$
- $pg(k-1, r-1, 1) \rightsquigarrow$ generalizirani četverokut

Incidencijske geometrije

Specijalni slučajevi:

- $pg(k-1, r-1, k) \rightsquigarrow$ Steinerov 2-dizajn
- $pg(k-1, r-1, r-1) \rightsquigarrow (r, k)$-mreža
- $pg(k-1, r-1, k-1) \rightsquigarrow$ transverzalni dizajn $TD(r, k)$
- $pg(k-1, r-1, 1) \rightsquigarrow$ generalizirani četverokut

Graf točaka i graf pravaca u $pg(k-1, r-1, \alpha)$ su jako regularni:

$$SRG\left(\frac{k(kr-k-r+1+\alpha)}{\alpha},\ r(k-1),\ k-r-1+\alpha(r-1),\ \alpha r\right)$$

$$SRG\left(\frac{r(kr-k-r+1+\alpha)}{\alpha},\ k(r-1),\ r-k-1+\alpha(k-1),\ \alpha k\right)$$

Raj Chandra Bose

From Wikipedia, the free encyclopedia

Raj Chandra Bose (19 June 1901 – 31 October 1987) was an Indian American mathematician and statistician best known for his work in design theory, finite geometry and the theory of error-correcting codes in which the class of BCH codes is partly named after him. He also invented the notions of partial geometry, association scheme, and strongly regular graph and started a systematic study of difference sets to construct symmetric block designs. He was notable for his work along with S. S. Shrikhande and E. T. Parker in their disproof of the famous conjecture made by Leonhard Euler dated 1782 that there do not exist two mutually orthogonal Latin squares of order $4n + 2$ for every n.

Raj Chandra Bose

Izvor: https://en.wikipedia.org/wiki/Raj_Chandra_Bose

Incidencijske geometrije

M. Abreu, M. Funk, V. Krčadinac, D. Labbate, *Strongly regular configurations*, Des. Codes Cryptogr. **90** (2022), no. 8, 1881–1897.

Incidencijske geometrije

M. Abreu, M. Funk, V. Krčadinac, D. Labbate, *Strongly regular configurations*, Des. Codes Cryptogr. **90** (2022), no. 8, 1881–1897.

A symmetric configuration is called a strongly regular $(v_k; \lambda, \mu)$ configuration if the associated point graph is a $SRG(v, k(k-1), \lambda, \mu)$.

Incidencijske geometrije

M. Abreu, M. Funk, V. Krčadinac, D. Labbate, *Strongly regular configurations*, Des. Codes Cryptogr. **90** (2022), no. 8, 1881–1897.

A symmetric configuration is called a strongly regular $(v_k; \lambda, \mu)$ configuration if the associated point graph is a $SRG(v, k(k-1), \lambda, \mu)$.

A strongly regular configuration with non-singular incidence matrix is called proper. Apart from for projective planes, this is equivalent with $(v-k)(\lambda+1) > k(k-1)^3$.

Incidencijske geometrije

M. Abreu, M. Funk, V. Krčadinac, D. Labbate, *Strongly regular configurations*, Des. Codes Cryptogr. **90** (2022), no. 8, 1881–1897.

A symmetric configuration is called a strongly regular $(v_k; \lambda, \mu)$ configuration if the associated point graph is a $SRG(v, k(k-1), \lambda, \mu)$.

A strongly regular configuration with non-singular incidence matrix is called proper. Apart from for projective planes, this is equivalent with $(v-k)(\lambda+1) > k(k-1)^3$.

A strongly regular configuration is called primitive if neither collinearity nor non-collinearity of points are equivalence relations. This is equivalent with $0 < \mu < k(k-1)$.

Incidencijske geometrije

M. Abreu, M. Funk, V. Krčadinac, D. Labbate, *Strongly regular configurations*, Des. Codes Cryptogr. **90** (2022), no. 8, 1881–1897.

A symmetric configuration is called a strongly regular $(v_k; \lambda, \mu)$ configuration if the associated point graph is a $SRG(v, k(k-1), \lambda, \mu)$.

A strongly regular configuration with non-singular incidence matrix is called proper. Apart from for projective planes, this is equivalent with $(v-k)(\lambda+1) > k(k-1)^3$.

A strongly regular configuration is called primitive if neither collinearity nor non-collinearity of points are equivalence relations. This is equivalent with $0 < \mu < k(k-1)$.

Kako nastaju ovakve definicije i aksiomi?

Kako nastaju definicije i aksiomi?

R. Hersh, *Some proposals for reviving the philosophy of mathematics*, Adv. in Math. **31** (1979), no. 1, 31–50.

(...) The typical "working mathematician" is a Platonist on weekdays and a formalist on Sundays. That is, when he is doing mathematics, he is convinced that he is dealing with an objective reality whose properties he is attempting to determine. But then, when challenged to give a philosophical account of this reality, he finds it easiest to pretend that he does not believe in it after all.

Kako nastaju definicije i aksiomi?

R. Hersh, *Some proposals for reviving the philosophy of mathematics*, Adv. in Math. **31** (1979), no. 1, 31–50.

(...) The typical "working mathematician" is a Platonist on weekdays and a formalist on Sundays. That is, when he is doing mathematics, he is convinced that he is dealing with an objective reality whose properties he is attempting to determine. But then, when challenged to give a philosophical account of this reality, he finds it easiest to pretend that he does not believe in it after all.

Reuben Hersh (1927.–2020.)

Kako nastaju definicije i aksiomi?

R. Hersh, *Some proposals for reviving the philosophy of mathematics*, Adv. in Math. **31** (1979), no. 1, 31–50.

(...) The typical "working mathematician" is a Platonist on weekdays and a formalist on Sundays. That is, when he is doing mathematics, he is convinced that he is dealing with an objective reality whose properties he is attempting to determine. But then, when challenged to give a philosophical account of this reality, he finds it easiest to pretend that he does not believe in it after all.

Reuben Hersh (1927.–2020.)

John Horton Conway (1937.–2020.)

Ronald Lewis Graham (1935.–2020.)

Freeman John Dyson (1923.–2020.)

Kako nastaju definicije i aksiomi?

R. Hersh, *Some proposals for reviving the philosophy of mathematics*, Adv. in Math. **31** (1979), no. 1, 31–50.

(...) The typical "working mathematician" is a Platonist on weekdays and a formalist on Sundays. That is, when he is doing mathematics, he is convinced that he is dealing with an objective reality whose properties he is attempting to determine. But then, when challenged to give a philosophical account of this reality, he finds it easiest to pretend that he does not believe in it after all.

Reuben Hersh (1927.–2020.)

John Horton Conway (1937.–2020.)

Ronald Lewis Graham (1935.–2020.)

Freeman John Dyson (1923.–2020.)

Zvonimir Janko (1932.–2022.)

Rudi Mathon (1940.–2022.)

Djelovanje grupe na skup

Neka je G grupa, a V skup. Djelovanje G na V je homomorfizam sa G u $Sym(V)$. Djelovanje je vjerno ako je monomorfizam, tj. injekcija.

Djelovanje grupe na skup

Neka je G grupa, a V skup. Djelovanje G na V je homomorfizam sa G u $Sym(V)$. Djelovanje je vjerno ako je monomorfizam, tj. injekcija.

Djelovanje zapisujemo s lijeva: $g.x$ ili $g(x)$ za $g \in G$ i $x \in V$. To znači da je kompatibilno s uobičajenom kompozicijom $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Djelovanje grupe na skup

Neka je G grupa, a V skup. Djelovanje G na V je homomorfizam sa G u $Sym(V)$. Djelovanje je vjerno ako je monomorfizam, tj. injekcija.

Djelovanje zapisujemo s lijeva: $g.x$ ili $g(x)$ za $g \in G$ i $x \in V$. To znači da je kompatibilno s uobičajenom kompozicijom $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Djelovanje zdesna zapisujemo eksponencijalno x^g, ali tada u kompoziciji $f \circ g$ prvo djeluje f, a onda g. [Oprez! U GAP-u su sva djelovanja zdesna!]

Djelovanje grupe na skup

Neka je G grupa, a V skup. Djelovanje G na V je homomorfizam sa G u $Sym(V)$. Djelovanje je vjerno ako je monomorfizam, tj. injekcija.

Djelovanje zapisujemo s lijeva: $g.x$ ili $g(x)$ za $g \in G$ i $x \in V$. To znači da je kompatibilno s uobičajenom kompozicijom $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Djelovanje zdesna zapisujemo eksponencijalno x^g, ali tada u kompoziciji $f \circ g$ prvo djeluje f, a onda g. [Oprez! U GAP-u su sva djelovanja zdesna!]

Grupa automorfizama incidencijske strukture je grupa G koja djeluje na skup točaka V i skup blokova $\mathcal{B}$ tako da se čuva incidencija:

$$x \, I \, B \iff g(x) \, I \, g(B), \quad \forall x \in V, B \in \mathcal{B}, g \in G.$$

Djelovanje grupe na skup

Neka je G grupa, a V skup. Djelovanje G na V je homomorfizam sa G u $Sym(V)$. Djelovanje je vjerno ako je monomorfizam, tj. injekcija.

Djelovanje zapisujemo s lijeva: $g.x$ ili $g(x)$ za $g \in G$ i $x \in V$. To znači da je kompatibilno s uobičajenom kompozicijom $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Djelovanje zdesna zapisujemo eksponencijalno x^g, ali tada u kompoziciji $f \circ g$ prvo djeluje f, a onda g. [Oprez! U GAP-u su sva djelovanja zdesna!]

Grupa automorfizama incidencijske strukture je grupa G koja djeluje na skup točaka V i skup blokova $\mathcal{B}$ tako da se čuva incidencija:

$$x \, I \, B \iff g(x) \, I \, g(B), \quad \forall x \in V, B \in \mathcal{B}, g \in G.$$

Alternativno, ako $\mathcal{B}$ shvatimo kao familiju podskupova od V, to je grupa G koja djeluje na V tako da se "čuvaju blokovi": $g(B) \in \mathcal{B}$, $\forall B \in \mathcal{B}$, $g \in G$. Pritom je $g(B) = \{g(x) \mid x \in B\}$.

Djelovanje grupe na skup

Vidimo da se djelovanje grupe G na skup V automatski prenosi na partitivni skup 2^V. Budući da se pritom čuva kardinalnost: $|g(B)| = |B|$, $\forall B \subseteq V$, $g \in G$, grupa G djeluje i na skup $\binom{V}{k}$ svih k-članih podskupova od V.

Djelovanje grupe na skup

Vidimo da se djelovanje grupe G na skup V automatski prenosi na partitivni skup 2^V. Budući da se pritom čuva kardinalnost: $|g(B)| = |B|$, $\forall B \subseteq V$, $g \in G$, grupa G djeluje i na skup $\binom{V}{k}$ svih k-članih podskupova od V. G je grupa automorfizama incidencijske strukture ako djeluje i na familiju svih blokova $\mathcal{B}$. Zato možemo identificirati:
"G je grupa automorfizama incidencijske strukture" $\iff$
"G djeluje na incidencijsku strukturu".

Djelovanje grupe na skup

Vidimo da se djelovanje grupe G na skup V automatski prenosi na partitivni skup 2^V. Budući da se pritom čuva kardinalnost: $|g(B)| = |B|$, $\forall B \subseteq V$, $g \in G$, grupa G djeluje i na skup $\binom{V}{k}$ svih k-članih podskupova od V. G je grupa automorfizama incidencijske strukture ako djeluje i na familiju svih blokova $\mathcal{B}$. Zato možemo identificirati:
"G je grupa automorfizama incidencijske strukture" $\iff$
"G djeluje na incidencijsku strukturu".

Ako G djeluje na V, djelovanje se automatski prenosi i na skup svih uređenih k-torki: $g(x_1, \ldots, x_k) = (g(x_1), \ldots, g(x_k))$.

Djelovanje grupe na skup

Vidimo da se djelovanje grupe G na skup V automatski prenosi na partitivni skup 2^V. Budući da se pritom čuva kardinalnost: $|g(B)| = |B|$, $\forall B \subseteq V$, $g \in G$, grupa G djeluje i na skup $\binom{V}{k}$ svih k-članih podskupova od V. G je grupa automorfizama incidencijske strukture ako djeluje i na familiju svih blokova $\mathcal{B}$. Zato možemo identificirati:
"G je grupa automorfizama incidencijske strukture" $\iff$
"G djeluje na incidencijsku strukturu".

Ako G djeluje na V, djelovanje se automatski prenosi i na skup svih uređenih k-torki: $g(x_1, \ldots, x_k) = (g(x_1), \ldots, g(x_k))$. Možemo se ograničiti na skup svih k-torki međusobno različitih elemenata, budući da vrijedi $g(x_i) = g(x_j) \iff x_i = x_j$.

Djelovanje grupe na skup

Vidimo da se djelovanje grupe G na skup V automatski prenosi na partitivni skup 2^V. Budući da se pritom čuva kardinalnost: $|g(B)| = |B|$, $\forall B \subseteq V$, $g \in G$, grupa G djeluje i na skup $\binom{V}{k}$ svih k-članih podskupova od V. G je grupa automorfizama incidencijske strukture ako djeluje i na familiju svih blokova $\mathcal{B}$. Zato možemo identificirati:
"G je grupa automorfizama incidencijske strukture" $\iff$
"G djeluje na incidencijsku strukturu".

Ako G djeluje na V, djelovanje se automatski prenosi i na skup svih uređenih k-torki: $g(x_1, \ldots, x_k) = (g(x_1), \ldots, g(x_k))$. Možemo se ograničiti na skup svih k-torki međusobno različitih elemenata, budući da vrijedi $g(x_i) = g(x_j) \iff x_i = x_j$.

Za djelovanje grupe G na skup V kažemo da je tranzitivno ako je cijeli skup V jedna orbita: $G.x = \{g(x) \mid g \in G\} = V, \ \forall x \in V$.

Djelovanje grupe na skup

Vidimo da se djelovanje grupe G na skup V automatski prenosi na partitivni skup 2^V. Budući da se pritom čuva kardinalnost: $|g(B)| = |B|$, $\forall B \subseteq V$, $g \in G$, grupa G djeluje i na skup $\binom{V}{k}$ svih k-članih podskupova od V. G je grupa automorfizama incidencijske strukture ako djeluje i na familiju svih blokova $\mathcal{B}$. Zato možemo identificirati:
"G je grupa automorfizama incidencijske strukture" $\iff$
"G djeluje na incidencijsku strukturu".

Ako G djeluje na V, djelovanje se automatski prenosi i na skup svih uređenih k-torki: $g(x_1, \ldots, x_k) = (g(x_1), \ldots, g(x_k))$. Možemo se ograničiti na skup svih k-torki međusobno različitih elemenata, budući da vrijedi $g(x_i) = g(x_j) \iff x_i = x_j$.

Za djelovanje grupe G na skup V kažemo da je tranzitivno ako je cijeli skup V jedna orbita: $G.x = \{g(x) \mid g \in G\} = V, \ \forall x \in V$. Kažemo da je t-tranzitivno ako je tranzitivno inducirano djelovanje na uređenim t-torkama međusobno različitih elemenata iz V, a t-homogeno ako je tranzitivno inducirano djelovanje na t-članim podskupovima od V.

Višestruko tranzitivno djelovanje

Očito t-tranzitivnost implicira t-homogenost, a za $t = 1$ su ekvivalentni s "običnom" tranzitivnosti.

Višestruko tranzitivno djelovanje

Očito t-tranzitivnost implicira t-homogenost, a za $t = 1$ su ekvivalentni s "običnom" tranzitivnosti.

Teorem.

Neka k-uniformna incidencijska struktura $\mathcal{D}$ ima grupu automorfizama koja djeluje t-homogeno na točkama. Tada je $\mathcal{D}$ t-dizajn.

Višestruko tranzitivno djelovanje

Očito t-tranzitivnost implicira t-homogenost, a za $t = 1$ su ekvivalentni s "običnom" tranzitivnosti.

Teorem.

Neka k-uniformna incidencijska struktura $\mathcal{D}$ ima grupu automorfizama koja djeluje t-homogeno na točkama. Tada je $\mathcal{D}$ t-dizajn.

$$\lambda_T = |\{B \in \mathcal{B} \mid T \subseteq B\}|$$

Višestruko tranzitivno djelovanje

Očito t-tranzitivnost implicira t-homogenost, a za $t = 1$ su ekvivalentni s "običnom" tranzitivnosti.

Teorem.

Neka k-uniformna incidencijska struktura $\mathcal{D}$ ima grupu automorfizama koja djeluje t-homogeno na točkama. Tada je $\mathcal{D}$ t-dizajn.

$\lambda_T = |\{B \in \mathcal{B} \mid T \subseteq B\}|$ Tvrdimo: $\lambda_T = \lambda_{T'}, \ \forall T, T' \in \binom{V}{t}$.

Višestruko tranzitivno djelovanje

Očito t-tranzitivnost implicira t-homogenost, a za $t = 1$ su ekvivalentni s "običnom" tranzitivnosti.

Teorem.

Neka k-uniformna incidencijska struktura $\mathcal{D}$ ima grupu automorfizama koja djeluje t-homogeno na točkama. Tada je $\mathcal{D}$ t-dizajn.

$\lambda_T = |\{B \in \mathcal{B} \mid T \subseteq B\}|$ Tvrdimo: $\lambda_T = \lambda_{T'}, \ \forall T, T' \in \binom{V}{t}$.

Vrijedi: $\lambda_T = \lambda_{g(T)}$, zbog $T \subseteq B \iff g(T) \subseteq g(B)$.

Višestruko tranzitivno djelovanje

Očito t-tranzitivnost implicira t-homogenost, a za $t = 1$ su ekvivalentni s "običnom" tranzitivnosti.

Teorem.

Neka k-uniformna incidencijska struktura $\mathcal{D}$ ima grupu automorfizama koja djeluje t-homogeno na točkama. Tada je $\mathcal{D}$ t-dizajn.

$\lambda_T = |\{B \in \mathcal{B} \mid T \subseteq B\}|$ Tvrdimo: $\lambda_T = \lambda_{T'}, \ \forall T, T' \in \binom{V}{t}$.

Vrijedi: $\lambda_T = \lambda_{g(T)}$, zbog $T \subseteq B \iff g(T) \subseteq g(B)$.

Zbog t-homogenosti, za sve $T, T' \in \binom{V}{t}$ postoji $g \in G$ takav da je $T' = g(T)$, pa slijedi $\lambda_T = \lambda_{T'}$.

Višestruko tranzitivno djelovanje

Očito t-tranzitivnost implicira t-homogenost, a za $t = 1$ su ekvivalentni s "običnom" tranzitivnosti.

Teorem.

Neka k-uniformna incidencijska struktura $\mathcal{D}$ ima grupu automorfizama koja djeluje t-homogeno na točkama. Tada je $\mathcal{D}$ t-dizajn.

$\lambda_T = |\{B \in \mathcal{B} \mid T \subseteq B\}|$ Tvrdimo: $\lambda_T = \lambda_{T'}, \ \forall T, T' \in \binom{V}{t}$.

Vrijedi: $\lambda_T = \lambda_{g(T)}$, zbog $T \subseteq B \iff g(T) \subseteq g(B)$.

Zbog t-homogenosti, za sve $T, T' \in \binom{V}{t}$ postoji $g \in G$ takav da je $T' = g(T)$, pa slijedi $\lambda_T = \lambda_{T'}$.

Recept za konstrukciju t-dizajna: uzmi t-homogenu (ili t-tranzitivnu) permutacijsku grupu G na V i bilo koji k-člani skup $B \subseteq V$. Tada je orbita $\mathcal{B} = G.B = \{g(B) \mid g \in G\}$ automatski t-dizajn.

Višestruko tranzitivno djelovanje

Očito t-tranzitivnost implicira t-homogenost, a za $t = 1$ su ekvivalentni s "običnom" tranzitivnosti.

Teorem.

Neka k-uniformna incidencijska struktura $\mathcal{D}$ ima grupu automorfizama koja djeluje t-homogeno na točkama. Tada je $\mathcal{D}$ t-dizajn.

$\lambda_T = |\{B \in \mathcal{B} \mid T \subseteq B\}|$ Tvrdimo: $\lambda_T = \lambda_{T'}, \ \forall T, T' \in \binom{V}{t}$.

Vrijedi: $\lambda_T = \lambda_{g(T)}$, zbog $T \subseteq B \iff g(T) \subseteq g(B)$.

Zbog t-homogenosti, za sve $T, T' \in \binom{V}{t}$ postoji $g \in G$ takav da je $T' = g(T)$, pa slijedi $\lambda_T = \lambda_{T'}$.

Recept za konstrukciju t-dizajna: uzmi t-homogenu (ili t-tranzitivnu) permutacijsku grupu G na V i bilo koji k-člani skup $B \subseteq V$. Tada je orbita $\mathcal{B} = G.B = \{g(B) \mid g \in G\}$ automatski t-dizajn. Kako odrediti λ?

Višestruko tranzitivno djelovanje

$$\lambda = \frac{b\binom{k}{t}}{\binom{v}{t}}$$

Višestruko tranzitivno djelovanje

$$\lambda = \frac{b\binom{k}{t}}{\binom{v}{t}} = \frac{|G.B|\binom{k}{t}}{\binom{v}{t}}$$

Višestruko tranzitivno djelovanje

$$\lambda = \frac{b\binom{k}{t}}{\binom{v}{t}} = \frac{|G.B|\binom{k}{t}}{\binom{v}{t}} = \frac{|G|\binom{k}{t}}{|G_B|\binom{v}{t}}$$

Višestruko tranzitivno djelovanje

$$\lambda = \frac{b\binom{k}{t}}{\binom{v}{t}} = \frac{|G.B|\binom{k}{t}}{\binom{v}{t}} = \frac{|G|\binom{k}{t}}{|G_B|\binom{v}{t}}$$

Teorem.

Jedine konačne 6-tranzitivne permutacijske grupe su simetrične i alternirajuće grupe.

Višestruko tranzitivno djelovanje

$$\lambda = \frac{b\binom{k}{t}}{\binom{v}{t}} = \frac{|G.B|\binom{k}{t}}{\binom{v}{t}} = \frac{|G|\binom{k}{t}}{|G_B|\binom{v}{t}}$$

Teorem.

Jedine konačne 6-tranzitivne permutacijske grupe su simetrične i alternirajuće grupe.

S_n je n-tranzitivna, a A_n je $(n-2)$-tranzitivna. Za konstrukciju dizajna nisu zanimljive jer daju potpune dizajne (k-homogene su za svaki $k \leq n$).

Višestruko tranzitivno djelovanje

$$\lambda = \frac{b\binom{k}{t}}{\binom{v}{t}} = \frac{|G.B|\binom{k}{t}}{\binom{v}{t}} = \frac{|G|\binom{k}{t}}{|G_B|\binom{v}{t}}$$

Teorem.

Jedine konačne 6-tranzitivne permutacijske grupe su simetrične i alternirajuće grupe.

S_n je n-tranzitivna, a A_n je $(n-2)$-tranzitivna. Za konstrukciju dizajna nisu zanimljive jer daju potpune dizajne (k-homogene su za svaki $k \leq n$).

Teorem.

Jedine konačne 4-tranzitivne permutacijske grupe su simetrične i alternirajuće grupe te Mathieuove grupe M_{11}, M_{12}, M_{23}, M_{24}.

Višestruko tranzitivno djelovanje

$$\lambda = \frac{b\binom{k}{t}}{\binom{v}{t}} = \frac{|G.B|\binom{k}{t}}{\binom{v}{t}} = \frac{|G|\binom{k}{t}}{|G_B|\binom{v}{t}}$$

Teorem.

Jedine konačne 6-tranzitivne permutacijske grupe su simetrične i alternirajuće grupe.

S_n je n-tranzitivna, a A_n je $(n-2)$-tranzitivna. Za konstrukciju dizajna nisu zanimljive jer daju potpune dizajne (k-homogene su za svaki $k \leq n$).

Teorem.

Jedine konačne 4-tranzitivne permutacijske grupe su simetrične i alternirajuće grupe te Mathieuove grupe M_{11}, M_{12}, M_{23}, M_{24}.

M_{12} i M_{24} su zapravo 5-tranzitivne i daju Wittove dizajne 5-$(12, 6, 1)$ i 5-$(24, 8, 1)$. M_{11} i M_{23} daju derivirane dizajne 4-$(11, 5, 1)$ i 4-$(23, 7, 1)$.

Višestruko tranzitivno djelovanje

Teorem.

Poznate su sve konačne 2-tranzitivne permutacijske grupe.

Višestruko tranzitivno djelovanje

Teorem.

Poznate su sve konačne 2-tranzitivne permutacijske grupe.

Rješive: B. Huppert, *Zweifach transitive, auflösbare Permutationsgruppen*, Math. Z. **68** (1957), 126–150.

Nerješive: C. Hering, *Transitive linear groups and linear groups which contain irreducible subgroups of prime order. II*, J. Algebra **93** (1985), no. 1, 151–164. (koristi klasifikaciju konačnih jednostavnih grupa)

Višestruko tranzitivno djelovanje

Teorem.

Poznate su sve konačne 2-tranzitivne permutacijske grupe.

Rješive: B. Huppert, *Zweifach transitive, auflösbare Permutationsgruppen*, Math. Z. **68** (1957), 126–150.

Nerješive: C. Hering, *Transitive linear groups and linear groups which contain irreducible subgroups of prime order. II*, J. Algebra **93** (1985), no. 1, 151–164. (koristi klasifikaciju konačnih jednostavnih grupa)

P. J. Cameron, *Permutation groups*, Cambridge University Press, 1999.

Višestruko tranzitivno djelovanje

Teorem.

Poznate su sve konačne 2-tranzitivne permutacijske grupe.

Rješive: B. Huppert, *Zweifach transitive, auflösbare Permutationsgruppen*, Math. Z. **68** (1957), 126–150.

Nerješive: C. Hering, *Transitive linear groups and linear groups which contain irreducible subgroups of prime order. II*, J. Algebra **93** (1985), no. 1, 151–164. (koristi klasifikaciju konačnih jednostavnih grupa)

P. J. Cameron, *Permutation groups*, Cambridge University Press, 1999.

Degree	$H = G_0$	Condition	No. of actions
q^d	$\mathrm{SL}(d,q) \leq H \leq \Gamma\mathrm{L}(d,q)$		up to q if q even, $d = 2$ 2 if $(d,q) = (3,2)$
q^{2d}	$\mathrm{Sp}(d,q) \trianglelefteq H$	$d \geq 2$	up to q if q even
q^6	$G_2(q) \trianglelefteq H$	q even	up to q
q	$(2^{1+2} \rtimes 3) = \mathrm{SL}(2,3) \trianglelefteq H$	$q = 5^2, 7^2, 11^2, 23^2$	1
q	$2^{1+4} \trianglelefteq H$	$q = 3^4$	1
q	$\mathrm{SL}(2,5) \trianglelefteq H$	$q = 11^2, 19^2, 29^2, 59^2$	1
2^4	A_6		2
2^4	A_7		1
2^6	$\mathrm{PSU}(3,3)$		2
3^6	$\mathrm{SL}(2,13)$		1

Table 7.3: Affine 2-transitive groups

Višestruko tranzitivno djelovanje

n	Condition	N	$\max \lvert G/N \rvert$	$\min(t)$	$\max(t)$	No. of actions
n	$n \geq 5$	A_n	2	$n-2$	n	2 if $n=6$ 1 otherwise
$(q^d-1)/(q-1)$	$d \geq 2$ $(d,q) \neq (2,2),(2,3)$	$\mathrm{PSL}(d,q)$	$(d,q-1)e$	3 if $d=2, q$ even 2 otherwise	3 if $d=2$ 2 otherwise	2 if $d>2$ 1 otherwise
$2^{2d-1}+2^{d-1}$	$d \geq 3$	$\mathrm{Sp}(2d,2)$	1	2	2	1
$2^{2d-1}-2^{d-1}$	$d \geq 3$	$\mathrm{Sp}(2d,2)$	1	2	2	1
q^3+1	$q \geq 3$	$\mathrm{PSU}(3,q)$	$(3,q+1)e$	2	2	1
q^2+1	$q=2^{2d+1}>2$	$Sz(q)$	$2d+1$	2	2	1
q^3+1	$q=3^{2d+1}>3$	$R_1(q)$	$2d+1$	2	2	1
11		$\mathrm{PSL}(2,11)$	1	2	2	2
11		M_{11}	1	4	4	1
12		M_{11}	1	3	3	1
12		M_{12}	1	5	5	2
15		A_7	1	2	2	2
22		M_{22}	2	3	3	1
23		M_{23}	1	4	4	1
24		M_{24}	1	5	5	1
28		$\mathrm{PSL}(2,8)$	3	1	2	1
176		HS	1	2	2	2
276		Co_3	1	2	2	1

Table 7.4: Almost simple 2-transitive groups

Višestruko tranzitivno djelovanje

W. M. Kantor, *k-homogeneous groups*, Math. Z. **124** (1972), 261–265.

Theorem 1. *Let G be a group k-homogeneous but not k-transitive on a finite set Ω of n points, where $n \geqq 2k$. Then, up to permutation isomorphism, one of the following holds:*

(i) $k=2$ *and* $G \leqq A\Gamma L(1,q)$ *with* $n=q\equiv 3 \pmod 4$;

(ii) $k=3$ *and* $PSL(2,q) \leqq G \leqq P\Gamma L(2,q)$, *where* $n-1=q\equiv 3 \pmod 4$;

(iii) $k=3$ *and* $G=AGL(1,8)$, $A\Gamma L(1,8)$ *or* $A\Gamma L(1,32)$; *or*

(iv) $k=4$ *and* $G=PSL(2,8)$, $P\Gamma L(2,8)$ *or* $P\Gamma L(2,32)$.

Višestruko tranzitivno djelovanje

W. M. Kantor, *k-homogeneous groups*, Math. Z. **124** (1972), 261–265.

Theorem 1. *Let G be a group k-homogeneous but not k-transitive on a finite set Ω of n points, where $n \geqq 2k$. Then, up to permutation isomorphism, one of the following holds:*

(i) $k=2$ *and* $G \leqq A\Gamma L(1,q)$ *with* $n=q\equiv 3 \pmod 4$;

(ii) $k=3$ *and* $PSL(2,q) \leqq G \leqq P\Gamma L(2,q)$, *where* $n-1=q\equiv 3 \pmod 4$;

(iii) $k=3$ *and* $G=AGL(1,8)$, $A\Gamma L(1,8)$ *or* $A\Gamma L(1,32)$; *or*

(iv) $k=4$ *and* $G=PSL(2,8)$, $P\Gamma L(2,8)$ *or* $P\Gamma L(2,32)$.

W. M. Kantor, *Homogeneous designs and geometric lattices*, J. Combin. Theory Ser. A **38** (1985), no. 1, 66–74.

THEOREM 1. *Let $\mathscr{D}$ be a design with $\lambda=1$ admitting an automorphism group 2-transitive on points. Then $\mathscr{D}$ is one of the following designs:*

(i) $PG(d,q)$,

(ii) $AG(d,q)$,

(iii) *The design with* $v=q^3+1$ *and* $k=q+1$ *associated with* $PSU(3,q)$ *or* ${}^2G_2(q)$,

(iv) *One of two affine planes, having* 3^4 *or* 3^6 *points* [5, p. 236], *or*

(v) *One of two designs having* $v=3^6$ *and* $k=3^2$ [12].

Što ako grupa nije t-homogena?

Nehomogene grupe i jako regularni grafovi

Što ako grupa nije t-homogena?

Kramer-Mesnerova metoda konstrukcije t-dizajna: uzmemo permutacijsku grupu G na V koja ne djeluje t-homogeno. Tražimo predstavnike orbita k-članih podskupova $B_1, \ldots, B_n \subseteq V$ tako da $G.B_1 \cup \cdots \cup G.B_n$ pokriva sve predstavnike orbita t-članih podskupova točno λ puta.

Nehomogene grupe i jako regularni grafovi

Što ako grupa nije t-homogena?

Kramer-Mesnerova metoda konstrukcije t-dizajna: uzmemo permutacijsku grupu G na V koja ne djeluje t-homogeno. Tražimo predstavnike orbita k-članih podskupova $B_1, \ldots, B_n \subseteq V$ tako da $G.B_1 \cup \cdots \cup G.B_n$ pokriva sve predstavnike orbita t-članih podskupova točno λ puta.

Kakva treba biti grupa automorfizama grafa da bi graf bio jako regularan?

Nehomogene grupe i jako regularni grafovi

Što ako grupa nije t-homogena?

Kramer-Mesnerova metoda konstrukcije t-dizajna: uzmemo permutacijsku grupu G na V koja ne djeluje t-homogeno. Tražimo predstavnike orbita k-članih podskupova $B_1, \ldots, B_n \subseteq V$ tako da $G.B_1 \cup \cdots \cup G.B_n$ pokriva sve predstavnike orbita t-članih podskupova točno λ puta.

Kakva treba biti grupa automorfizama grafa da bi graf bio jako regularan?

Tranzitivnost na $V \Longrightarrow$ regularnost (svi vrhovi su istog stupnja).

Nehomogene grupe i jako regularni grafovi

Što ako grupa nije t-homogena?

Kramer-Mesnerova metoda konstrukcije t-dizajna: uzmemo permutacijsku grupu G na V koja ne djeluje t-homogeno. Tražimo predstavnike orbita k-članih podskupova $B_1, \ldots, B_n \subseteq V$ tako da $G.B_1 \cup \cdots \cup G.B_n$ pokriva sve predstavnike orbita t-članih podskupova točno λ puta.

Kakva treba biti grupa automorfizama grafa da bi graf bio jako regularan?

Tranzitivnost na $V \Longrightarrow$ regularnost (svi vrhovi su istog stupnja).

Neka su (x, y) i (x', y') dva para vrhova. Ako postoji automorfizam g takav da je $(x', y') = g(x, y) = (g(x), g(y))$, onda par (x', y') ima jednak broj zajedničkih susjeda kao par (x, y).

Nehomogene grupe i jako regularni grafovi

Što ako grupa nije t-homogena?

Kramer-Mesnerova metoda konstrukcije t-dizajna: uzmemo permutacijsku grupu G na V koja ne djeluje t-homogeno. Tražimo predstavnike orbita k-članih podskupova $B_1, \ldots, B_n \subseteq V$ tako da $G.B_1 \cup \cdots \cup G.B_n$ pokriva sve predstavnike orbita t-članih podskupova točno λ puta.

Kakva treba biti grupa automorfizama grafa da bi graf bio jako regularan?

Tranzitivnost na $V \Longrightarrow$ regularnost (svi vrhovi su istog stupnja).

Neka su (x, y) i (x', y') dva para vrhova. Ako postoji automorfizam g takav da je $(x', y') = g(x, y) = (g(x), g(y))$, onda par (x', y') ima jednak broj zajedničkih susjeda kao par (x, y).

Automorfizam ne može preslikati par susjednih vrhova u par nesusjednih vrhova, i obrnuto.

Rang permutacijske grupe

Neka je G grupa permutacija skupa V. Orbite induciranog djelovanja na Kartezijevom produktu $V \times V$ zovemo orbitalama. Broj orbitala zovemo rangom grupe G.

Rang permutacijske grupe

Neka je G grupa permutacija skupa V. Orbite induciranog djelovanja na Kartezijevom produktu $V \times V$ zovemo orbitalama. Broj orbitala zovemo rangom grupe G. Taj broj je barem 2, jer permutacija ne može preslikati par (x, x) u par (x, y) za $x \neq y$.

Rang permutacijske grupe

Neka je G grupa permutacija skupa V. Orbite induciranog djelovanja na Kartezijevom produktu $V \times V$ zovemo orbitalama. Broj orbitala zovemo rangom grupe G. Taj broj je barem 2, jer permutacija ne može preslikati par (x, x) u par (x, y) za $x \neq y$.

Grupa je tranzitivna ako i samo ako su svi parovi (x, x) u istoj orbitali.

Rang permutacijske grupe

Neka je G grupa permutacija skupa V. Orbite induciranog djelovanja na Kartezijevom produktu $V \times V$ zovemo orbitalama. Broj orbitala zovemo rangom grupe G. Taj broj je barem 2, jer permutacija ne može preslikati par (x, x) u par (x, y) za $x \neq y$.

Grupa je tranzitivna ako i samo ako su svi parovi (x, x) u istoj orbitali.

Grupa je 2-tranzitivna ako i samo ako je ranga 2.

Rang permutacijske grupe

Neka je G grupa permutacija skupa V. Orbite induciranog djelovanja na Kartezijevom produktu $V \times V$ zovemo orbitalama. Broj orbitala zovemo rangom grupe G. Taj broj je barem 2, jer permutacija ne može preslikati par (x, x) u par (x, y) za $x \neq y$.

Grupa je tranzitivna ako i samo ako su svi parovi (x, x) u istoj orbitali.

Grupa je 2-tranzitivna ako i samo ako je ranga 2.

Ako je grupa automorfizama grafa ranga 3, onda su svi parovi susjednih vrhova u jednoj orbitali, a svi parovi nesusjednih vrhova su u drugoj orbitali.

Rang permutacijske grupe

Neka je G grupa permutacija skupa V. Orbite induciranog djelovanja na Kartezijevom produktu $V \times V$ zovemo orbitalama. Broj orbitala zovemo rangom grupe G. Taj broj je barem 2, jer permutacija ne može preslikati par (x, x) u par (x, y) za $x \neq y$.

Grupa je tranzitivna ako i samo ako su svi parovi (x, x) u istoj orbitali.

Grupa je 2-tranzitivna ako i samo ako je ranga 2.

Ako je grupa automorfizama grafa ranga 3, onda su svi parovi susjednih vrhova u jednoj orbitali, a svi parovi nesusjednih vrhova su u drugoj orbitali.

Teorem.

Ako graf ima grupu automorfizama koja na vrhovima djeluje kao permutacijska grupa ranga 3, onda je taj graf jako regularan.

Takve grafove zovemo grafovima ranga 3.

Grafovi i parcijalni linearni prostori

Recept za konstrukciju jako regularnih grafova: uzmi permutacijsku grupu ranga 3 parnog reda. Orbitale parova različitih elemenata proglasi relacijama susjedstva i nesusjedstva.

Grafovi i parcijalni linearni prostori

Recept za konstrukciju jako regularnih grafova: uzmi permutacijsku grupu ranga 3 parnog reda. Orbitale parova različitih elemenata proglasi relacijama susjedstva i nesusjedstva.

Zašto grupa treba biti parnog reda?

Grafovi i parcijalni linearni prostori

Recept za konstrukciju jako regularnih grafova: uzmi permutacijsku grupu ranga 3 parnog reda. Orbitale parova različitih elemenata proglasi relacijama susjedstva i nesusjedstva.

Zašto grupa treba biti parnog reda?

A. E. Brouwer, H. Van Maldeghem, *Strongly regular graphs*, 2021.
`https://homepages.cwi.nl/~aeb/math/srg/rk3/srgw.pdf`

Poglavlje 11 (str. 355-370) $\rightsquigarrow$ klasifikacija grafova ranga 3.

Grafovi i parcijalni linearni prostori

Recept za konstrukciju jako regularnih grafova: uzmi permutacijsku grupu ranga 3 parnog reda. Orbitale parova različitih elemenata proglasi relacijama susjedstva i nesusjedstva.

Zašto grupa treba biti parnog reda?

A. E. Brouwer, H. Van Maldeghem, *Strongly regular graphs*, 2021.
`https://homepages.cwi.nl/~aeb/math/srg/rk3/srgw.pdf`

Poglavlje 11 (str. 355-370) $\rightsquigarrow$ klasifikacija grafova ranga 3.

Teorem.

Ako parcijalni linearni prostor ima grupu automorfizama koja na točkama djeluje kao permutacijska grupa ranga 3, onda je njezin graf točaka jako regularan.

Grafovi i parcijalni linearni prostori

Recept za konstrukciju jako regularnih grafova: uzmi permutacijsku grupu ranga 3 parnog reda. Orbitale parova različitih elemenata proglasi relacijama susjedstva i nesusjedstva.

Zašto grupa treba biti parnog reda?

A. E. Brouwer, H. Van Maldeghem, *Strongly regular graphs*, 2021.
`https://homepages.cwi.nl/~aeb/math/srg/rk3/srgw.pdf`

Poglavlje 11 (str. 355-370) $\rightsquigarrow$ klasifikacija grafova ranga 3.

Teorem.

Ako parcijalni linearni prostor ima grupu automorfizama koja na točkama djeluje kao permutacijska grupa ranga 3, onda je njezin graf točaka jako regularan. Ako je uz to simetričan ($v = b$), onda imamo jako regularnu konfiguraciju $(v_k; \lambda, \mu)$.

Parcijalni linearni prostori

A. Devillers, *A classification of finite partial linear spaces with a primitive rank* 3 *automorphism group of almost simple type*, Innov. Incidence Geom. **2** (2005), 129–175.

A. Devillers, *A classification of finite partial linear spaces with a primitive rank* 3 *automorphism group of grid type*, European J. Combin. **29** (2008), no. 1, 268–272.

J. Bamberg, A. Devillers, J. B. Fawcett, C. Praeger, *Partial linear spaces with a rank* 3 *affine primitive group of automorphisms*, J. Lond. Math. Soc. (2) **104** (2021), no. 3, 1011–1084.

Parcijalni linearni prostori

A. Devillers, *A classification of finite partial linear spaces with a primitive rank* 3 *automorphism group of almost simple type*, Innov. Incidence Geom. **2** (2005), 129–175.

A. Devillers, *A classification of finite partial linear spaces with a primitive rank* 3 *automorphism group of grid type*, European J. Combin. **29** (2008), no. 1, 268–272.

J. Bamberg, A. Devillers, J. B. Fawcett, C. Praeger, *Partial linear spaces with a rank* 3 *affine primitive group of automorphisms*, J. Lond. Math. Soc. (2) **104** (2021), no. 3, 1011–1084.

Tablica dopistivih parametara $(v_k; \lambda, \mu)$ **jako regularnih konfiguracija**

Parcijalni linearni prostori

RBr.	$(v_k; \lambda, \mu)$	#Cf	#SCf	#Rk3	#Reg
1	$(10_3; 3, 4)$	**2**	**2**	**1**	**0**
2	$(13_3; 2, 3)$	**1**	**1**	**0**	**1**
3	$(16_3; 2, 2)$	**1**	**1**	**0**	**1**
5	$(36_5; 10, 12)$	**1**	**1**	**0**	**1**
9	$(49_6; 17, 20)$	1	1	0	1
10	$(50_7; 35, 36)$	211	111	1	0
12	$(63_6; 13, 15)$	4	2	0	0
13	$(64_7; 26, 30)$	29	11	0	3
17	$(96_5; 4, 4)$	1	1	0	1
19	$(100_9; 50, 56)$	1	1	0	1
22	$(120_8; 28, 24)$	1	1	0	1
30	$(144_{11}; 82, 90)$	1	1	0	1
33	$(155_7; 17, 9)$	4	2	1	1
	$(243_{12}; 81, 60)$	1	1	1	1

Parcijalni linearni prostori

RBr.	$(v_k; \lambda, \mu)$	#Cf	#SCf	#Rk3	#Reg
1	$(10_3; 3, 4)$	**2**	**2**	**1**	**0**
2	$(13_3; 2, 3)$	**1**	**1**	**0**	**1**
3	$(16_3; 2, 2)$	**1**	**1**	**0**	**1**
5	$(36_5; 10, 12)$	**1**	**1**	**0**	**1**
9	$(49_6; 17, 20)$	1	1	0	1
10	$(50_7; 35, 36)$	211	111	1	0
12	$(63_6; 13, 15)$	4	2	0	0
13	$(64_7; 26, 30)$	29	11	0	3
17	$(96_5; 4, 4)$	1	1	0	1
19	$(100_9; 50, 56)$	1	1	0	1
22	$(120_8; 28, 24)$	1	1	0	1
30	$(144_{11}; 82, 90)$	1	1	0	1
33	$(155_7; 17, 9)$	4	2	1	1
	$(243_{12}; 81, 60)$	1	1	1	1

Parcijalni linearni prostori

RBr.	$(v_k; \lambda, \mu)$	#Cf	#SCf	#Rk3	#Reg
1	$(10_3; 3, 4)$	**2**	**2**	**1**	**0**
2	$(13_3; 2, 3)$	**1**	**1**	**0**	**1**
3	$(16_3; 2, 2)$	**1**	**1**	**0**	**1**
5	$(36_5; 10, 12)$	**1**	**1**	**0**	**1**
9	$(49_6; 17, 20)$	1	1	0	1
10	$(50_7; 35, 36)$	211	111	1	0
12	$(63_6; 13, 15)$	4	2	0	0
13	$(64_7; 26, 30)$	29	11	0	3
17	$(96_5; 4, 4)$	1	1	0	1
19	$(100_9; 50, 56)$	1	1	0	1
22	$(120_8; 28, 24)$	1	1	0	1
30	$(144_{11}; 82, 90)$	1	1	0	1
33	$(155_7; 17, 9)$	4	2	1	1
	$(243_{12}; 81, 60)$	1	1	1	1

Kvazisimetrični dizajni

Za dizajn kažemo da je kvazisimetričan ako je stupnja 2, tj. ako ima samo dva presječna broja. Presječni brojevi su veličine presjeka parova blokova.

R. Vlahović Kruc, *Neki rezultati o kvazisimetričnim dizajnima s iznimnim parametrima*, doktorska disertacija, srpanj 2019.

Kvazisimetrični dizajni

Za dizajn kažemo da je kvazisimetričan ako je stupnja 2, tj. ako ima samo dva presječna broja. Presječni brojevi su veličine presjeka parova blokova.

R. Vlahović Kruc, *Neki rezultati o kvazisimetričnim dizajnima s iznimnim parametrima*, doktorska disertacija, srpanj 2019.

Kakva treba biti grupa automorfizama incidencijske strukture da bi incidencijska struktura bila kvazisimetrični 2-dizajn?

Kvazisimetrični dizajni

Za dizajn kažemo da je kvazisimetričan ako je stupnja 2, tj. ako ima samo dva presječna broja. Presječni brojevi su veličine presjeka parova blokova.

R. Vlahović Kruc, *Neki rezultati o kvazisimetričnim dizajnima s iznimnim parametrima*, doktorska disertacija, srpanj 2019.

Kakva treba biti grupa automorfizama incidencijske strukture da bi incidencijska struktura bila kvazisimetrični 2-dizajn?

Djelovanje na točkama: 2-homogeno.

Kvazisimetrični dizajni

Za dizajn kažemo da je kvazisimetričan ako je stupnja 2, tj. ako ima samo dva presječna broja. Presječni brojevi su veličine presjeka parova blokova.

R. Vlahović Kruc, *Neki rezultati o kvazisimetričnim dizajnima s iznimnim parametrima*, doktorska disertacija, srpanj 2019.

Kakva treba biti grupa automorfizama incidencijske strukture da bi incidencijska struktura bila kvazisimetrični 2-dizajn?

Djelovanje na točkama: 2-homogeno.

Ako postoji $g \in G$ takav da je $(B_1', B_2') = g(B_1, B_2) = (g(B_1), g(B_2))$, onda je $|B_1' \cap B_2'| = |g(B_1) \cap g(B_2)| = |g(B_1 \cap B_2)| = |B_1 \cap B_2|$.

Kvazisimetrični dizajni

Za dizajn kažemo da je kvazisimetričan ako je stupnja 2, tj. ako ima samo dva presječna broja. Presječni brojevi su veličine presjeka parova blokova.

R. Vlahović Kruc, *Neki rezultati o kvazisimetričnim dizajnima s iznimnim parametrima*, doktorska disertacija, srpanj 2019.

Kakva treba biti grupa automorfizama incidencijske strukture da bi incidencijska struktura bila kvazisimetrični 2-dizajn?

Djelovanje na točkama: 2-homogeno.

Ako postoji $g \in G$ takav da je $(B_1', B_2') = g(B_1, B_2) = (g(B_1), g(B_2))$, onda je $|B_1' \cap B_2'| = |g(B_1) \cap g(B_2)| = |g(B_1 \cap B_2)| = |B_1 \cap B_2|$.

Teorem.

Neka incidencijska struktura $\mathcal{D}$ ima grupu automorfizama koja na točkama djeluje 2-homogeno, a na blokovima tranzitivno ranga 3. Tada je $\mathcal{D}$ kvazisimetrični 2-dizajn.

Kvazisimetrični dizajni

Tablica poznatih kvazisimetričnih dizajna s iznimnim parametrima

Kvazisimetrični dizajni

Tablica poznatih kvazisimetričnih dizajna s iznimnim parametrima

v	k	λ	r	b	x	y	$\#QSD$	$\#2Hp$	$\#R3b$
21	6	4	16	56	0	2	1	1	1
21	7	12	40	120	1	3	1	1	0
22	6	5	21	77	0	2	1	1	1
22	7	16	56	176	1	3	1	1	1
23	7	21	77	253	1	3	1	1	1
28	12	11	27	63	4	6	$\geq$58891	1	1
31	7	7	35	155	1	3	5	1	1
36	16	12	28	63	6	8	$\geq$522079	1	1
45	9	8	44	220	1	3	1	0	0
49	9	6	36	196	1	3	$\geq$44	0	0
56	16	6	22	77	4	6	$\geq$1410	0	0
56	16	18	66	231	4	8	$\geq$4	0	0
63	15	35	155	651	3	7	$\geq$1	1	1
64	24	46	126	336	8	12	$\geq$30264	0	0
66	30	29	65	143	12	15	$\geq$10000	0	0
78	36	30	66	143	15	18	$\geq$10000	0	0

Kvazisimetrični dizajni

Tablica poznatih kvazisimetričnih dizajna s iznimnim parametrima

v	k	λ	r	b	x	y	$\#QSD$	$\#2Hp$	$\#R3b$
21	6	4	16	56	0	2	1	1	1
21	7	12	40	120	1	3	1	1	0
22	6	5	21	77	0	2	1	1	1
22	7	16	56	176	1	3	1	1	1
23	7	21	77	253	1	3	1	1	1
28	12	11	27	63	4	6	$\geq$58891	1	1
31	7	7	35	155	1	3	5	1	1
36	16	12	28	63	6	8	$\geq$522079	1	1
45	9	8	44	220	1	3	1	0	0
49	9	6	36	196	1	3	$\geq$44	0	0
56	16	6	22	77	4	6	$\geq$1410	0	0
56	16	18	66	231	4	8	$\geq$4	0	0
63	15	35	155	651	3	7	$\geq$1	1	1
64	24	46	126	336	8	12	$\geq$30264	0	0
66	30	29	65	143	12	15	$\geq$10000	0	0
78	36	30	66	143	15	18	$\geq$10000	0	0

Kvazisimetrični dizajni

Generalizacija:

Teorem.

Neka incidencijska struktura $\mathcal{D}$ ima grupu automorfizama koja na točkama djeluje t-homogeno, a na blokovima tranzitivno ranga $d+1$. Tada je $\mathcal{D}$ dizajn snage najmanje t i stupnja najviše d. Ako je stupanj jednak d, onda je $\mathcal{D}$ shematski dizajn.

Kvazisimetrični dizajni

Generalizacija:

Teorem.

Neka incidencijska struktura $\mathcal{D}$ ima grupu automorfizama koja na točkama djeluje t-homogeno, a na blokovima tranzitivno ranga $d+1$. Tada je $\mathcal{D}$ dizajn snage najmanje t i stupnja najviše d. Ako je stupanj jednak d, onda je $\mathcal{D}$ shematski dizajn.

4-dizajni stupnja 3:

v	k	λ	x	y	z	t	$d+1$
11	5	1	1	2	3	4	4
23	8	4	0	2	4	4	4
23	11	48	3	5	7	4	4
24	8	5	0	2	4	5	4
47	11	8	1	3	5	1	–

Simetrični dizajni

Kakva treba biti grupa automorfizama incidencijske strukture da bi incidencijska struktura bila simetrični dizajn?

Simetrični dizajni

Kakva treba biti grupa automorfizama incidencijske strukture da bi incidencijska struktura bila simetrični dizajn?

2-tranzitivna na točkama $\rightsquigarrow$ 2-dizajn. **Simetričnost?**

Simetrični dizajni

Kakva treba biti grupa automorfizama incidencijske strukture da bi incidencijska struktura bila simetrični dizajn?

2-tranzitivna na točkama $\rightsquigarrow$ 2-dizajn. **Simetričnost?**

Lema.

Automorfizam simetričnog dizajna fiksira isti broj točaka i blokova.

Simetrični dizajni

Kakva treba biti grupa automorfizama incidencijske strukture da bi incidencijska struktura bila simetrični dizajn?

2-tranzitivna na točkama $\rightsquigarrow$ 2-dizajn. **Simetričnost?**

Lema.

Automorfizam simetričnog dizajna fiksira isti broj točaka i blokova.

E. S. Lander, *Symmetric designs: an algebraic approach*, Cambridge University Press, 1983.

Simetrični dizajni

Kakva treba biti grupa automorfizama incidencijske strukture da bi incidencijska struktura bila simetrični dizajn?

2-tranzitivna na točkama $\rightsquigarrow$ 2-dizajn. **Simetričnost?**

Lema.

Automorfizam simetričnog dizajna fiksira isti broj točaka i blokova.

E. S. Lander, *Symmetric designs: an algebraic approach*, Cambridge University Press, 1983.

Propozicija.

Ako grupa automorfizama simetričnog dizajna djeluje 2-tranzitivno na točkama, onda djeluje 2-tranzitivno i na blokovima.

Simetrični dizajni

Kakva treba biti grupa automorfizama incidencijske strukture da bi incidencijska struktura bila simetrični dizajn?

2-tranzitivna na točkama $\rightsquigarrow$ 2-dizajn. **Simetričnost?**

Lema.

Automorfizam simetričnog dizajna fiksira isti broj točaka i blokova.

E. S. Lander, *Symmetric designs: an algebraic approach*, Cambridge University Press, 1983.

Propozicija.

Ako grupa automorfizama simetričnog dizajna djeluje 2-tranzitivno na točkama, onda djeluje 2-tranzitivno i na blokovima.

"Burnsideova lema": broj orbita $= \dfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{fix}(g)$.

Simetrični dizajni

Za tranzitivnu grupu, broj orbitala $= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{fix}(g)^2$.

Simetrični dizajni

Za tranzitivnu grupu, broj orbitala $= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{fix}(g)^2$.

Propozicija.

Ako grupa automorfizama simetričnog dizajna djeluje 2-tranzitivno, onda djeluje tranzitivno na incidentnim parovima (točka,blok) i na neincidentnim parovima (točka,blok). [djeluje flag-tranzitivno i antiflag-tranzitivno]

Simetrični dizajni

Za tranzitivnu grupu, broj orbitala $= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{fix}(g)^2$.

Propozicija.

Ako grupa automorfizama simetričnog dizajna djeluje 2-tranzitivno, onda djeluje tranzitivno na incidentnim parovima (točka,blok) i na neincidentnim parovima (točka,blok). [djeluje flag-tranzitivno i antiflag-tranzitivno]

W. M. Kantor, *Classification of 2-transitive symmetric designs*, Graphs Combin. **1** (1985), no. 2, 165–166.

Theorem. *Let D be a symmetric design with $v > 2k$ such that Aut D is 2-transitive on points. Then D is one of the following:*

(i) *a projective space;*
(ii) *the unique Hadamard design with $v = 11$ and $k = 5$;*
(iii) *a unique design with $v = 176$, $k = 50$ and $\lambda = 14$; or*
(iv) *a design with $v = 2^{2m}$, $k = 2^{m-1}(2^m - 1)$ and $\lambda = 2^{m-1}(2^{m-1} - 1)$, of which there is exactly one for each $m \geq 2$.*

Simetrični dizajni

P. J. Cameron, *On groups with several doubly-transitive permutation representations*, Math. Z. **128** (1972), 1–14.

Recept za konstrukciju simetričnih dizajna: uzmi grupu G koja djeluje 2-tranzitivno na dva skupa Ω_1, Ω_2 s $|\Omega_1| = |\Omega_2| = v$. Neka permutacijske reprezentacije od G na Ω_1 i Ω_2 imaju jednake karaktere, ali nisu ekvivalentne. Tada djelovanje po komponentama na $\Omega_1 \times \Omega_2$ ima dvije orbite, koje su relacije incidencije dvaju komplementarnih simetričnih (v, k, λ) dizajna.

Simetrični dizajni

P. J. Cameron, *On groups with several doubly-transitive permutation representations*, Math. Z. **128** (1972), 1–14.

Recept za konstrukciju simetričnih dizajna: uzmi grupu G koja djeluje 2-tranzitivno na dva skupa Ω_1, Ω_2 s $|\Omega_1| = |\Omega_2| = v$. Neka permutacijske reprezentacije od G na Ω_1 i Ω_2 imaju jednake karaktere, ali nisu ekvivalentne. Tada djelovanje po komponentama na $\Omega_1 \times \Omega_2$ ima dvije orbite, koje su relacije incidencije dvaju komplementarnih simetričnih (v, k, λ) dizajna. Neekvivalentne?

Simetrični dizajni

P. J. Cameron, *On groups with several doubly-transitive permutation representations*, Math. Z. **128** (1972), 1–14.

Recept za konstrukciju simetričnih dizajna: uzmi grupu G koja djeluje 2-tranzitivno na dva skupa Ω_1, Ω_2 s $|\Omega_1| = |\Omega_2| = v$. Neka permutacijske reprezentacije od G na Ω_1 i Ω_2 imaju jednake karaktere, ali nisu ekvivalentne. Tada djelovanje po komponentama na $\Omega_1 \times \Omega_2$ ima dvije orbite, koje su relacije incidencije dvaju komplementarnih simetričnih (v, k, λ) dizajna. Neekvivalentne? $\Rightarrow 1 < k < v - 1$

Simetrični dizajni

P. J. Cameron, *On groups with several doubly-transitive permutation representations*, Math. Z. **128** (1972), 1–14.

Recept za konstrukciju simetričnih dizajna: uzmi grupu G koja djeluje 2-tranzitivno na dva skupa Ω_1, Ω_2 s $|\Omega_1| = |\Omega_2| = v$. Neka permutacijske reprezentacije od G na Ω_1 i Ω_2 imaju jednake karaktere, ali nisu ekvivalentne. Tada djelovanje po komponentama na $\Omega_1 \times \Omega_2$ ima dvije orbite, koje su relacije incidencije dvaju komplementarnih simetričnih (v, k, λ) dizajna. Neekvivalentne? $\Rightarrow 1 < k < v - 1$

Ideja: pretpostavimo da grupa G ima $f \geq 3$ permutacijskih reprezentacija na skupovima s $|\Omega_1| = \ldots = |\Omega_f| = v$ koje su sve 2-tranzitivne, imaju iste karaktere, ali su u parovima neekvivalentne. Kakvu kombinatornu strukturu dobivamo od takve grupe?

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

Neka je Γ multipartitni graf sa skupom vrhova $V = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_f$, pri čemu su Ω_i u parovima disjunktni skupovi veličine v koje zovemo vlakna (eng. fibers). Kažemo da je Γ sustav spojenih simetričnih dizajna (eng. linked system of symmetric designs, LSSD) ako vrijedi:

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

Neka je Γ multipartitni graf sa skupom vrhova $V = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_f$, pri čemu su Ω_i u parovima disjunktni skupovi veličine v koje zovemo vlakna (eng. fibers). Kažemo da je Γ sustav spojenih simetričnih dizajna (eng. linked system of symmetric designs, LSSD) ako vrijedi:

- niti jedan brid nema oba kraja u istom vlaknu Ω_i,

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

Neka je Γ multipartitni graf sa skupom vrhova $V = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_f$, pri čemu su Ω_i u parovima disjunktni skupovi veličine v koje zovemo vlakna (eng. fibers). Kažemo da je Γ sustav spojenih simetričnih dizajna (eng. linked system of symmetric designs, LSSD) ako vrijedi:

- niti jedan brid nema oba kraja u istom vlaknu Ω_i,
- za svaka dva vlakna Ω_i, Ω_j, inducirani podgraf na $\Omega_i \cup \Omega_j$ je incidencijski graf simetričnog (v, k, λ) dizajna,

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

Neka je Γ multipartitni graf sa skupom vrhova $V = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_f$, pri čemu su Ω_i u parovima disjunktni skupovi veličine v koje zovemo vlakna (eng. fibers). Kažemo da je Γ sustav spojenih simetričnih dizajna (eng. linked system of symmetric designs, LSSD) ako vrijedi:

- niti jedan brid nema oba kraja u istom vlaknu Ω_i,
- za svaka dva vlakna Ω_i, Ω_j, inducirani podgraf na $\Omega_i \cup \Omega_j$ je incidencijski graf simetričnog (v, k, λ) dizajna,
- postoje konstante μ, ν takve da za svaka tri vlakna Ω_i, Ω_j, Ω_m i svaka dva vrha $x \in \Omega_i$, $y \in \Omega_j$, broj zajedničkih susjeda od x i y u Ω_m je μ ako su x i y susjedni, a ν ako nisu susjedni.

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

P. J. Cameron, *On groups with several doubly-transitive permutation representations*, Math. Z. **128** (1972), 1–14.

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

P. J. Cameron, *On groups with several doubly-transitive permutation representations*, Math. Z. **128** (1972), 1–14.

R. Noda, *On homogeneous systems of linked symmetric designs*, Math. Z. **138** (1974), 15–20.

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

P. J. Cameron, *On groups with several doubly-transitive permutation representations*, Math. Z. **128** (1972), 1–14.

R. Noda, *On homogeneous systems of linked symmetric designs*, Math. Z. **138** (1974), 15–20.

R. Mathon, *The systems of linked* 2-$(16, 6, 2)$ *designs*, Ars Combin. **11** (1981), 131–148.

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

P. J. Cameron, *On groups with several doubly-transitive permutation representations*, Math. Z. **128** (1972), 1–14.

R. Noda, *On homogeneous systems of linked symmetric designs*, Math. Z. **138** (1974), 15–20.

R. Mathon, *The systems of linked* 2-$(16, 6, 2)$ *designs*, Ars Combin. **11** (1981), 131–148.

E. R. van Dam, *Three-class association schemes*, J. Algebraic Combin. **10** (1999), no. **1**, 69–107.

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

P. J. Cameron, *On groups with several doubly-transitive permutation representations*, Math. Z. **128** (1972), 1–14.

R. Noda, *On homogeneous systems of linked symmetric designs*, Math. Z. **138** (1974), 15–20.

R. Mathon, *The systems of linked* 2-$(16, 6, 2)$ *designs*, Ars Combin. **11** (1981), 131–148.

E. R. van Dam, *Three-class association schemes*, J. Algebraic Combin. **10** (1999), no. **1**, 69–107.

B. G. Kodalen, *Linked systems of symmetric designs*, Algebr. Comb. **2** (2019), no. 1, 119–147.

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

P. J. Cameron, *On groups with several doubly-transitive permutation representations*, Math. Z. **128** (1972), 1–14.

R. Noda, *On homogeneous systems of linked symmetric designs*, Math. Z. **138** (1974), 15–20.

R. Mathon, *The systems of linked* 2-$(16, 6, 2)$ *designs*, Ars Combin. **11** (1981), 131–148.

E. R. van Dam, *Three-class association schemes*, J. Algebraic Combin. **10** (1999), no. **1**, 69–107.

B. G. Kodalen, *Linked systems of symmetric designs*, Algebr. Comb. **2** (2019), no. 1, 119–147.

J. A. Davis, W. J. Martin, J. B. Polhill, *Linking systems in nonelementary abelian groups*, J. Combin. Theory Ser. A **123** (2014), 92–103.

J. Jedwab, S. Li, S. Simon, *Linking systems of difference sets*, J. Combin. Des. **27** (2019), no. 3, 161–187.

Permutacijske grupe – domaća zadaća

E. S. Lander, *Symmetric designs: an algebraic approach*, Cambridge University Press, 1983. Appendix A. Permutation groups.

Permutacijske grupe – domaća zadaća

E. S. Lander, *Symmetric designs: an algebraic approach*, Cambridge University Press, 1983. Appendix A. Permutation groups.

G. A. Jones, *Notes on permutation groups*, Summer School in Coherent Configurations, Permutation Groups and Applications in Algebraic Graph Theory, Nový Smokovec, Slovakia, 2014.
https://www.savbb.sk/conf/sschool14/material/PermGpsNotes.pdf

Permutacijske grupe – domaća zadaća

E. S. Lander, *Symmetric designs: an algebraic approach*, Cambridge University Press, 1983. Appendix A. Permutation groups.

G. A. Jones, *Notes on permutation groups*, Summer School in Coherent Configurations, Permutation Groups and Applications in Algebraic Graph Theory, Nový Smokovec, Slovakia, 2014.
https://www.savbb.sk/conf/sschool14/material/PermGpsNotes.pdf

P. J. Cameron, *Permutation groups*, Cambridge University Press, 1999.

Permutacijske grupe – domaća zadaća

E. S. Lander, *Symmetric designs: an algebraic approach*, Cambridge University Press, 1983. Appendix A. Permutation groups.

G. A. Jones, *Notes on permutation groups*, Summer School in Coherent Configurations, Permutation Groups and Applications in Algebraic Graph Theory, Nový Smokovec, Slovakia, 2014.
https://www.savbb.sk/conf/sschool14/material/PermGpsNotes.pdf

P. J. Cameron, *Permutation groups*, Cambridge University Press, 1999.

J. D. Dixon, B. Mortimer, *Permutation groups*, Springer-Verlag, New York, 1996.

Permutacijske grupe – domaća zadaća

E. S. Lander, *Symmetric designs: an algebraic approach*, Cambridge University Press, 1983. Appendix A. Permutation groups.

G. A. Jones, *Notes on permutation groups*, Summer School in Coherent Configurations, Permutation Groups and Applications in Algebraic Graph Theory, Nový Smokovec, Slovakia, 2014.
https://www.savbb.sk/conf/sschool14/material/PermGpsNotes.pdf

P. J. Cameron, *Permutation groups*, Cambridge University Press, 1999.

J. D. Dixon, B. Mortimer, *Permutation groups*, Springer-Verlag, New York, 1996.

P. M. Neumann, G. A. Stoy, E. C. Thompson, *Groups and geometry*, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1994.

Kraj

Hvala na pažnji!