Generalizacije i analogoni jako regularnih grafova*

Vedran Krčadinac

PMF-MO

16.9.2024.

* This work was fully supported by the Croatian Science Foundation under the project 9752.

Sadržaj

Sadržaj

Jako regularni grafovi

G1: Distancijsko regularni grafovi

G2: Asocijacijske sheme

G3: Koherentne konfiguracije

A1: Usmjereni jako regularni grafovi

A2: Jako regularni grafovi nad $\mathbb{F}_q$

A3: Jako regularni označeni grafovi

Definicije, primjeri, povijest, nekoliko "domaćih" rezultata...

Definicija

Za graf kažemo da je jako regularan s parametrima $SRG(n, \Bbbk, \lambda, \mu)$ ako:

Definicija

Za graf kažemo da je jako regularan s parametrima $SRG(n, k, \lambda, \mu)$ ako:

1. broj vrhova je n

Definicija

Za graf kažemo da je jako regularan s parametrima $SRG(n, k, \lambda, \mu)$ ako:

1. broj vrhova je n
2. svaki vrh je stupnja k

Definicija

Za graf kažemo da je jako regularan s parametrima $SRG(n, k, \lambda, \mu)$ ako:

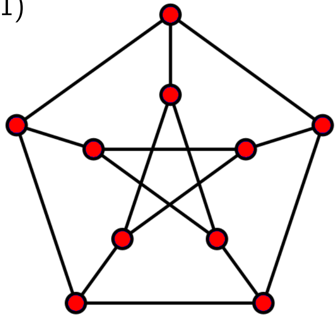
1. broj vrhova je n
2. svaki vrh je stupnja k
3. svaka dva vrha imaju λ zajedničkih susjeda ako su susjedni, a μ zajedničkih susjeda ako nisu susjedni

Definicija

Za graf kažemo da je jako regularan s parametrima $SRG(n, k, \lambda, \mu)$ ako:

1. broj vrhova je n
2. svaki vrh je stupnja k
3. svaka dva vrha imaju λ zajedničkih susjeda ako su susjedni,
   a μ zajedničkih susjeda ako nisu susjedni

Primjer. $SRG(10, 3, 0, 1)$



Povijest

R. C. Bose, *Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs*, Pacific J. Math. **13** (1963), 389–419.

Povijest

R. C. Bose, *Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs*, Pacific J. Math. **13** (1963), 389–419.

Definicija.

Parcijalna geometrija s parametrima $pg(s, t, \alpha)$ je konačna incidencijska struktura takva da:

1. na svakom pravcu leži $s + 1$ točaka
2. kroz svaku točku prolazi $t + 1$ pravaca
3. kroz svake dvije točke prolazi najviše jedan pravac

Povijest

R. C. Bose, *Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs*, Pacific J. Math. **13** (1963), 389–419.

Definicija.

Parcijalna geometrija s parametrima $pg(s, t, \alpha)$ je konačna incidencijska struktura takva da:

1. na svakom pravcu leži $s + 1$ točaka
2. kroz svaku točku prolazi $t + 1$ pravaca
3. kroz svake dvije točke prolazi najviše jedan pravac

(v_{t+1}, b_{s+1}) konfiguracija

Povijest

R. C. Bose, *Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs*, Pacific J. Math. **13** (1963), 389–419.

Definicija.

Parcijalna geometrija s parametrima $pg(s,t,\alpha)$ je konačna incidencijska struktura takva da:

1. na svakom pravcu leži $s+1$ točaka
2. kroz svaku točku prolazi $t+1$ pravaca
3. kroz svake dvije točke prolazi najviše jedan pravac

(v_{t+1}, b_{s+1}) konfiguracija

(parcijalni linearni prostor)

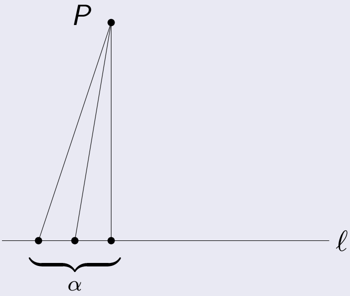
Povijest

R. C. Bose, *Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs*, Pacific J. Math. **13** (1963), 389–419.

Definicija.

Parcijalna geometrija s parametrima $pg(s, t, \alpha)$ je konačna incidencijska struktura takva da:

4. za svaki neincidentni par (P, ℓ) točno α točaka na ℓ je kolinearno s P



Parcijalne geometrije

Broj točaka i pravaca u $pg(s, t, \alpha)$:

$$v = (s+1)\frac{(st+\alpha)}{\alpha} \qquad b = (t+1)\frac{(st+\alpha)}{\alpha}$$

Parcijalne geometrije

Broj točaka i pravaca u $pg(s,t,\alpha)$:

$$v = (s+1)\frac{(st+\alpha)}{\alpha} \qquad b = (t+1)\frac{(st+\alpha)}{\alpha}$$

Graf točaka i graf pravaca su jako regularni:

$$SRG(v,\ s(t+1),\ s-1+t(\alpha-1),\ \alpha(t+1))$$

$$SRG(b,\ t(s+1),\ t-1+s(\alpha-1),\ \alpha(s+1))$$

Broj točaka i pravaca u $pg(s,t,\alpha)$:

$$v = (s+1)\frac{(st+\alpha)}{\alpha} \qquad b = (t+1)\frac{(st+\alpha)}{\alpha}$$

Graf točaka i graf pravaca su jako regularni:

$$SRG(v,\ s(t+1),\ s-1+t(\alpha-1),\ \alpha(t+1))$$

$$SRG(b,\ t(s+1),\ t-1+s(\alpha-1),\ \alpha(s+1))$$

Primjer. $pg(5,5,2) \rightsquigarrow SRG(81,30,9,12)$

J. H. van Lint, A. Schrijver, *Construction of strongly regular graphs, two-weight codes and partial geometries by finite fields*, Combinatorica **1** (1981), no. 1, 63–73.

Grafovi: geometrijski, pseudogeometrijski, jako regularni

V. Krčadinac, *A new partial geometry* $pg(5,5,2)$, J. Combin. Theory Ser. A **183** (2021), Paper No. 105493, 4 pp.

D. Crnković, A. Švob, V. D. Tonchev, *Strongly regular graphs with parameters* $(81,30,9,12)$ *and a new partial geometry*, J. Algebraic Combin. **53** (2021), no. 1, 253–261.

Grafovi: geometrijski, pseudogeometrijski, jako regularni

V. Krčadinac, *A new partial geometry* $pg(5,5,2)$, J. Combin. Theory Ser. A **183** (2021), Paper No. 105493, 4 pp.

D. Crnković, A. Švob, V. D. Tonchev, *Strongly regular graphs with parameters* $(81,30,9,12)$ *and a new partial geometry*, J. Algebraic Combin. **53** (2021), no. 1, 253–261.

M. Abreu, M. Funk, V. Krčadinac, D. Labbate, *Strongly regular configurations*, Des. Codes Cryptogr. **90** (2022), no. 8, 1881–1897.

Grafovi: geometrijski, pseudogeometrijski, jako regularni

V. Krčadinac, *A new partial geometry* $pg(5,5,2)$, J. Combin. Theory Ser. A **183** (2021), Paper No. 105493, 4 pp.

D. Crnković, A. Švob, V. D. Tonchev, *Strongly regular graphs with parameters* $(81,30,9,12)$ *and a new partial geometry*, J. Algebraic Combin. **53** (2021), no. 1, 253–261.

M. Abreu, M. Funk, V. Krčadinac, D. Labbate, *Strongly regular configurations*, Des. Codes Cryptogr. **90** (2022), no. 8, 1881–1897.

F. Ihringer, *Switching for small strongly regular graphs*, Australas. J. Combin. **84** (2022), 28–48. $\rightsquigarrow$ **16 565 438** neizomorfnih $SRG(81,30,9,12)$

Grafovi: geometrijski, pseudogeometrijski, jako regularni

V. Krčadinac, *A new partial geometry* $pg(5,5,2)$, J. Combin. Theory Ser. A **183** (2021), Paper No. 105493, 4 pp.

D. Crnković, A. Švob, V. D. Tonchev, *Strongly regular graphs with parameters* $(81,30,9,12)$ *and a new partial geometry*, J. Algebraic Combin. **53** (2021), no. 1, 253–261.

M. Abreu, M. Funk, V. Krčadinac, D. Labbate, *Strongly regular configurations*, Des. Codes Cryptogr. **90** (2022), no. 8, 1881–1897.

F. Ihringer, *Switching for small strongly regular graphs*, Australas. J. Combin. **84** (2022), 28–48. $\rightsquigarrow$ **16 565 438** neizomorfnih $SRG(81,30,9,12)$

Dva su geometrijski, a ostali su pseudogeometrijski

Grafovi: geometrijski, pseudogeometrijski, jako regularni

V. Krčadinac, *A new partial geometry* $pg(5,5,2)$, J. Combin. Theory Ser. A **183** (2021), Paper No. 105493, 4 pp.

D. Crnković, A. Švob, V. D. Tonchev, *Strongly regular graphs with parameters* $(81,30,9,12)$ *and a new partial geometry*, J. Algebraic Combin. **53** (2021), no. 1, 253–261.

M. Abreu, M. Funk, V. Krčadinac, D. Labbate, *Strongly regular configurations*, Des. Codes Cryptogr. **90** (2022), no. 8, 1881–1897.

F. Ihringer, *Switching for small strongly regular graphs*, Australas. J. Combin. **84** (2022), 28–48. $\rightsquigarrow$ **16 565 438** neizomorfnih $SRG(81,30,9,12)$

Dva su geometrijski, a ostali su pseudogeometrijski

$SRG(16,5,0,2)$ **nije** pseudogeometrijski:

$$s(t+1)=5 \;\Rightarrow\; s=1, t=4 \;\Rightarrow\; \alpha=\frac{4}{7}$$

Egzistencija jako regularnih grafova

P. J. Cameron, *Random strongly regular graphs?*, Discrete Math. **273** (2003), no. 1-3, 103–114.

> *"Strongly regular graphs lie on the cusp between highly structured and unstructured. For example, there is a unique strongly regular graph with parameters* $(36, 10, 4, 2)$*, but there are* 32548 *non-isomorphic graphs with parameters* $(36, 15, 6, 6)$*. (The first assertion is a special case of a theorem of Shrikhande, while the second is the result of a computer search by McKay and Spence.)"*

Egzistencija jako regularnih grafova

P. J. Cameron, *Random strongly regular graphs?*, Discrete Math. **273** (2003), no. 1-3, 103–114.

> *"Strongly regular graphs lie on the cusp between highly structured and unstructured. For example, there is a unique strongly regular graph with parameters* $(36, 10, 4, 2)$*, but there are* 32548 *non-isomorphic graphs with parameters* $(36, 15, 6, 6)$*. (The first assertion is a special case of a theorem of Shrikhande, while the second is the result of a computer search by McKay and Spence.)"*

A. E. Brouwer, H. Van Maldeghem, *Strongly regular graphs*, Cambridge University Press, 2022.

https://homepages.cwi.nl/~aeb/math/srg/rk3/srgw.pdf

Egzistencija jako regularnih grafova

P. J. Cameron, *Random strongly regular graphs?*, Discrete Math. **273** (2003), no. 1-3, 103–114.

> *"Strongly regular graphs lie on the cusp between highly structured and unstructured. For example, there is a unique strongly regular graph with parameters* $(36, 10, 4, 2)$, *but there are* 32548 *non-isomorphic graphs with parameters* $(36, 15, 6, 6)$. *(The first assertion is a special case of a theorem of Shrikhande, while the second is the result of a computer search by McKay and Spence.)"*

A. E. Brouwer, H. Van Maldeghem, *Strongly regular graphs*, Cambridge University Press, 2022.
https://homepages.cwi.nl/~aeb/math/srg/rk3/srgw.pdf

Brouwerova tablica:
https://www.win.tue.nl/~aeb/graphs/srg/srgtab.html

Brouwerova tablica

	v	k	λ	μ	r^f	s^g	comments
!	5	2	0	1	0.618^2	-1.618^2	pentagon; Paley(5); Seidel 2-graph*
!	9	4	1	2	1^4	-2^4	Paley(9); 3^2; 2-graph*
!	10	3	0	1	1^5	-2^4	Petersen graph; $NO^-(4,2)$; $NO^{-,orth}(3,5)$; switch OA(3,2)+*; 2-graph
		6	3	4	1^4	-2^5	Triangular graph T(5); 2-graph
!	13	6	2	3	1.303^6	-2.303^6	Paley(13); 2-graph*
!	15	6	1	3	1^9	-3^5	O(5,2) Sp(4,2); $NO^-(4,3)$; GQ(2,2); 2-graph*
		8	4	4	2^5	-2^9	Triangular graph T(6); 2-graph*
!	16	5	0	2	1^{10}	-3^5	q222=0; $VO^-(4,2)$ affine polar graph; projective binary [5,4] code with weights 2, 4; $RSHCD^-$; 2-graph
		10	6	6	2^5	-2^{10}	Clebsch graph; q111=0; from 2-(4,2,1) with 1-factor Fickus et al.; 2-graph
2!	16	6	2	2	2^6	-2^9	Shrikhande graph; 4^2; Wallis (AR(2,1)+S(2,2,4)); from a partial spread: projective binary [6,4] code with weights 2, 4; $RSHCD^+$; 2-graph
		9	4	6	1^9	-3^6	OA(4,3); $Bilin_{2x2}(2)$; Wallis2 (AR(2,1)+S(2,2,4)); Goethals-Seidel(2,3); $VO^+(4,2)$ affine polar graph; 2-graph
!	17	8	3	4	1.562^8	-2.562^8	Paley(17); 2-graph*
!	21	10	3	6	1^{14}	-4^6	
		10	5	4	3^6	-2^{14}	Triangular graph T(7)
-	21	10	4	5	1.791^{10}	-2.791^{10}	Conf
!	25	8	3	2	3^8	-2^{16}	5^2
		16	9	12	1^{16}	-4^8	OA(5,4)
15!	25	12	5	6	2^{12}	-3^{12}	Paulus and Rozenfel'd; Paley(25); OA(5,3); 2-graph*
10!	26	10	3	4	2^{13}	-3^{12}	Paulus and Rozenfel'd; switch OA(5,3)+*; 2-graph
		15	8	9	2^{12}	-3^{13}	S(2,3,13); 2-graph
!	27	10	1	5	1^{20}	-5^6	q222=0; $O^-(6,2)$ polar graph; Godsil(q=3,r=2); GQ(2,4); 2-graph*
		16	10	8	4^6	-2^{20}	Schläfli graph; unique by Seidel; q111=0; 2-graph*
-	28	9	0	4	1^{21}	-5^6	Krein2; Absolute bound

Brouwerova tablica

+	64	28	12	12	4^{28}	-4^{35}	OA(8,4); Wallis (AR(2,2)+S(2,2,8)); from a partial spread of 3-spaces: projective binary [28,6] code with weights 12, 16; RSHCD^{+}; 2-graph
		35	18	20	3^{35}	-5^{28}	OA(8,5); Wallis2 (AR(2,2)+S(2,2,8)); Goethals-Seidel(2,7); VO^{+}(6,2) affine polar graph; 2-graph
-	64	30	18	10	10^{8}	-2^{55}	Absolute bound
		33	12	22	1^{55}	-11^{8}	Absolute bound
+	65	32	15	16	3.531^{32}	-4.531^{32}	Gritsenko; 2-graph*
!	66	20	10	4	8^{11}	-2^{54}	Triangular graph T(12)
		45	28	36	1^{54}	-9^{11}	pg(5,8,4) does not exist (Lam et al.)
?	69	20	7	5	5^{23}	-3^{45}	
		48	32	36	2^{45}	-6^{23}	S(2,6,46) does not exist
-	69	34	16	17	3.653^{34}	-4.653^{34}	Conf
+	70	27	12	9	6^{20}	-3^{49}	S(2,3,21)
		42	23	28	2^{49}	-7^{20}	pg(6,6,4)?
+	73	36	17	18	3.772^{36}	-4.772^{36}	Paley(73); 2-graph*
-	75	32	10	16	2^{56}	-8^{18}	Azarija-Marc
		42	25	21	7^{18}	-3^{56}	
-	76	21	2	7	2^{56}	-7^{19}	Haemers
		54	39	36	6^{19}	-3^{56}	
-	76	30	8	14	2^{57}	-8^{18}	Bondarenko, Prymak & Radchenko

Brouwerova tablica

+	64	28	12	12	4^{28}	-4^{35}	OA(8,4); Wallis (AR(2,2)+S(2,2,8)); from a partial spread of 3-spaces: projective binary [28,6] code with weights 12, 16; RSHCD$^+$; 2-graph
		35	18	20	3^{35}	-5^{28}	OA(8,5); Wallis2 (AR(2,2)+S(2,2,8)); Goethals-Seidel(2,7); VO$^+$(6,2) affine polar graph; 2-graph
-	64	30	18	10	10^{8}	-2^{55}	Absolute bound
		33	12	22	1^{55}	-11^{8}	Absolute bound
+	65	32	15	16	3.531^{32}	-4.531^{32}	Gritsenko; 2-graph*
!	66	20	10	4	8^{11}	-2^{54}	Triangular graph T(12)
		45	28	36	1^{54}	-9^{11}	pg(5,8,4) does not exist (Lam et al.)
?	69	20	7	5	5^{23}	-3^{45}	
		48	32	36	2^{45}	-6^{23}	S(2,6,46) does not exist
-	69	34	16	17	3.653^{34}	-4.653^{34}	Conf
+	70	27	12	9	6^{20}	-3^{49}	S(2,3,21)
		42	23	28	2^{49}	-7^{20}	pg(6,6,4)?
+	73	36	17	18	3.772^{36}	-4.772^{36}	Paley(73); 2-graph*
-	75	32	10	16	2^{56}	-8^{18}	Azarija-Marc
		42	25	21	7^{18}	-3^{56}	
-	76	21	2	7	2^{56}	-7^{19}	Haemers
		54	39	36	6^{19}	-3^{56}	
-	76	30	8	14	2^{57}	-8^{18}	Bondarenko, Prymak & Radchenko

D. Crnković, S. Rukavina, A. Švob, *New strongly regular graphs from orthogonal groups $O^+(6,2)$ and $O^-(6,2)$*, Discrete Math. **341** (2018), no. 10, 2723–2728.

$\rightsquigarrow$ postoje $SRG(216,40,4,8)$ i $SRG(540,187,58,68)$

Generalizacija 1: Distancijsko regularni grafovi

Povezani jako regularni grafovi imaju dijametar $d = 2$

Generalizacija 1: Distancijsko regularni grafovi

Povezani jako regularni grafovi imaju dijametar $d = 2$

Povezanost $SRG(n, k, \lambda, \mu)$ ekvivalentna je s $\mu > 0$

Generalizacija 1: Distancijsko regularni grafovi

Povezani jako regularni grafovi imaju dijametar $d = 2$

Povezanost $SRG(n, k, \lambda, \mu)$ ekvivalentna je s $\mu > 0$

Jedini nepovezani jako regularni grafovi su disjunktne unije potpunih grafova: $m \cdot K_n$ (tzv. imprimitivni jako regularni grafovi)

Generalizacija 1: Distancijsko regularni grafovi

Povezani jako regularni grafovi imaju dijametar $d = 2$

Povezanost $SRG(n, \Bbbk, \lambda, \mu)$ ekvivalentna je s $\mu > 0$

Jedini nepovezani jako regularni grafovi su disjunktne unije potpunih grafova: $m \cdot K_n$ (tzv. imprimitivni jako regularni grafovi)

Kako generalizirati uvjet jake regularnosti na grafove većeg dijametra?

Definicija

Neka je G povezan graf dijametra d. Za vrh x i broj $i \geq 0$, označimo s $N_i(x)$ skup svih vrhova na udaljenosti i od x

Definicija

Neka je G povezan graf dijametra d. Za vrh x i broj $i \geq 0$, označimo s $N_i(x)$ skup svih vrhova na udaljenosti i od x

Kažemo da je G distancijsko regularan graf (DRG) ako brojevi

$$p_{ij}^k = |N_i(x) \cap N_j(y)|$$

ovise samo o indeksima i, j te o udaljenosti $\partial(x, y) = k$, a ne o izboru vrhova x i y. To su takozvani presječni brojevi DRG-a.

Definicija

Neka je G povezan graf dijametra d. Za vrh x i broj $i \geq 0$, označimo s $N_i(x)$ skup svih vrhova na udaljenosti i od x

Kažemo da je G distancijsko regularan graf (DRG) ako brojevi

$$p_{ij}^k = |N_i(x) \cap N_j(y)|$$

ovise samo o indeksima i, j te o udaljenosti $\partial(x, y) = k$, a ne o izboru vrhova x i y. To su takozvani presječni brojevi DRG-a.

Slabiji uvjet: G je regularan stupnja $\Bbbk$ i za vrhove na udaljenosti $\partial(x, y) = k$ brojevi $b_k = |N_{k+1}(x) \cap N_1(y)| = p_{k+1,1}^k$ i $c_k = |N_{k-1}(x) \cap N_1(y)| = p_{k-1,1}^k$ ne ovise o izboru vrhova x i y.

Definicija

Neka je G povezan graf dijametra d. Za vrh x i broj $i \geq 0$, označimo s $N_i(x)$ skup svih vrhova na udaljenosti i od x

Kažemo da je G distancijsko regularan graf (DRG) ako brojevi

$$p_{ij}^k = |N_i(x) \cap N_j(y)|$$

ovise samo o indeksima i, j te o udaljenosti $\partial(x,y) = k$, a ne o izboru vrhova x i y. To su takozvani presječni brojevi DRG-a.

Slabiji uvjet: G je regularan stupnja $\Bbbk$ i za vrhove na udaljenosti $\partial(x,y) = k$ brojevi $b_k = |N_{k+1}(x) \cap N_1(y)| = p_{k+1,1}^k$ i $c_k = |N_{k-1}(x) \cap N_1(y)| = p_{k-1,1}^k$ ne ovise o izboru vrhova x i y.

Tada su $a_k = |N_k(x) \cap N_1(y)| = p_{k,1}^k = \Bbbk - b_k - c_k$ i svi ostali presječni brojevi također konstantni.

Definicija

Neka je G povezan graf dijametra d. Za vrh x i broj $i \geq 0$, označimo s $N_i(x)$ skup svih vrhova na udaljenosti i od x

Kažemo da je G distancijsko regularan graf (DRG) ako brojevi

$$p_{ij}^k = |N_i(x) \cap N_j(y)|$$

ovise samo o indeksima i, j te o udaljenosti $\partial(x,y) = k$, a ne o izboru vrhova x i y. To su takozvani presječni brojevi DRG-a.

Slabiji uvjet: G je regularan stupnja $\Bbbk$ i za vrhove na udaljenosti $\partial(x,y) = k$ brojevi $b_k = |N_{k+1}(x) \cap N_1(y)| = p_{k+1,1}^k$ i $c_k = |N_{k-1}(x) \cap N_1(y)| = p_{k-1,1}^k$ ne ovise o izboru vrhova x i y.

Tada su $a_k = |N_k(x) \cap N_1(y)| = p_{k,1}^k = \Bbbk - b_k - c_k$ i svi ostali presječni brojevi također konstantni.

$(b_0, b_1, \ldots, b_{d-1};\ c_1, c_2, \ldots, c_d)$ je presječni niz DRG-a.

Distancijsko regularni grafovi

Teorem.

Povezan graf je jako regularan ako i samo ako je distancijsko regularan dijametra $d = 2$. Parametri $SRG(n, k, \lambda, \mu)$ odgovaraju presječnom nizu $(k, k - \lambda - 1; 1, \mu)$.

Distancijsko regularni grafovi

Teorem.

Povezan graf je jako regularan ako i samo ako je distancijsko regularan dijametra $d = 2$. Parametri $SRG(n, k, \lambda, \mu)$ odgovaraju presječnom nizu $(k, k - \lambda - 1; 1, \mu)$.

Teorem.

(a) Brojevi $k_i = |N_i(x)|$ ne ovise o izboru vrha x i vrijedi $k_0 = 1$, $k_1 = k$, $k_{i+1} = k_i b_i / c_{i+1}$, za $i = 0, \ldots, d - 1$.

(b) Ukupan broj vrhova grafa je $n = 1 + k_1 + \ldots + k_d$.

(c) $1 = c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_d$.

(d) $k = b_0 > b_1 \geq \cdots \geq b_{d-1}$.

(e) $c_0 = b_d = 0$.

(f) Ako je $i + j \leq d$, onda je $c_i \leq b_j$.

Distancijsko regularni grafovi

Teorem.

Vrijedi $p^k_{0j} = \delta_{jk}$, $p^k_{i0} = \delta_{ik}$ i

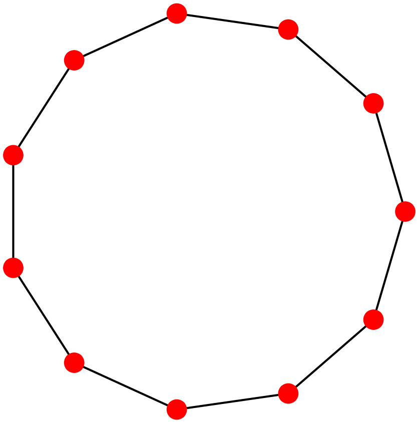
$$p^k_{1j} = \begin{cases} c_k, & \text{za } j = k-1, \\ a_k, & \text{za } j = k, \\ b_k, & \text{za } j = k+1, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Uz to vrijedi rekurzija

$$p^k_{i+1,j} = \frac{1}{c_{i+1}} \left(p^k_{i,j-1} b_{j-1} + p^k_{i,j}(a_j - a_i) + p^k_{i,j+1} c_{j+1} - p^k_{i-1,j} b_{i-1} \right)$$

Distancijsko regularni grafovi

Primjer. Poligon (n-terokut) je DRG dijametra $d = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ s presječnim nizom $(2, 1, \ldots, 1;\ 1, \ldots, 1, c_d)$, gdje je $c_d = 2$ za parni n i $c_d = 1$ za neparni n



Distancijsko regularni grafovi

Generalizirani poligoni su klasa incidencijskih struktura s analognim svojstvom kao parcijalne geometrije: graf točaka je distancijsko regularan.

J. Tits, *Sur la trialité et certains groupes qui s'en déduisent*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1959), no. 2, 13–60.

Generalizirani poligoni su klasa incidencijskih struktura s analognim svojstvom kao parcijalne geometrije: graf točaka je distancijsko regularan.

J. Tits, *Sur la trialité et certains groupes qui s'en déduisent*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1959), no. 2, 13–60.

Po Feit-Higmanovu teoremu, moguće su samo vrijednosti $n \in \{2, 3, 4, 6, 8\}$ i dijametar odgovarajućih DRG-ova je omeđen.

W. Feit, G. Higman, *The nonexistence of certain generalized polygons*, J. Algebra **1** (1964), 114–131.

Distancijsko regularni grafovi

Generalizirani poligoni su klasa incidencijskih struktura s analognim svojstvom kao parcijalne geometrije: graf točaka je distancijsko regularan.

J. Tits, *Sur la trialité et certains groupes qui s'en déduisent*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1959), no. 2, 13–60.

Po Feit-Higmanovu teoremu, moguće su samo vrijednosti $n \in \{2, 3, 4, 6, 8\}$ i dijametar odgovarajućih DRG-ova je omeđen.

W. Feit, G. Higman, *The nonexistence of certain generalized polygons*, J. Algebra **1** (1964), 114–131.

$n = 2 \rightsquigarrow$ potpuni bipartitni grafovi

$n = 3 \rightsquigarrow$ projektivne ravnine

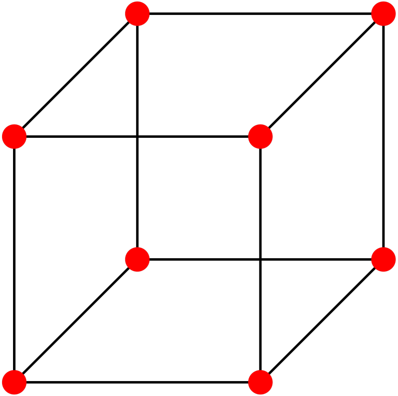
$n = 4 \rightsquigarrow$ generalizirani četverokuti $\iff pg(s, t, 1) \rightsquigarrow$ SRG $(d = 2)$

$n = 6 \rightsquigarrow$ generalizirani šesterokuti $\rightsquigarrow$ DRG s $d = 3$

$n = 8 \rightsquigarrow$ generalizirani osmerokuti $\rightsquigarrow$ DRG s $d = 4$

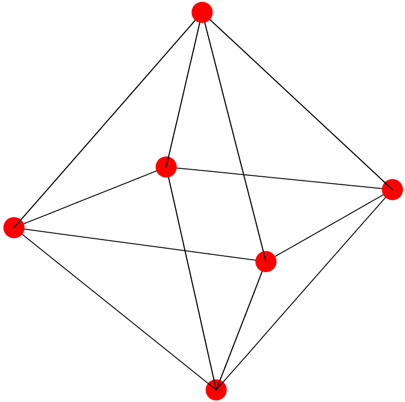
Distancijsko regularni grafovi

Primjer. Graf kocke je DRG dijametra $d = 3$ s presječnim nizom $(3, 2, 1; 1, 2, 3)$



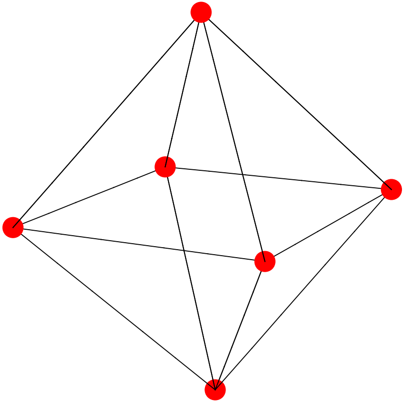
Distancijsko regularni grafovi

Primjer. Graf oktaedra je DRG dijametra $d = 2$ s presječnim nizom $(4, 1;\ 1, 4)$



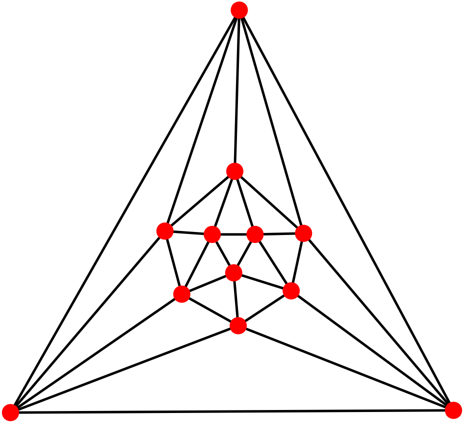
Primjer. Graf oktaedra je DRG dijametra $d = 2$ s presječnim nizom $(4, 1;\ 1, 4)$

$\iff$ $SRG(6, 4, 2, 4)$



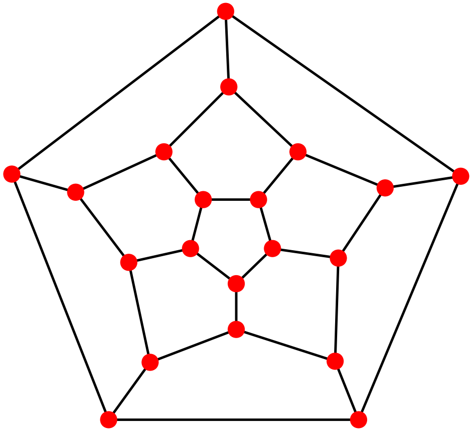
Distancijsko regularni grafovi

Primjer. Ikosaedar je DRG dijametra $d = 3$ s presječnim nizom $(5, 2, 1; 1, 2, 5)$

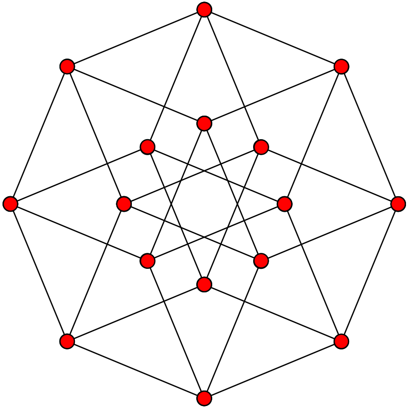


Distancijsko regularni grafovi

Primjer. Dodekaedar je DRG dijametra $d = 5$ s nizom $(3, 2, 1, 1, 1;\ 1, 1, 1, 2, 3)$



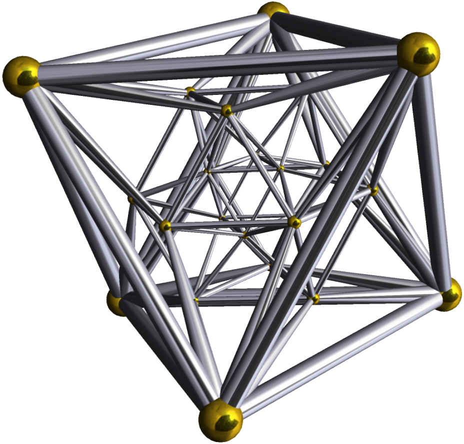
Primjer. d-dimenzionalna hiperkocka je DRG dijametra d s presječnim nizom $(d, d-1, \ldots, 3, 2, 1;\ 1, 2, 3, \ldots, d-1, d)$



$d = 4$

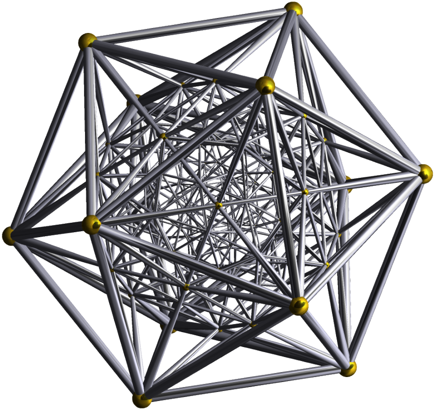
Distancijsko regularni grafovi

Primjer. Oktapleks, tetrapleks i dodekapleks **nisu** distancijsko regularni!

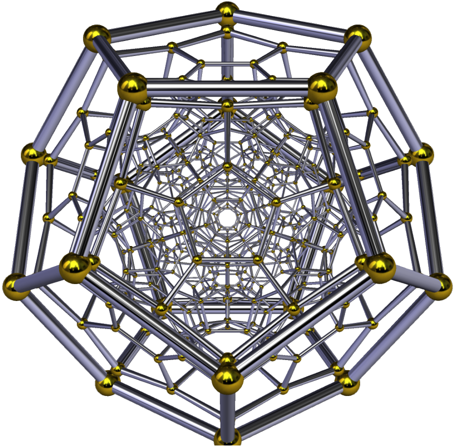


Distancijsko regularni grafovi

Primjer. Oktapleks, tetrapleks i dodekapleks **nisu** distancijsko regularni!



Primjer. Oktapleks, tetrapleks i dodekapleks **nisu** distancijsko regularni!



Povijest

N. Biggs, *Finite groups of automorphisms*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **6**, Cambridge University Press, 1971.

Definicija.

Graf G je distancijsko tranzitivan ako za svaka dva para vrhova x, y i x', y' na istoj udaljenosti $\partial(x,y) = \partial(x',y')$ postoji automorfizam $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ takav da je $\alpha(x) = x'$ i $\alpha(y) = y'$.

Povijest

N. Biggs, *Finite groups of automorphisms*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **6**, Cambridge University Press, 1971.

Definicija.

Graf G je distancijsko tranzitivan ako za svaka dva para vrhova x, y i x', y' na istoj udaljenosti $\partial(x, y) = \partial(x', y')$ postoji automorfizam $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ takav da je $\alpha(x) = x'$ i $\alpha(y) = y'$.

N. Biggs, *Algebraic graph theory*, Cambridge Tracts in Math. No. **67**, Cambridge University Press, 1974.

Povijest

N. Biggs, *Finite groups of automorphisms*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **6**, Cambridge University Press, 1971.

Definicija.

Graf G je distancijsko tranzitivan ako za svaka dva para vrhova x, y i x', y' na istoj udaljenosti $\partial(x,y) = \partial(x',y')$ postoji automorfizam $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ takav da je $\alpha(x) = x'$ i $\alpha(y) = y'$.

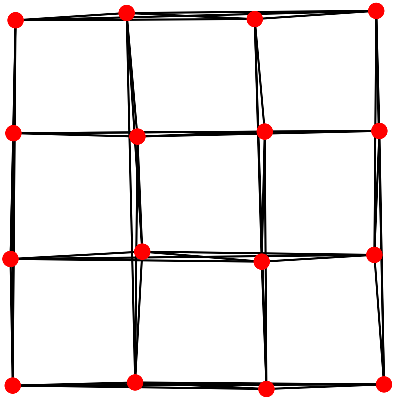
N. Biggs, *Algebraic graph theory*, Cambridge Tracts in Math. No. **67**, Cambridge University Press, 1974.

Propozicija.

Ako je G distancijsko tranzitivan, onda je distancijsko regularan.

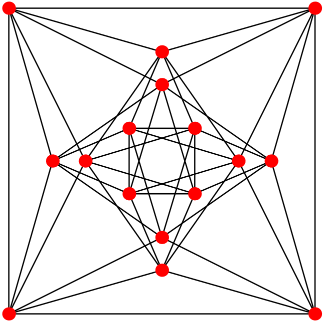
Povijest

Primjer. Topovski graf $SRG(16, 6, 2, 2)$: distancijsko regularan i distancijsko tranzitivan



Povijest

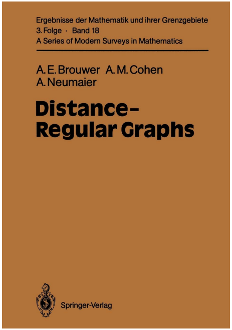
Primjer. Shrikhandeov graf $SRG(16,6,2,2)$: distancijsko regularan, ali **nije** distancijsko tranzitivan



S. S. Shrikhande, *The uniqueness of the L_2 association scheme*, Ann. Math. Statist. **30** (1959), 781–798.

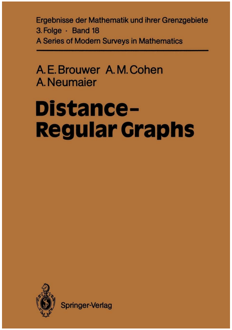
Povijest

A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-regular graphs*, Springer-Verlag, 1989.



Povijest

A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-regular graphs*, Springer-Verlag, 1989.



E. van Dam, J. H. Koolen, H. Tanaka, *Distance-regular graphs*, Electron. J. Combin. **DS22**, Dynamic Surveys (2016), 156 pp.

Neki novi rezultati

D. Crnković, N. Mostarac, A. Švob, *Distance-regular graphs and new block designs obtained from the Mathieu groups*, Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput. **35** (2024), no. 2, 177–194.

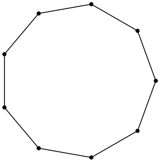
D. Crnković, S. Rukavina, A. Švob, *Self-orthogonal codes from equitable partitions of distance-regular graphs*, Adv. Math. Commun. **18** (2024), no. 3, 651–660.

Generalizacija 2: Asocijacijske sheme

Neka je G distancijsko regularan graf dijametra d sa skupom vrhova X.

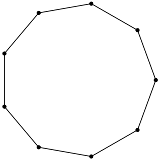
Generalizacija 2: Asocijacijske sheme

Neka je G distancijsko regularan graf dijametra d sa skupom vrhova X.



Generalizacija 2: Asocijacijske sheme

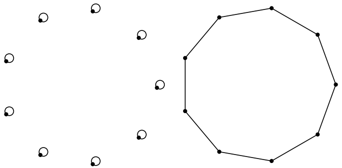
Neka je G distancijsko regularan graf dijametra d sa skupom vrhova X.



Za $k = 0, \ldots, d$, neka je G_k graf sa istim vrhovima u kojem su $x, y \in X$ susjedni ako i samo ako je $\partial(x, y) = k$.

Generalizacija 2: Asocijacijske sheme

Neka je G distancijsko regularan graf dijametra d sa skupom vrhova X.

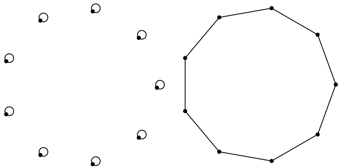


Za $k = 0, \ldots, d$, neka je G_k graf sa istim vrhovima u kojem su $x, y \in X$ susjedni ako i samo ako je $\partial(x, y) = k$.

G_0 sadrži samo petlje

Generalizacija 2: Asocijacijske sheme

Neka je G distancijsko regularan graf dijametra d sa skupom vrhova X.



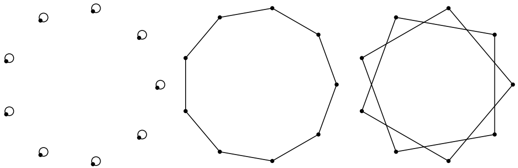
Za $k = 0, \ldots, d$, neka je G_k graf sa istim vrhovima u kojem su $x, y \in X$ susjedni ako i samo ako je $\partial(x, y) = k$.

G_0 sadrži samo petlje

$G_1 = G$

Generalizacija 2: Asocijacijske sheme

Neka je G distancijsko regularan graf dijametra d sa skupom vrhova X.



Za $k = 0, \ldots, d$, neka je G_k graf sa istim vrhovima u kojem su $x, y \in X$ susjedni ako i samo ako je $\partial(x, y) = k$.

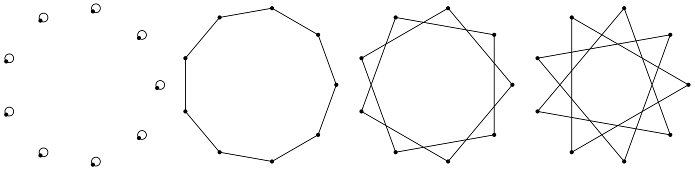
G_0 sadrži samo petlje

$G_1 = G$

G_2

Generalizacija 2: Asocijacijske sheme

Neka je G distancijsko regularan graf dijametra d sa skupom vrhova X.



Za $k = 0, \ldots, d$, neka je G_k graf sa istim vrhovima u kojem su $x, y \in X$ susjedni ako i samo ako je $\partial(x, y) = k$.

G_0 sadrži samo petlje

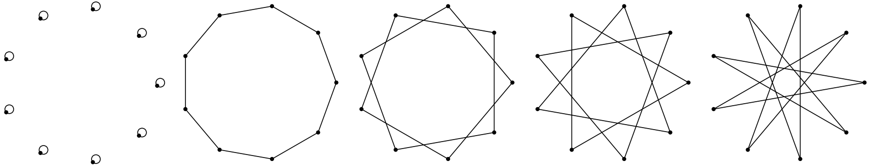
$G_1 = G$

G_2

G_3

Generalizacija 2: Asocijacijske sheme

Neka je G distancijsko regularan graf dijametra d sa skupom vrhova X.



Za $k = 0, \ldots, d$, neka je G_k graf sa istim vrhovima u kojem su $x, y \in X$ susjedni ako i samo ako je $\partial(x, y) = k$.

G_0 sadrži samo petlje

$G_1 = G$

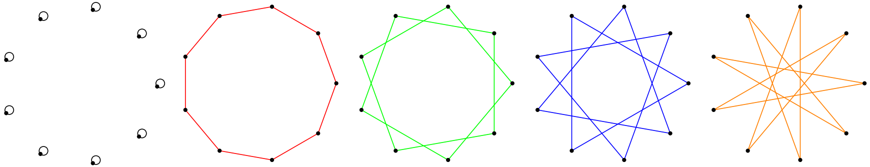
G_2

G_3

G_4

Generalizacija 2: Asocijacijske sheme

Neka je G distancijsko regularan graf dijametra d sa skupom vrhova X.



Za $k = 0, \ldots, d$, neka je G_k graf sa istim vrhovima u kojem su $x, y \in X$ susjedni ako i samo ako je $\partial(x, y) = k$.

G_0 sadrži samo petlje

$G_1 = G$

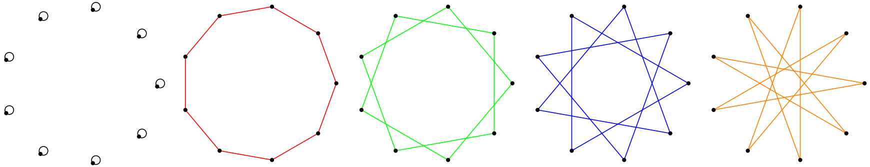
G_2

G_3

G_4

Generalizacija 2: Asocijacijske sheme

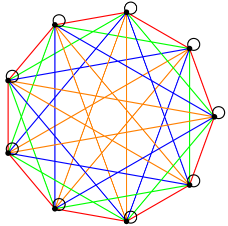
Neka je G distancijsko regularan graf dijametra d sa skupom vrhova X.



Za $k = 0, \ldots, d$, neka je G_k graf sa istim vrhovima u kojem su $x, y \in X$ susjedni ako i samo ako je $\partial(x, y) = k$.

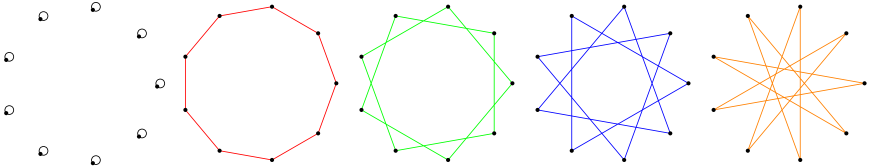
G_0 sadrži samo petlje

$$\left.\begin{array}{l} G_1 = G \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \end{array}\right\} \text{čine particiju od } K_n$$



Generalizacija 2: Asocijacijske sheme

Neka je G distancijsko regularan graf dijametra d sa skupom vrhova X.



Za $k = 0, \ldots, d$, neka je G_k graf sa istim vrhovima u kojem su $x, y \in X$ susjedni ako i samo ako je $\partial(x, y) = k$.

G_0 sadrži samo petlje

Neka su $x, y \in X$, $\partial(x, y) = k$.

$G_1 = G$

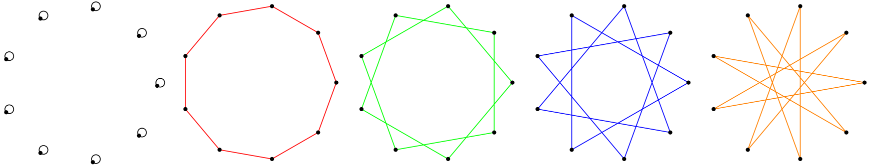
G_2

G_3

G_4

Generalizacija 2: Asocijacijske sheme

Neka je G distancijsko regularan graf dijametra d sa skupom vrhova X.



Za $k = 0, \ldots, d$, neka je G_k graf sa istim vrhovima u kojem su $x, y \in X$ susjedni ako i samo ako je $\partial(x, y) = k$.

G_0 sadrži samo petlje

$G_1 = G$

G_2

G_3

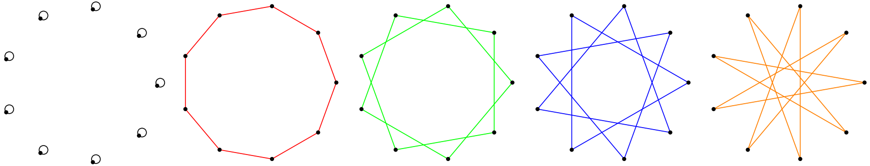
G_4

Neka su $x, y \in X$, $\partial(x, y) = k$.

$p_{ij}^k = |N_i(x) \cap N_j(y)|$

Generalizacija 2: Asocijacijske sheme

Neka je G distancijsko regularan graf dijametra d sa skupom vrhova X.



Za $k = 0, \ldots, d$, neka je G_k graf sa istim vrhovima u kojem su $x, y \in X$ susjedni ako i samo ako je $\partial(x, y) = k$.

G_0 sadrži samo petlje

$G_1 = G$

G_2

G_3

G_4

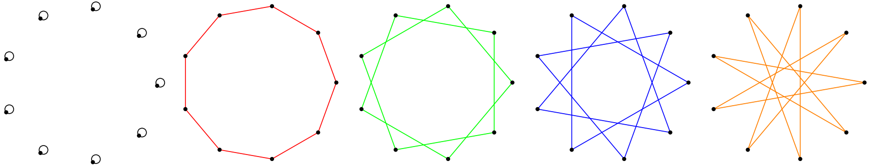
Neka su $x, y \in X$, $\partial(x, y) = k$.

$$p_{ij}^k = |N_i(x) \cap N_j(y)|$$

$=$ broj vrhova z takvih da je $\partial(x, z) = i$, a $\partial(z, y) = j$

Generalizacija 2: Asocijacijske sheme

Neka je G distancijsko regularan graf dijametra d sa skupom vrhova X.



Za $k = 0, \ldots, d$, neka je G_k graf sa istim vrhovima u kojem su $x, y \in X$ susjedni ako i samo ako je $\partial(x, y) = k$.

G_0 sadrži samo petlje

$G_1 = G$

G_2

G_3

G_4

Neka su $x, y \in X$, $\{x, y\}$ brid u G_k.

$$p_{ij}^k = |N_i(x) \cap N_j(y)|$$

$= $ broj vrhova z takvih da je $\{x, z\}$ brid u G_i, a $\{z, y\}$ brid u G_j

Definicija

Asocijacijska shema s d klasa sastoji se od grafova $G_0, G_1, \ldots, G_d$ sa zajedničkim n-članim skupom vrhova X takvih da vrijedi:

- G_0 je graf koji sadrži sve petlje i nema drugih bridova.

Definicija

Asocijacijska shema s d klasa sastoji se od grafova $G_0, G_1, \ldots, G_d$ sa zajedničkim n-članim skupom vrhova X takvih da vrijedi:

- G_0 je graf koji sadrži sve petlje i nema drugih bridova.
- $G_1, \ldots, G_d$ čine particiju potpunog grafa K_n.

Definicija

Asocijacijska shema s d klasa sastoji se od grafova $G_0, G_1, \ldots, G_d$ sa zajedničkim n-članim skupom vrhova X takvih da vrijedi:

- G_0 je graf koji sadrži sve petlje i nema drugih bridova.
- $G_1, \ldots, G_d$ čine particiju potpunog grafa K_n.
- Za svaki brid $\{x, y\}$ u G_k, broj vrhova z takvih da je $\{x, z\}$ brid u G_i, a $\{z, y\}$ brid u G_j ovisi samo o indeksima i, j, k. Označavamo ga p_{ij}^k i zovemo presječnim brojem sheme.

Definicija

Asocijacijska shema s d klasa sastoji se od grafova $G_0, G_1, \ldots, G_d$ sa zajedničkim n-članim skupom vrhova X takvih da vrijedi:

- G_0 je graf koji sadrži sve petlje i nema drugih bridova.
- $G_1, \ldots, G_d$ čine particiju potpunog grafa K_n.
- Za svaki brid $\{x, y\}$ u G_k, broj vrhova z takvih da je $\{x, z\}$ brid u G_i, a $\{z, y\}$ brid u G_j ovisi samo o indeksima i, j, k. Označavamo ga p_{ij}^k i zovemo presječnim brojem sheme.

Za vrhove x, y takve da je $\{x, y\}$ brid u G_i kažemo da su i-asocirani, a broj vrhova n zovemo redom sheme.

Definicija

Asocijacijska shema s d klasa sastoji se od grafova $G_0, G_1, \ldots, G_d$ sa zajedničkim n-članim skupom vrhova X takvih da vrijedi:

- G_0 je graf koji sadrži sve petlje i nema drugih bridova.
- $G_1, \ldots, G_d$ čine particiju potpunog grafa K_n.
- Za svaki brid $\{x, y\}$ u G_k, broj vrhova z takvih da je $\{x, z\}$ brid u G_i, a $\{z, y\}$ brid u G_j ovisi samo o indeksima i, j, k. Označavamo ga p_{ij}^k i zovemo presječnim brojem sheme.

Za vrhove x, y takve da je $\{x, y\}$ brid u G_i kažemo da su i-asocirani, a broj vrhova n zovemo redom sheme.

Grafovi koji čine asocijacijsku shemu su regularni: G_i je stupnja $n_i = p_{ii}^0$

Definicija

Asocijacijska shema s d klasa sastoji se od grafova $G_0, G_1, \ldots, G_d$ sa zajedničkim n-članim skupom vrhova X takvih da vrijedi:

- G_0 je graf koji sadrži sve petlje i nema drugih bridova.
- $G_1, \ldots, G_d$ čine particiju potpunog grafa K_n.
- Za svaki brid $\{x, y\}$ u G_k, broj vrhova z takvih da je $\{x, z\}$ brid u G_i, a $\{z, y\}$ brid u G_j ovisi samo o indeksima i, j, k. Označavamo ga p_{ij}^k i zovemo presječnim brojem sheme.

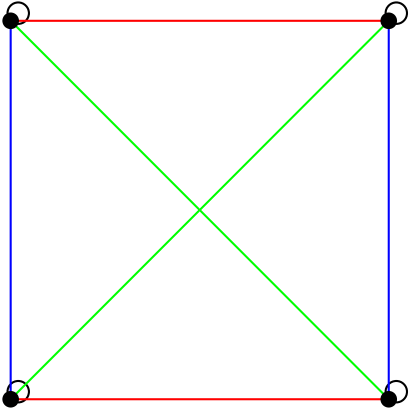
Za vrhove x, y takve da je $\{x, y\}$ brid u G_i kažemo da su i-asocirani, a broj vrhova n zovemo redom sheme.

Grafovi koji čine asocijacijsku shemu su regularni: G_i je stupnja $n_i = p_{ii}^0$

Distancijsko regularan graf G dijametra d daje asocijacijsku shemu s d klasa ako susjedstvo u G_k definiramo pomoću udaljenosti: $\partial(x, y) = k$. To su takozvane metričke ili P-polinomijalne sheme.

Asocijacijske sheme

Primjer. Asocijacijska shema koja nije metrička:



Asocijacijske sheme

Teorem.

Asocijacijska shema s dvije klase ekvivalentna je s parom međusobno komplementarnih jako regularnih grafova.

Asocijacijske sheme

Teorem.

Asocijacijska shema s dvije klase ekvivalentna je s parom međusobno komplementarnih jako regularnih grafova.

V. Krčadinac, *Asocijacijske sheme*, Sveučilište u Zagrebu, 2024.

https://web.math.pmf.unizg.hr/~krcko/nastava/asheme/

Statistika, 1950-e

R. C. Bose, T. Shimamoto, *Classification and analysis of partially balanced incomplete block designs with two associate classes*, J. Amer. Statist. Assoc. **47** (1952), 151–184.

R. C. Bose, D. M. Mesner, *On linear associative algebras corresponding to association schemes of partially balanced designs*, Ann. Math. Statist. **30** (1959), 21–38.

S. S. Shrikhande, *The uniqueness of the L_2 association scheme*, Ann. Math. Statist. **30** (1959), 781–798.

Povijest

Raj Chandra Bose

From Wikipedia, the free encyclopedia

Raj Chandra Bose (19 June 1901 – 31 October 1987) was an Indian American mathematician and statistician best known for his work in design theory, finite geometry and the theory of error-correcting codes in which the class of BCH codes is partly named after him. He also invented the notions of partial geometry, association scheme, and strongly regular graph and started a systematic study of difference sets to construct symmetric block designs. He was notable for his work along with S. S. Shrikhande and E. T. Parker in their disproof of the famous conjecture made by Leonhard Euler dated 1782 that there do not exist two mutually orthogonal Latin squares of order $4n + 2$ for every n.

Raj Chandra Bose

Izvor: https://en.wikipedia.org/wiki/Raj_Chandra_Bose

Povijest

Dale Marsh Mesner

April 13, 1923 ~
December 8, 2009

Resided in: **Pueblo, CO**

Dale Marsh Mesner, Professor of Mathematics. Dale first opened his eyes in a Nebraska farmhouse in 1923. Dale disliked farm work but loved numbers, read the entire dictionary and encyclopedia and won the Nebraska state spelling bee. In WWII, Dale, a Quaker, enlisted as a medic. He served in, of all places, Brazil, where he took X-rays of soldiers mustering out of the European war. Dale earned his PhD in mathematics from Michigan State University in 1956. Math was his deepest passion. He worked on the earliest computers, ones that filled an entire floor of a building. He did ground breaking research (google Bose-Mesner Algebra.) Dale taught at the University of Nebraska where he retired Professor Emeritus in 1990. He walked, talked, dreamt and researched mathematics until his final days. Dale also loved music and literature. He cared deeply for humanity and hated injustice. In 1948, he met and married Marian Woolcock, daughter of a Michigan auto worker. They served as Christian missionaries in Cuba, then raised a family stateside. He marched for Civil Rights and against the KKK in the 1960's. He opposed wars and nuclear weapons. He organized for the rights of Gays and Lesbians and in the 80's escorted women to Family Planning Clinics. All these concerns and loves he passed on to his children, Doug (Diane), Nancy (Chris Luecke), Mary (Terry Werner), Paul (David Luckens), Eric and foster son, Richard Stark. Dale has nine wonderful grandchildren. In 2008, Dale bravely survived massive cancer surgery and treatments. He and Marian moved to Pueblo in July 2009. He took good care of Marian who also has health problems. Three weeks ago he fell and broke four ribs. He closed his eyes December 8. Services will be 11 a.m. Monday, December 21, 2009, at the Unitarian Church in Lincoln, Neb. Online condolences, www.montgomerysteward.com

Izvor: https://www.montgomerysteward.com/obits/dale-marsh-mesner/

Povijest

Obituary: S.S. Shrikhande, 1917–2020

MAY 17, 2020

Shartchandra Shankar Shrikhande

Shartchandra Shankar Shrikhande, IMS Fellow and well known combinatorial mathematician, passed away on April 21 at his residence in India. He was 102.

S.S. Shrikhande was born in Sagar, India, on October 19, 1917. Having won scholarships, he was able to complete his BSc Honours at the Government College of Science (now known as the Institute of Science) in Nagpur with a first rank and a gold medal. He went on to receive his doctoral degree on Construction of Partially Balanced Designs from the University of North Carolina in 1950, under the supervision of Raj Chandra Bose. Prior to that, he was a Research Fellow at the Indian Statistical Institute. Professor Shrikhande, R.C. Bose and E. T. Parker jointly disproved Euler's 1782 conjecture that mutually orthogonal Latin squares cannot exist for orders of the form 4n+2 for any n. This was proved by Euler himself for n=0 and by Gaston Tarry in 1901 for n=1. The first analytical counterexample was found by Bose and Shrikhande in early 1959 for n=5. Later the same year, Bose, Shrikhande and Parker proved the general result that in fact such orthogonal squares exist for all orders 4n+2 except n=0,1. The trio were dubbed "Euler's Spoilers"—as reported in the front-page New York Times article on April 26, 1959.

Izvor: https://imstat.org/2020/05/17/obituary-s-s-shrikhande-1917-2020/

Povijest

Teorija grafova, 1970-e

N. Biggs, *Finite groups of automorphisms*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **6**, Cambridge University Press, 1971.

N. Biggs, *Algebraic graph theory*, Cambridge Tracts in Math. No. **67**, Cambridge University Press, 1974.

Povijest

Teorija grafova, 1970-e

N. Biggs, *Finite groups of automorphisms*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **6**, Cambridge University Press, 1971.

N. Biggs, *Algebraic graph theory*, Cambridge Tracts in Math. No. **67**, Cambridge University Press, 1974.

B. Weisfeiler, A. A. Leman, *Reduction of a graph to a canonical form and an algebra which appears in this process*, Scientific-Technological Investigations **2** (1968), 12–16.

I. A. Faradžev, M. H. Klin, M. E. Muzichuk, *Cellular rings and groups of automorphisms of graphs*, Investigations in algebraic theory of combinatorial objects, 1–152, Math. Appl. (Soviet Ser.), 84, Kluwer Acad. Publ., 1994.

$\rightsquigarrow$ “Celularni prsteni”

Povijest

Boris Weisfeiler

From Wikipedia, the free encyclopedia

Boris Weisfeiler (born 19 April 1941 – disappeared 4–5 January 1985)[1] was a Soviet-born mathematician and professor at Penn State University who lived in the United States before disappearing in Chile in 1985. Declassified US documents suggest a Chilean army patrol seized Weisfeiler and took him to Colonia Dignidad, a secretive Germanic agricultural commune set up in Chile in the 1960s.[2] During the Chilean Pinochet military dictatorship Boris Weisfeiler allegedly drowned. He is known for the Weisfeiler filtration, Weisfeiler–Leman algorithm and Kac–Weisfeiler conjectures.

Boris Yulievich Weisfeiler	
Born	April 19, 1941 Moscow, Russian SFSR, Soviet Union
Disappeared	January 1985 San Fabián de Alico, Chile
Status	Missing for 38 years, 9 months and 30 days
Nationality	American
Alma mater	Steklov Institute of Mathematics (Ph.D.)
Known for	Weisfeiler–Leman algorithm Weisfeiler filtration Kac–Weisfeiler conjectures
Scientific career	
Fields	Mathematics
Institutions	Pennsylvania State University

Early life and career [edit]

Weisfeiler, a Jew, was born in the Soviet Union. He received his Ph.D. in 1970 from the Steklov Institute of Mathematics Leningrad Department, as a student of Ernest Vinberg.[3] In the early 1970s, Weisfeiler was asked to sign a letter against a colleague, and for his refusal was branded "anti-Soviet". Weisfeiler left the Soviet Union in 1975 to be free to advance his career and practice his religion. After a brief period under Armand Borel at the Institute for Advanced Study, near Princeton University, Weisfeiler became a professor at Pennsylvania State University. In 1981, he was naturalized as an American citizen.

1981, he was naturalized as an American citizen.

Institutions Pennsylvania State University

Izvor: https://en.wikipedia.org/wiki/Boris_Weisfeiler

Povijest

MISSING IN CHILE

MATHEMATICS PROFESSOR BORIS WEISFEILER HAS BEEN MISSING IN CHILE SINCE JANUARY 4, 1985

DID YOU SEE THIS MAN?

¿Ha visto a este hombre?
Did you see this man?

With information please contact: Brigada Investigadora de Asuntos Especiales y de Derechos Humanos (56-2) 5657475 or the FBI Attaché at the U.S. Embassy in Santiago, Chile at (56-2) 330-3396

ABOUT BORIS

Boris Weisfeiler: la obra imperecedera del matemático desaparecido en Chile en 1985
El Mostrador, March 30, 2016

SEARCHING FOR BORIS WEISFEILER: SEQUENCE OF EVENTS

2023.THE SUPREME COURT TO HEAR THE ARGUMENTS

On May 4, 2023, more than 3 years after our appeal was filed, the Second Chamber of the Supreme Court heard Boris's case. Hernan Fernandez, the Weisfeiler family's attorney, Joaquin Perera from the Human Rights Program, and Ricardo Gonzales from the State Defense Council made their cases before the Second Chamber. Joaquín Perera presented his arguments first, followed by Hernán Fernandez, and Ricardo González closed.

On the second day of the hearing on May 5, two defense attorneys representing military members involved in Boris's kidnapping and disappearance presented their arguments. No defense attorney represented the four Carabineros involved in the case.

It could take months before the Court's decision will be announced.

LATEST DEVELOPMENTS

The Supreme Court to hear the arguments
YouTube, May 4-5, 2023, Santiago, Chile (in Spanish)

U.S. Ambassador to Chile Bernadette Meehan's **Zoom meeting** with Olga Weisfeiler
Chile-US, March 10, 2023

The book **Boris, 1985** by Douna Loop
France, January 2023
Available for purchase **here** (in French)
The book sample **translated into English**

Commemorating 80th birthday of Boris Weisfeiler / Commemoración 80 años Boris Weisfeiler
YouTube, April 19, 2021, Santiago, Chile
(in English and Spanish)
Speakers: Attorney Hernan Fernandez, Olga Weisfeiler, Math Prof. Andres Navas, Martin Grohe, Igor Dolgachev

A short video/Testimonial/ Olga Weisfeiler
Vimeo.com /by Marella Oppenheim, October 13, 2019

Excavations at Chile torture site offer new hope for relatives of disappeared
The Guardian, US, May 2, 2018

Missing in Chile: What happened to Boris Weisfeiler?
BBC, April 10, 2016

Chile Halts Inquiry on American Who Disappeared 31 Years Ago
The New York Times, March 10, 2016

Izvor: http://boris.weisfeiler.com/

Povijest

Algebra, istraživanja permutacijskih grupa

I. Schur, *Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen*, S.B. Preuss. Akad. Wiss. (1933), 598–623.

H. Wielandt, *Finite permutation groups*, Academic Press, 1964.

Povijest

Algebra, istraživanja permutacijskih grupa

I. Schur, *Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen*, S.B. Preuss. Akad. Wiss. (1933), 598–623.

H. Wielandt, *Finite permutation groups*, Academic Press, 1964.

C. C. Sims, *Graphs and finite permutation groups*, Math. Z. **95** (1967), 76–86.

D. G. Higman, *Coherent configurations. I. Ordinary representation theory*, Geometriae Dedicata **4** (1975), no. 1, 1–32.

D. G. Higman, *Coherent configurations. II. Weights*, Geometriae Dedicata **5** (1976), no. 4, 413–424.

$\rightsquigarrow$ "Koherentne konfiguracije", "teorija grupa bez grupa"

Povijest

Donald G. Higman

From Wikipedia, the free encyclopedia

Not to be confused with Graham Higman.

Donald G. Higman (September 20, 1928 in Vancouver – February 13, 2006) was an American mathematician known for his discovery, in collaboration with Charles C. Sims, of the Higman–Sims group.[1]

Higman did his undergraduate studies at the University of British Columbia,[1] and received his Ph.D. in 1952 from the University of Illinois Urbana-Champaign under Reinhold Baer.[2] He served on the faculty of mathematics at the University of Michigan from 1956 to 1998.[1]

His work on homological aspects of group representation theory established the concept of a relatively projective module and explained its role in the theory of module decompositions. He developed a characterization of rank-2 permutation groups, and a theory of rank-3 permutation groups; several of the later-discovered sporadic simple groups were of this type, including the Higman–Sims group which he and Sims constructed in 1967.[1]

Izvor: `https://en.wikipedia.org/wiki/Donald_G._Higman`

Povijest

Graham Higman

From Wikipedia, the free encyclopedia

Not to be confused with Donald G. Higman.

Graham Higman FRS[1] (19 January 1917 – 8 April 2008) was a prominent English mathematician known for his contributions to group theory.

Biography [edit]

Higman was born in Louth, Lincolnshire, and attended Sutton High School, Plymouth, winning a scholarship to Balliol College, Oxford.[2] In 1939 he co-founded The Invariant Society, the student mathematics society,[3] and earned his DPhil from the University of Oxford in 1941. His thesis, *The units of group-rings*, was written under the direction of J. H. C. Whitehead. From 1960 to 1984 he was the Waynflete Professor of Pure Mathematics at Magdalen College, Oxford.

Higman was awarded the Senior Berwick Prize in 1962 and the De Morgan Medal of the London Mathematical Society in 1974. He was the founder of the Journal of Algebra and its editor from 1964 to 1984. Higman had 51 D.Phil. students, including Jonathan Lazare Alperin, Rosemary A. Bailey, Marston Conder, John Mackintosh Howie, and Peter M. Neumann.

He was also a local preacher in the Oxford Circuit of the Methodist Church. During the Second World War he was a conscientious objector, working at the Meteorological Office in Northern Ireland and Gibraltar.

He died in Oxford.[2]

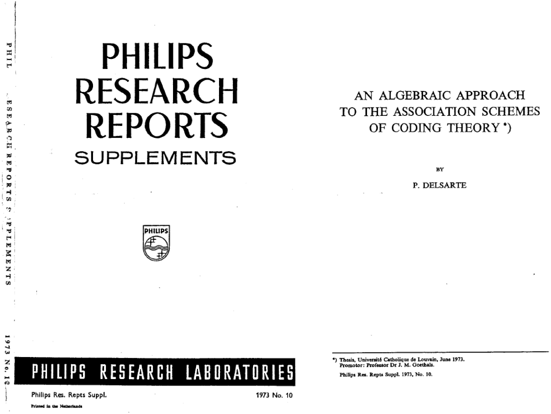
Graham Higman

Born	Graham Higman 19 January 1917 Louth, Lincolnshire, England
Died	8 April 2008 (aged 91) Oxford, England

Izvor: https://en.wikipedia.org/wiki/Graham_Higman

Disertacija Philippe Delsartea, 1973.

P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. 1973, no. 10, vi+97 pp.


PHILIPS RESEARCH REPORTS SUPPLEMENTS

PHILIPS RESEARCH LABORATORIES

Philips Res. Repts Suppl. 1973 No. 10

Printed in the Netherlands

AN ALGEBRAIC APPROACH TO THE ASSOCIATION SCHEMES OF CODING THEORY *)

BY

P. DELSARTE

*) Thesis, Université Catholique de Louvain, June 1973. Promotor: Professor Dr J. M. Goethals.
Philips Res. Repts Suppl. 1973, No. 10.

Generalizacija 3: Koherentne konfiguracije

Schurova konstrukcija

Neka je $G \leq \mathrm{Sym}(X)$ tranzitivna permutacijska grupa na n-članom skupu X. Neka su $R_0, R_1, \ldots, R_d$ orbite pri djelovanju G na Kartezijev produkt $X \times X$.

Generalizacija 3: Koherentne konfiguracije

Schurova konstrukcija

Neka je $G \leq \mathrm{Sym}(X)$ tranzitivna permutacijska grupa na n-članom skupu X. Neka su $R_0, R_1, \ldots, R_d$ orbite pri djelovanju G na Kartezijev produkt $X \times X$.

- Možemo pretpostaviti da je $R_0 = \{(x, x) \mid x \in X\}$ "dijagonala"

Generalizacija 3: Koherentne konfiguracije

Schurova konstrukcija

Neka je $G \leq \mathrm{Sym}(X)$ tranzitivna permutacijska grupa na n-članom skupu X. Neka su $R_0, R_1, \ldots, R_d$ orbite pri djelovanju G na Kartezijev produkt $X \times X$.

- Možemo pretpostaviti da je $R_0 = \{(x, x) \mid x \in X\}$ "dijagonala"
- $R_0, R_1, \ldots, R_d$ čine particiju od $X \times X$

Generalizacija 3: Koherentne konfiguracije

Schurova konstrukcija

Neka je $G \leq \mathrm{Sym}(X)$ tranzitivna permutacijska grupa na n-članom skupu X. Neka su $R_0, R_1, \ldots, R_d$ orbite pri djelovanju G na Kartezijev produkt $X \times X$.

- Možemo pretpostaviti da je $R_0 = \{(x, x) \mid x \in X\}$ “dijagonala”
- $R_0, R_1, \ldots, R_d$ čine particiju od $X \times X$
- Postoje konstante p_{ij}^k takve da je za svaki par $(x, y) \in R_k$ broj vrhova z sa $(x, z) \in R_i$ i $(z, y) \in R_j$ jednak p_{ij}^k

Generalizacija 3: Koherentne konfiguracije

Schurova konstrukcija

Neka je $G \leq \mathrm{Sym}(X)$ tranzitivna permutacijska grupa na n-članom skupu X. Neka su $R_0, R_1, \ldots, R_d$ orbite pri djelovanju G na Kartezijev produkt $X \times X$.

- Možemo pretpostaviti da je $R_0 = \{(x,x) \mid x \in X\}$ "dijagonala"
- $R_0, R_1, \ldots, R_d$ čine particiju od $X \times X$
- Postoje konstante p_{ij}^k takve da je za svaki par $(x,y) \in R_k$ broj vrhova z sa $(x,z) \in R_i$ i $(z,y) \in R_j$ jednak p_{ij}^k

Nedostaje simetričnost!

Generalizacija 3: Koherentne konfiguracije

Schurova konstrukcija

Neka je $G \leq \mathrm{Sym}(X)$ tranzitivna permutacijska grupa na n-članom skupu X. Neka su $R_0, R_1, \ldots, R_d$ orbite pri djelovanju G na Kartezijev produkt $X \times X$.

- Možemo pretpostaviti da je $R_0 = \{(x,x) \mid x \in X\}$ "dijagonala"
- $R_0, R_1, \ldots, R_d$ čine particiju od $X \times X$
- Postoje konstante p_{ij}^k takve da je za svaki par $(x,y) \in R_k$ broj vrhova z sa $(x,z) \in R_i$ i $(z,y) \in R_j$ jednak p_{ij}^k

Nedostaje simetričnost!

Primjer. $X = \{1,2,3\}$, $G = \langle (1\ \ 2\ \ 3) \rangle$

$$R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Generalizacija 3: Koherentne konfiguracije

Klase konjugacije konačne grupe

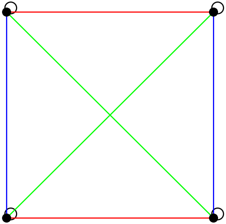
Neka je G grupa reda n, a $C_0 = \{1\}, C_1, \ldots, C_d$ njezine klase konjugacije. Tada relacije $R_i = \{(x, y) \in G \mid y^{-1}x \in C_i\}$, $i = 0, \ldots, d$ imaju ista svojstva (R_0 je dijagonala, relacije čine particiju $G \times G$, postoje presječni brojevi).

Generalizacija 3: Koherentne konfiguracije

Klase konjugacije konačne grupe

Neka je G grupa reda n, a $C_0 = \{1\}, C_1, \ldots, C_d$ njezine klase konjugacije. Tada relacije $R_i = \{(x, y) \in G \mid y^{-1}x \in C_i\}$, $i = 0, \ldots, d$ imaju ista svojstva (R_0 je dijagonala, relacije čine particiju $G \times G$, postoje presječni brojevi).

Primjer. $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

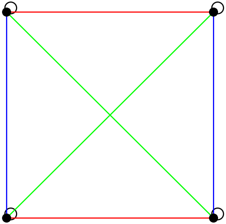


Generalizacija 3: Koherentne konfiguracije

Klase konjugacije konačne grupe

Neka je G grupa reda n, a $C_0 = \{1\}, C_1, \ldots, C_d$ njezine klase konjugacije. Tada relacije $R_i = \{(x,y) \in G \mid y^{-1}x \in C_i\}$, $i = 0, \ldots, d$ imaju ista svojstva (R_0 je dijagonala, relacije čine particiju $G \times G$, postoje presječni brojevi).

Primjer. $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$



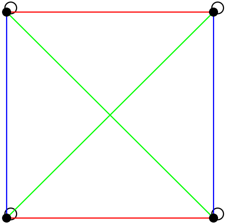
U ovom primjeru relacije su simetrične, ali to ne vrijedi općenito

Generalizacija 3: Koherentne konfiguracije

Klase konjugacije konačne grupe

Neka je G grupa reda n, a $C_0 = \{1\}, C_1, \ldots, C_d$ njezine klase konjugacije. Tada relacije $R_i = \{(x, y) \in G \mid y^{-1}x \in C_i\}$, $i = 0, \ldots, d$ imaju ista svojstva (R_0 je dijagonala, relacije čine particiju $G \times G$, postoje presječni brojevi).

Primjer. $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$



U ovom primjeru relacije su simetrične, ali to ne vrijedi općenito (nego samo za tzv. ambivalentne grupe kojima su klase konjugacije zatvorene na invertiranje)

Definicija

Koherentna konfiguracija reda n s d klasa sastoji se od n-članog skupa vrhova X i relacija $R_0, \ldots, R_d \subseteq X \times X$ takvih da vrijedi:

1. $R_0 = \{(x,x) \mid x \in X\}$ je "dijagonala"
2. $R_0, \ldots, R_d$ čine particiju od $X \times X$
3. za svaki indeks i postoji indeks i' takav da je $R_i^T = R_{i'}$
4. za sve indekse i, j, k postoje presječni brojevi $p_{ij}^k \in \mathbb{N}_0$ takvi da je $|\{z \in X \mid (x,z) \in R_i,\ (z,y) \in R_j\}| = p_{ij}^k$ za sve $(x,y) \in R_k$

Definicija

Koherentna konfiguracija reda n s d klasa sastoji se od n-članog skupa vrhova X i relacija $R_0, \ldots, R_d \subseteq X \times X$ takvih da vrijedi:

1. $R_0 = \{(x,x) \mid x \in X\}$ je "dijagonala"
2. $R_0, \ldots, R_d$ čine particiju od $X \times X$
3. za svaki indeks i postoji indeks i' takav da je $R_i^T = R_{i'}$
4. za sve indekse i, j, k postoje presječni brojevi $p_{ij}^k \in \mathbb{N}_0$ takvi da je $|\{z \in X \mid (x,z) \in R_i,\ (z,y) \in R_j\}| = p_{ij}^k$ za sve $(x,y) \in R_k$

Ako su relacije simetrične, tj. u 3. svojstvu uvijek vrijedi $i = i'$, onda imamo asocijacijsku shemu.

Definicija

Koherentna konfiguracija reda n s d klasa sastoji se od n-članog skupa vrhova X i relacija $R_0, \ldots, R_d \subseteq X \times X$ takvih da vrijedi:

1. $R_0 = \{(x,x) \mid x \in X\}$ je "dijagonala"
2. $R_0, \ldots, R_d$ čine particiju od $X \times X$
3. za svaki indeks i postoji indeks i' takav da je $R_i^T = R_{i'}$
4. za sve indekse i, j, k postoje presječni brojevi $p_{ij}^k \in \mathbb{N}_0$ takvi da je $|\{z \in X \mid (x,z) \in R_i,\, (z,y) \in R_j\}| = p_{ij}^k$ za sve $(x,y) \in R_k$

Ako su relacije simetrične, tj. u 3. svojstvu uvijek vrijedi $i = i'$, onda imamo asocijacijsku shemu. Ako presječni brojevi zadovoljavaju $p_{ij}^k = p_{ji}^k$ za svaki izbor indeksa, kažemo da je koherentna konfiguracija komutativna.

Definicija

Koherentna konfiguracija reda n s d klasa sastoji se od n-članog skupa vrhova X i relacija $R_0, \ldots, R_d \subseteq X \times X$ takvih da vrijedi:

1. $R_0 = \{(x,x) \mid x \in X\}$ je "dijagonala"
2. $R_0, \ldots, R_d$ čine particiju od $X \times X$
3. za svaki indeks i postoji indeks i' takav da je $R_i^T = R_{i'}$
4. za sve indekse i, j, k postoje presječni brojevi $p_{ij}^k \in \mathbb{N}_0$ takvi da je $|\{z \in X \mid (x,z) \in R_i,\, (z,y) \in R_j\}| = p_{ij}^k$ za sve $(x,y) \in R_k$

Ako su relacije simetrične, tj. u 3. svojstvu uvijek vrijedi $i = i'$, onda imamo asocijacijsku shemu. Ako presječni brojevi zadovoljavaju $p_{ij}^k = p_{ji}^k$ za svaki izbor indeksa, kažemo da je koherentna konfiguracija komutativna.

Klase konjugacije grupe uvijek daju komutativnu koherentnu konfiguraciju, a Schurovom konstrukcijom možemo dobiti nekomutativne.

Definicija

Koherentna konfiguracija reda n s d klasa sastoji se od n-članog skupa vrhova X i relacija $R_0, \ldots, R_d \subseteq X \times X$ takvih da vrijedi:

1. $R_0 = \{(x,x) \mid x \in X\}$ je "dijagonala"
2. $R_0, \ldots, R_d$ čine particiju od $X \times X$
3. za svaki indeks i postoji indeks i' takav da je $R_i^T = R_{i'}$
4. za sve indekse i, j, k postoje presječni brojevi $p_{ij}^k \in \mathbb{N}_0$ takvi da je $|\{z \in X \mid (x,z) \in R_i,\, (z,y) \in R_j\}| = p_{ij}^k$ za sve $(x,y) \in R_k$

Ako su relacije simetrične, tj. u 3. svojstvu uvijek vrijedi $i = i'$, onda imamo asocijacijsku shemu. Ako presječni brojevi zadovoljavaju $p_{ij}^k = p_{ji}^k$ za svaki izbor indeksa, kažemo da je koherentna konfiguracija komutativna.

Klase konjugacije grupe uvijek daju komutativnu koherentnu konfiguraciju, a Schurovom konstrukcijom možemo dobiti nekomutativne. Schurove koherentne konfiguracije su one koje nastaju Schurovom konstrukcijom od neke permutacijske grupe (primjer ne-Schurove: Shrikhandeov SRG).

Knjige

E. Bannai, T. Ito, *Algebraic combinatorics. I. Association schemes*, The Benjamin/Cummings Publishing Co., 1984.

E. Bannai, E. Bannai, T. Ito, R. Tanaka, *Algebraic combinatorics*, De Gruyter, 2021.

Knjige

E. Bannai, T. Ito, *Algebraic combinatorics. I. Association schemes*, The Benjamin/Cummings Publishing Co., 1984.

E. Bannai, E. Bannai, T. Ito, R. Tanaka, *Algebraic combinatorics*, De Gruyter, 2021.

R. A. Bailey, *Association schemes. Designed experiments, algebra and combinatorics*, Cambridge University Press, 2004.

P.-H. Zieschang, *Theory of association schemes*, Springer-Verlag, 2005.

Knjige

E. Bannai, T. Ito, *Algebraic combinatorics. I. Association schemes*, The Benjamin/Cummings Publishing Co., 1984.

E. Bannai, E. Bannai, T. Ito, R. Tanaka, *Algebraic combinatorics*, De Gruyter, 2021.

R. A. Bailey, *Association schemes. Designed experiments, algebra and combinatorics*, Cambridge University Press, 2004.

P.-H. Zieschang, *Theory of association schemes*, Springer-Verlag, 2005.

C. Godsil, *Association schemes*, University of Waterloo, 2010.
https://www.math.uwaterloo.ca/~cgodsil/pdfs/assoc2.pdf

G. Chen, I. Ponomarenko, *Lectures on coherent configurations*, 2018.
http://www.pdmi.ras.ru/~inp/ccNOTES.pdf

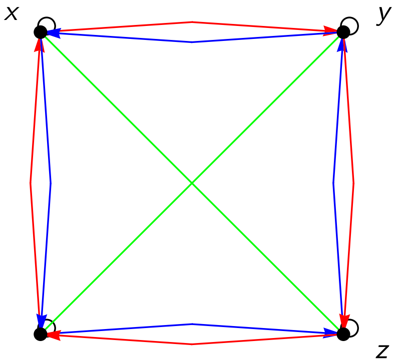
P. Terwilliger, *Algebraic Combinatorics: Association Schemes*, 2023.
https://people.math.wisc.edu/~pmterwil/Htmlfiles/asAll.pdf

. . . **analogoni** jako regularnih grafova

Što je analogija i je li "analogon" ispravna riječ?

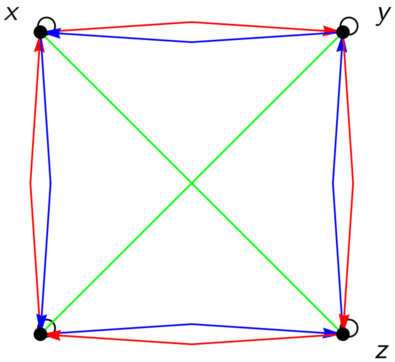
Što je analogija i je li "analogon" ispravna riječ?

Primjer. Schurova konstrukcija od grupe $G = \langle (1\ 2\ 3\ 4) \rangle$:



Što je analogija i je li "analogon" ispravna riječ?

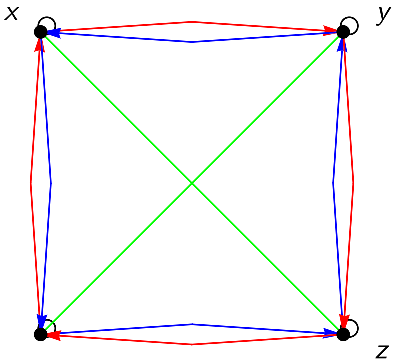
Primjer. Schurova konstrukcija od grupe $G = \langle (1\ 2\ 3\ 4) \rangle$:



$x \rightarrow y$

Što je analogija i je li "analogon" ispravna riječ?

Primjer. Schurova konstrukcija od grupe $G = \langle (1\ 2\ 3\ 4) \rangle$:

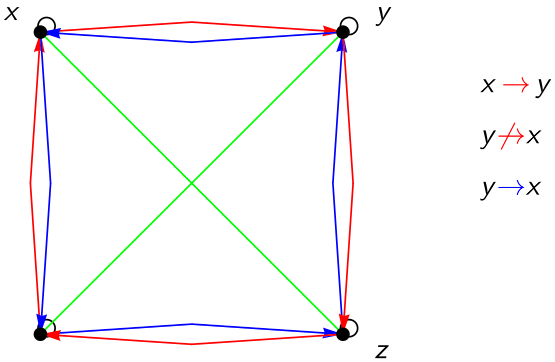


$x \rightarrow y$

$y \not\rightarrow x$

Što je analogija i je li "analogon" ispravna riječ?

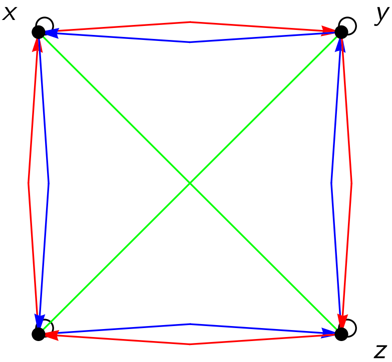
Primjer. Schurova konstrukcija od grupe $G = \langle (1\ 2\ 3\ 4) \rangle$:



. . . **analogoni** jako regularnih grafova

Što je analogija i je li "analogon" ispravna riječ?

Primjer. Schurova konstrukcija od grupe $G = \langle (1\ 2\ 3\ 4) \rangle$:



$x \rightarrow y$

$y \not\rightarrow x$

$y \rightarrow x$

$x \rightarrow z$

$z \rightarrow x$

Analogon 1: Usmjereni jako regularni grafovi

A. M. Duval, *A directed graph version of strongly regular graphs*, J. Combin. Theory Ser. A **47** (1988), no. 1, 71–100.

Definicija.

Za G kažemo da je usmjereni jako regularan graf s parametrima $DSRG(n, \Bbbk, t, \lambda, \mu)$ ako vrijedi:

Analogon 1: Usmjereni jako regularni grafovi

A. M. Duval, *A directed graph version of strongly regular graphs*, J. Combin. Theory Ser. A **47** (1988), no. 1, 71–100.

Definicija.

Za G kažemo da je usmjereni jako regularan graf s parametrima $DSRG(n, k, t, \lambda, \mu)$ ako vrijedi:

1. broj vrhova je n

Analogon 1: Usmjereni jako regularni grafovi

A. M. Duval, *A directed graph version of strongly regular graphs*, J. Combin. Theory Ser. A **47** (1988), no. 1, 71–100.

Definicija.

Za G kažemo da je usmjereni jako regularan graf s parametrima $DSRG(n, \Bbbk, t, \lambda, \mu)$ ako vrijedi:

1. broj vrhova je n
2. svaki vrh je ulaznog i izlaznog stupnja $\Bbbk$ i ima t “obostranih” susjeda

Analogon 1: Usmjereni jako regularni grafovi

A. M. Duval, *A directed graph version of strongly regular graphs*, J. Combin. Theory Ser. A **47** (1988), no. 1, 71–100.

Definicija.

Za G kažemo da je usmjereni jako regularan graf s parametrima $DSRG(n, k, t, \lambda, \mu)$ ako vrijedi:

1. broj vrhova je n
2. svaki vrh je ulaznog i izlaznog stupnja k i ima t "obostranih" susjeda
3. za različite vrhve x i y, broj vrhova z takvih da vrijedi $x \to z \to y$ jednak je λ ako je $x \to y$, a μ ako je $x \not\to y$

Analogon 1: Usmjereni jako regularni grafovi

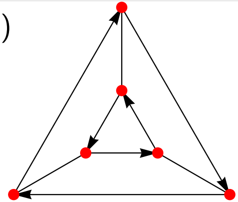
A. M. Duval, *A directed graph version of strongly regular graphs*, J. Combin. Theory Ser. A **47** (1988), no. 1, 71–100.

Definicija.

Za G kažemo da je usmjereni jako regularan graf s parametrima $DSRG(n, k, t, \lambda, \mu)$ ako vrijedi:

1. broj vrhova je n
2. svaki vrh je ulaznog i izlaznog stupnja k i ima t "obostranih" susjeda
3. za različite vrhve x i y, broj vrhova z takvih da vrijedi $x \to z \to y$ jednak je λ ako je $x \to y$, a μ ako je $x \not\to y$

Primjer. $DSRG(6, 2, 1, 0, 1)$



Analogon 1: Usmjereni jako regularni grafovi

A. M. Duval, *A directed graph version of strongly regular graphs*, J. Combin. Theory Ser. A **47** (1988), no. 1, 71–100.

Definicija.

Za G kažemo da je usmjereni jako regularan graf s parametrima $DSRG(n, \Bbbk, t, \lambda, \mu)$ ako vrijedi:

1. broj vrhova je n
2. svaki vrh je ulaznog i izlaznog stupnja $\Bbbk$ i ima t "obostranih" susjeda
3. za različite vrhve x i y, broj vrhova z takvih da vrijedi $x \to z \to y$ jednak je λ ako je $x \to y$, a μ ako je $x \not\to y$

Specijalni slučajevi: $t = \Bbbk \rightsquigarrow$ SRG

Analogon 1: Usmjereni jako regularni grafovi

A. M. Duval, *A directed graph version of strongly regular graphs*, J. Combin. Theory Ser. A **47** (1988), no. 1, 71–100.

Definicija.

Za G kažemo da je usmjereni jako regularan graf s parametrima $DSRG(n, \Bbbk, t, \lambda, \mu)$ ako vrijedi:

1. broj vrhova je n
2. svaki vrh je ulaznog i izlaznog stupnja $\Bbbk$ i ima t "obostranih" susjeda
3. za različite vrhve x i y, broj vrhova z takvih da vrijedi $x \to z \to y$ jednak je λ ako je $x \to y$, a μ ako je $x \not\to y$

Specijalni slučajevi: $t = \Bbbk \rightsquigarrow$ SRG

$t = 0 \rightsquigarrow$ dvostruko regularni turnir, ekvivalentan s antisimetričnom Hadamardovom matricom

Analogon 1: Usmjereni jako regularni grafovi

A. M. Duval, *A directed graph version of strongly regular graphs*, J. Combin. Theory Ser. A **47** (1988), no. 1, 71–100.

Definicija.

Za G kažemo da je usmjereni jako regularan graf s parametrima $DSRG(n, \Bbbk, t, \lambda, \mu)$ ako vrijedi:

1. broj vrhova je n
2. svaki vrh je ulaznog i izlaznog stupnja $\Bbbk$ i ima t "obostranih" susjeda
3. za različite vrhve x i y, broj vrhova z takvih da vrijedi $x \to z \to y$ jednak je λ ako je $x \to y$, a μ ako je $x \not\to y$

Specijalni slučajevi: $t = \Bbbk \rightsquigarrow$ SRG

$t = 0 \rightsquigarrow$ dvostruko regularni turnir, ekvivalentan s antisimetričnom Hadamardovom matricom

Pravi ili "miješani" DSRG-ovi imaju $0 < t < \Bbbk$

Usmjereni jako regularni grafovi

Teorem.

Asocijacijska shema s dvije klase ekvivalentna je s parom međusobno komplementarnih jako regularnih grafova.

Usmjereni jako regularni grafovi

Teorem.

Asocijacijska shema s dvije klase ekvivalentna je s parom međusobno komplementarnih jako regularnih grafova.

Propozicija.

Komplement $DSRG(n, k, t, \lambda, \mu)$ je $DSRG(n, k', t', \lambda', \mu')$ za

$$k' = n - k - 1$$

$$t' = n - 2k + t - 1$$

$$\lambda' = n - 2k + \mu - 2$$

$$\mu' = n - 2k + \lambda$$

Usmjereni jako regularni grafovi

Teorem.

Asocijacijska shema s dvije klase ekvivalentna je s parom međusobno komplementarnih jako regularnih grafova.

Je li (nesimetrična) koherentna konfiguracija s dvije klase ekvivalentna s parom međusobno komplementarnih DSRG-ova?

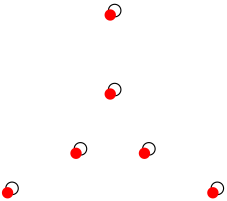
Usmjereni jako regularni grafovi

Teorem.

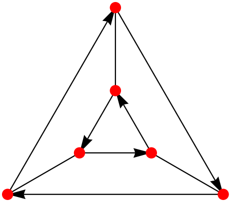
Asocijacijska shema s dvije klase ekvivalentna je s parom međusobno komplementarnih jako regularnih grafova.

Je li (nesimetrična) koherentna konfiguracija s dvije klase ekvivalentna s parom međusobno komplementarnih DSRG-ova?

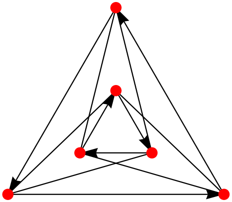
Petlje



$DSRG(6,2,1,0,1)$



$DSRG(6,3,2,1,2)$



Usmjereni jako regularni grafovi

Teorem.

Asocijacijska shema s dvije klase ekvivalentna je s parom međusobno komplementarnih jako regularnih grafova.

Je li (nesimetrična) koherentna konfiguracija s dvije klase ekvivalentna s parom međusobno komplementarnih DSRG-ova?

Petlje

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$DSRG(6,2,1,0,1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$DSRG(6,3,2,1,2)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Usmjereni jako regularni grafovi

Teorem.

Asocijacijska shema s dvije klase ekvivalentna je s parom međusobno komplementarnih jako regularnih grafova.

Je li (nesimetrična) koherentna konfiguracija s dvije klase ekvivalentna s parom međusobno komplementarnih DSRG-ova? **Ne!**

Petlje

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$DSRG(6,2,1,0,1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$DSRG(6,3,2,1,2)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Usmjereni jako regularni grafovi

Teorem.

Asocijacijska shema s dvije klase ekvivalentna je s parom međusobno komplementarnih jako regularnih grafova.

Je li (nesimetrična) koherentna konfiguracija s dvije klase ekvivalentna s parom međusobno komplementarnih DSRG-ova? **Ne!**

Vrijedi li barem jedan smjer, tj. je li svaka nesimetrična koherentna konfiguracija s dvije klase DSRG?

Usmjereni jako regularni grafovi

Teorem.

Asocijacijska shema s dvije klase ekvivalentna je s parom međusobno komplementarnih jako regularnih grafova.

Je li (nesimetrična) koherentna konfiguracija s dvije klase ekvivalentna s parom međusobno komplementarnih DSRG-ova? **Ne!**

Vrijedi li barem jedan smjer, tj. je li svaka nesimetrična koherentna konfiguracija s dvije klase DSRG? **Da!**

Nesimetrične koherentne konfiguracije s dvije klase su upravo DSRG-ovi s $t = 0$, tj. dvostruko regularni turniri.

Usmjereni jako regularni grafovi

Teorem.

Asocijacijska shema s dvije klase ekvivalentna je s parom međusobno komplementarnih jako regularnih grafova.

Je li (nesimetrična) koherentna konfiguracija s dvije klase ekvivalentna s parom međusobno komplementarnih DSRG-ova? **Ne!**

Vrijedi li barem jedan smjer, tj. je li svaka nesimetrična koherentna konfiguracija s dvije klase DSRG? **Da!**

Nesimetrične koherentne konfiguracije s dvije klase su upravo DSRG-ovi s $t = 0$, tj. dvostruko regularni turniri. Dakle, DSRG-ovi su generalizacija koherentnih konfiguracija s dvije klase (simetričnih ili nesimetričnih).

Usmjereni jako regularni grafovi

Teorem.

Asocijacijska shema s dvije klase ekvivalentna je s parom međusobno komplementarnih jako regularnih grafova.

Je li (nesimetrična) koherentna konfiguracija s dvije klase ekvivalentna s parom međusobno komplementarnih DSRG-ova? **Ne!**

Vrijedi li barem jedan smjer, tj. je li svaka nesimetrična koherentna konfiguracija s dvije klase DSRG? **Da!**

Nesimetrične koherentne konfiguracije s dvije klase su upravo DSRG-ovi s $t = 0$, tj. dvostruko regularni turniri. Dakle, DSRG-ovi su generalizacija koherentnih konfiguracija s dvije klase (simetričnih ili nesimetričnih).

Tablica dopustivih parametara (A. E. Brouwer, Sylvia A. Hobart):

https://homepages.cwi.nl/~aeb/math/dsrg/dsrg.html

Parameters of directed strongly regular graphs

Sylvia A. Hobart & aeb

010105

We give parameters, constructions and nonexistence information for directed strongly regular graphs as defined by Duval [3].

---

1. Definition

2. Constructions and Nonexistence Conditions

4. Table 1-20

v	k	t	λ	μ	r^f	s^g	comments				
6	2	1	0	1	0^3	-1^2	T1	T5	T8(i) for 2-(3,2,1)	T12	T18 for (d,l,s)=(1,1,2)
	3	2	1	2	0^2	-1^3	T8(ii) for 2-(3,2,1)	T9 for pg(2,2,2)	T18 for (d,l,s)=(1,1,2)		
8	3	2	1	1	1^2	-1^5	T4	T6	T7 for GQ(1,1)	T19	
	4	3	1	3	0^5	-2^2	T17	T18 for (a,b,r)=(1,1,2)	T19		
10	4	2	1	2	0^5	-1^4	T3	T5	T12	T18 for (d,l,s)=(1,2,2)	M1 from srg(5,2,0)
	5	3	2	3	0^4	-1^5	T18 for (d,l,s)=(1,2,2)				
12	3	1	0	1	0^8	-1^3	T1	T8(i) for 2-(4,2,1)	T12	T18 for (d,l,s)=(1,1,3)	
	8	6	5	6	0^3	-1^8	T8(ii) for 2-(4,3,2)	T18 for (d,l,s)=(2,2,3)			
12	4	2	0	2	0^9	-2^2	T8(i) for 2-(3,2,2)	T10 for m=2	T12	T18 for (d,l,s)=(2,1,4)	
	7	5	4	4	1^2	-1^9	T8(ii) for 2-(3,2,2)	T11 for m=2	T18 for (d,l,s)=(2,1,4)		
12	5	3	2	2	1^3	-1^8	T4	T6	T8(ii) for 2-(4,2,1)	T9 for pg(3,2,2)	T11 for m=2
	6	4	2	4	0^8	-2^3	T8(i) for 2-(4,3,2)	T10 for m=2	T12	T18 for (a,b,r)=(1,1,3)	T18 for (d,l,s)=(2,2,3)
14	5	4	1	2	1^7	-2^6	does not exist by N1				
	8	7	4	5	1^6	-2^7					
14	6	3	2	3	0^7	-1^6	T5	T12	T18 for (d,l,s)=(1,3,2)	M6	
	7	4	3	4	0^6	-1^7	T18 for (d,l,s)=(1,3,2)				
15	4	2	1	1	1^5	-1^9	T2	T4			
	10	8	6	8	0^9	-2^5					
15	5	2	1	2	0^9	-1^5	M5				
	9	6	5	6	0^5	-1^9					

Usmjereni jako regularni grafovi

5. Table 21-30

v	k	t	λ	μ	r^f	s^g	comments			
21	6	2	1	2	0^{14}	-1^{6}	T8(i) for 2-(7,3,1)	T12	T18 for (d,l,s)=(1,2,3)	
	14	10	9	10	0^{6}	-1^{14}	T18 for (d,l,s)=(2,4,3)			
21	8	4	3	3	1^{6}	-1^{14}	T8(ii) for 2-(7,3,1)	T9 for pg(3,3,3)	T18 for (d,l,s)=(1,2,3)	
	12	8	6	8	0^{14}	-2^{6}	T12	T18 for (d,l,s)=(2,4,3)		
22	9	6	3	4	1^{11}	-2^{10}	?			
	12	9	6	7	1^{10}	-2^{11}	?			
22	10	5	4	5	0^{11}	-1^{10}	T5	T12	T18 for (d,l,s)=(1,5,2)	
	11	6	5	6	0^{10}	-1^{11}	T18 for (d,l,s)=(1,5,2)			
24	5	2	1	1	1^{9}	-1^{14}	T4			
	18	15	13	15	0^{14}	-2^{9}				
24	6	2	0	2	0^{20}	-2^{3}	T8(i) for 2-(4,2,2)	T10 for m=2	T12	T18 for (d,l,s)=(2,1,6)
	17	13	12	12	1^{3}	-1^{20}	T8(ii) for 2-(4,3,4)	T11 for m=2	T18 for (d,l,s)=(4,2,6)	

Usmjereni jako regularni grafovi

5. Table 21-30

v	k	t	λ	μ	r^f	s^g	comments			
21	6	2	1	2	0^{14}	-1^{6}	T8(i) for 2-(7,3,1)	T12	T18 for (d,l,s)=(1,2,3)	
	14	10	9	10	0^{6}	-1^{14}	T18 for (d,l,s)=(2,4,3)			
21	8	4	3	3	1^{6}	-1^{14}	T8(ii) for 2-(7,3,1)	T9 for pg(3,3,3)	T18 for (d,l,s)=(1,2,3)	
	12	8	6	8	0^{14}	-2^{6}	T12	T18 for (d,l,s)=(2,4,3)		
22	9	6	3	4	1^{11}	-2^{10}	?			
	12	9	6	7	1^{10}	-2^{11}	?			
22	10	5	4	5	0^{11}	-1^{10}	T5	T12	T18 for (d,l,s)=(1,5,2)	
	11	6	5	6	0^{10}	-1^{11}	T18 for (d,l,s)=(1,5,2)			
24	5	2	1	1	1^{9}	-1^{14}	T4			
	18	15	13	15	0^{14}	-2^{9}				
24	6	2	0	2	0^{20}	-2^{3}	T8(i) for 2-(4,2,2)	T10 for m=2	T12	T18 for (d,l,s)=(2,1,6)
	17	13	12	12	1^{3}	-1^{20}	T8(ii) for 2-(4,3,4)	T11 for m=2	T18 for (d,l,s)=(4,2,6)	

A. E. Brouwer, D. Crnković, A. Švob, *A construction of directed strongly regular graphs with parameters* $(63, 11, 8, 1, 2)$, Discrete Math. **347** (2024), no. 11, Paper No. 114146, 3 pp.

q-Analogoni

Binomni koeficijenti: $\binom{n}{k}$ = broj k-članih podskupova n-članog skupa

q-Analogoni

Binomni koeficijenti: $\binom{n}{k}$ = broj k-članih podskupova n-članog skupa

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

q-Analogoni

Binomni koeficijenti: $\displaystyle\binom{n}{k}$ = broj k-članih podskupova n-članog skupa

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad\qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

q-Analogoni

Binomni koeficijenti: $\binom{n}{k}$ = broj k-članih podskupova n-članog skupa

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad\qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$(X+Y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k Y^{n-k}$$

q-Analogoni

Binomni koeficijenti: $\binom{n}{k}$ = broj k-članih podskupova n-članog skupa

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad\qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$(X+Y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k Y^{n-k}$$

q-Binomni koeficijenti: $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ = broj k-dimenzionalnih potprostora n-dimenzionalnog vektorskog prostora nad konačnim poljem $\mathbb{F}_q$

q-Analogoni

Binomni koeficijenti: $\binom{n}{k}$ = broj k-članih podskupova n-članog skupa

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$(X+Y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k Y^{n-k}$$

q-Binomni koeficijenti: $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ = broj k-dimenzionalnih potprostora n-dimenzionalnog vektorskog prostora nad konačnim poljem $\mathbb{F}_q$

$$[n]_q = \frac{q^n - 1}{q - 1} = q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1$$

q-Analogoni

Binomni koeficijenti: $\binom{n}{k}$ = broj k-članih podskupova n-članog skupa

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$(X+Y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k Y^{n-k}$$

q-Binomni koeficijenti: $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ = broj k-dimenzionalnih potprostora n-dimenzionalnog vektorskog prostora nad konačnim poljem $\mathbb{F}_q$

$$[n]_q! = [n]_q \cdot [n-1]_q \cdots [1]_q$$

q-Analogoni

Binomni koeficijenti: $\binom{n}{k}$ = broj k-članih podskupova n-članog skupa

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad\qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$(X+Y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k Y^{n-k}$$

q-Binomni koeficijenti: $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ = broj k-dimenzionalnih potprostora n-dimenzionalnog vektorskog prostora nad konačnim poljem $\mathbb{F}_q$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}$$

q-Analogoni

Binomni koeficijenti: $\binom{n}{k}$ = broj k-članih podskupova n-članog skupa

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad\qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$(X+Y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k Y^{n-k}$$

q-Binomni koeficijenti: $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ = broj k-dimenzionalnih potprostora n-dimenzionalnog vektorskog prostora nad konačnim poljem $\mathbb{F}_q$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!} \qquad\qquad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q$$

q-Analogoni

Binomni koeficijenti: $\binom{n}{k}$ = broj k-članih podskupova n-članog skupa

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad\qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$(X+Y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k Y^{n-k}$$

q-Binomni koeficijenti: $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ = broj k-dimenzionalnih potprostora n-dimenzionalnog vektorskog prostora nad konačnim poljem $\mathbb{F}_q$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!} \qquad\qquad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q$$

$(X+Y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q X^k Y^{n-k}$ za q-komutirajuće varijable: $YX = qXY$

Analogon 2: Jako regularni grafovi nad $\mathbb{F}_q$

M. Braun, D. Crnković, M. De Boeck, V. Mikulić Crnković, A. Švob, *q-analogs of strongly regular graphs*, Linear Algebra Appl. **693** (2024), 362–373.

Analogon 2: Jako regularni grafovi nad $\mathbb{F}_q$

M. Braun, D. Crnković, M. De Boeck, V. Mikulić Crnković, A. Švob, *q-analogs of strongly regular graphs*, Linear Algebra Appl. **693** (2024), 362–373.

V = n-dimenzionalni vektorski prostor nad $\mathbb{F}_q$

Vrhovi: svi jednodimenzionalni potprostori od V

Bridovi: podskup E dvodimenzionalnih potprostora od V

Analogon 2: Jako regularni grafovi nad $\mathbb{F}_q$

M. Braun, D. Crnković, M. De Boeck, V. Mikulić Crnković, A. Švob, *q-analogs of strongly regular graphs*, Linear Algebra Appl. **693** (2024), 362–373.

$V = n$-dimenzionalni vektorski prostor nad $\mathbb{F}_q$

Vrhovi: svi jednodimenzionalni potprostori od V

Bridovi: podskup E dvodimenzionalnih potprostora od V

Vrhovi x i y su susjedni ako je $x + y \in E$

$\overline{N}(x) =$ skup svih susjeda vrha x, uključujući njega samog

Analogon 2: Jako regularni grafovi nad $\mathbb{F}_q$

M. Braun, D. Crnković, M. De Boeck, V. Mikulić Crnković, A. Švob, *q-analogs of strongly regular graphs*, Linear Algebra Appl. **693** (2024), 362–373.

$V = n$-dimenzionalni vektorski prostor nad $\mathbb{F}_q$

Vrhovi: svi jednodimenzionalni potprostori od V

Bridovi: podskup E dvodimenzionalnih potprostora od V

Vrhovi x i y su susjedni ako je $x + y \in E$

$\overline{N}(x) =$ skup svih susjeda vrha x, uključujući njega samog

Graf nad $\mathbb{F}_q$ je $\mathscr{k}$-regularan ako za svaki vrh x postoji $(\mathscr{k} + 1)$-dimenzionalni potprostor $W \leq V$ takav da se $\overline{N}(x)$ podudara sa skupom svih jednodimenzionalnih potprostora od W

Analogon 2: Jako regularni grafovi nad $\mathbb{F}_q$

M. Braun, D. Crnković, M. De Boeck, V. Mikulić Crnković, A. Švob, *q-analogs of strongly regular graphs*, Linear Algebra Appl. **693** (2024), 362–373.

$V = n$-dimenzionalni vektorski prostor nad $\mathbb{F}_q$

Vrhovi: svi jednodimenzionalni potprostori od V

Bridovi: podskup E dvodimenzionalnih potprostora od V

Vrhovi x i y su susjedni ako je $x + y \in E$

$\overline{N}(x) =$ skup svih susjeda vrha x, uključujući njega samog

Graf nad $\mathbb{F}_q$ je $\Bbbk$-regularan ako za svaki vrh x postoji $(\Bbbk + 1)$-dimenzionalni potprostor $W \leq V$ takav da se $\overline{N}(x)$ podudara sa skupom svih jednodimenzionalnih potprostora od W

Za graf nad $\mathbb{F}_q$ kažemo da je $SRG(n, \Bbbk, \lambda, \mu; q)$ ako je $\Bbbk$-regularan i svaka dva vrha imaju λ zajedničkih susjeda ako su susjedni, a μ zajedničkih susjeda ako nisu susjedni

Jako regularni grafovi nad $\mathbb{F}_q$

Primjeri:

1. Potpuni q-graf: $E =$ skup svih dvodimenzionalnih potprostora od V

$$SRG(n, n-1, [n]_q - 2, \mu; q)$$

Jako regularni grafovi nad $\mathbb{F}_q$

Primjeri:

1. Potpuni q-graf: $E =$ skup svih dvodimenzionalnih potprostora od V

$$SRG(n, n-1, [n]_q - 2, \mu; q)$$

2. Neka je $\mathcal{S}$ m-spread, tj. familija m-dimenzionalnih potprostora od V takva da je svaki jednodimenzionalni potprostor sadržan u točno jednom elementu iz $\mathcal{S}$. Poznato je da $\mathcal{S}$ postoji ako i samo ako $m \mid n$ i tada je

$$|\mathcal{S}| = \frac{q^n - 1}{q^m - 1}$$

Jako regularni grafovi nad $\mathbb{F}_q$

Primjeri:

1. Potpuni q-graf: $E =$ skup svih dvodimenzionalnih potprostora od V

$$SRG(n, n-1, [n]_q - 2, \mu; q)$$

2. Neka je $\mathcal{S}$ m-spread, tj. familija m-dimenzionalnih potprostora od V takva da je svaki jednodimenzionalni potprostor sadržan u točno jednom elementu iz $\mathcal{S}$. Poznato je da $\mathcal{S}$ postoji ako i samo ako $m \mid n$ i tada je

$$|\mathcal{S}| = \frac{q^n - 1}{q^m - 1}$$

$E =$ skup svih dvodimenzionalnih potprostora elemenata iz $\mathcal{S}$

$$SRG(n, m-1, [m]_q - 2, 0; q)$$

Ovo je q-analogon disjunktne unije potpunih grafova

Primjeri:

3. Neka je n paran, φ simplektički polaritet od V i $E =$ skup svih dvodimenzionalnih potprostora koji su totalno izotropni obzirom na φ

$$SRG(n, n-2, \mu-2, \mu; q) \text{ za } \mu = [n-2]_q$$

Jako regularni grafovi nad $\mathbb{F}_q$

Primjeri:

3. Neka je n paran, φ simplektički polaritet od V i $E =$ skup svih dvodimenzionalnih potprostora koji su totalno izotropni obzirom na φ

$$SRG(n, n-2, \mu-2, \mu; q) \text{ za } \mu = [n-2]_q$$

Teorem.

Svaki $SRG(n, \Bbbk, \lambda, \mu; q)$ podudara se s nekim od tri opisana primjera.

Konferencija CSEECDMA u Beogradu

CSEE CDMA 2024

Science Fund
of the Republic of Serbia

The 1st Chinese-SouthEastEuropean Conference on Discrete Mathematics and Applications, Belgrade, Serbia, June 9–14, 2024

Invited Speakers

- Vilmar Trevisan, Federal University of Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brazil
- Stephan Wagner, Uppsala University, Sweden and TU Graz, Austria
- Klavdija Kutnar, University of Primorska, Koper, Slovenia
- Péter Csikvári, Alfréd Rényi Institute, Budapest, Hungary
- Huiqiu Lin, East China University of Science and Technology, Shanghai, China
- Bo Ning, Nankai University, Tianjin, China
- Zhao Zhang, Zhejiang Normal University, Jinhua, China
- Genjiu Xu, Northwestern Polytechnic University, Xi'an, China

Konferencija CSEECDMA u Beogradu

Konferencija CSEECDMA u Beogradu

Konferencija CSEECDMA u Beogradu

Dragan Stevanović

Konferencija CSEECDMA u Beogradu

Xueliang Li

Konferencija CSEECDMA u Beogradu

Konferencija CSEECDMA u Beogradu

Konferencija CSEECDMA u Beogradu

Konferencija CSEECDMA u Beogradu

Analogon 3: Jako regularni označeni grafovi

Zoran Stanić, Milica Anđelić, Tamara Koledin

Analogon 3: Jako regularni označeni grafovi

Z. Stanić, *On strongly regular signed graphs*, Discrete Appl. Math. **271** (2019), 184–190.

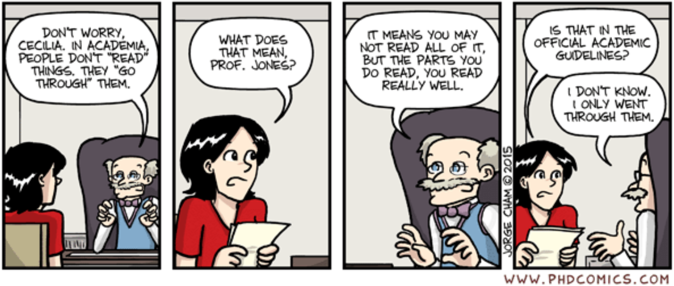
T. Koledin, Z. Stanić, *On a class of strongly regular signed graphs*, Publ. Math. Debrecen **97** (2020), no. 3-4, 353–365.

Z. Stanić, *Spectra of signed graphs with two eigenvalues*, Appl. Math. Comput. **364** (2020), 124627, 9 pp.

M. Anđelić, T. Koledin, Z. Stanić, *On regular signed graphs with three eigenvalues*, Discuss. Math. Graph Theory **40** (2020), no. 2, 405–416.

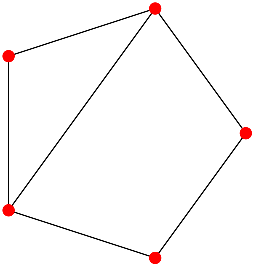
Z. Stanić, *Linear ternary codes of strongly regular signed graphs*, Discrete Math. **347** (2024), no. 1, Paper No. 113714, 17 pp.

Analogon 3: Jako regularni označeni grafovi



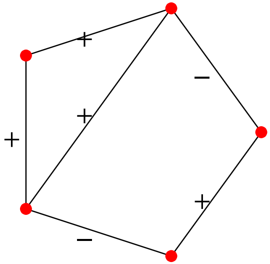
Označeni grafovi

$G = (V, E)$



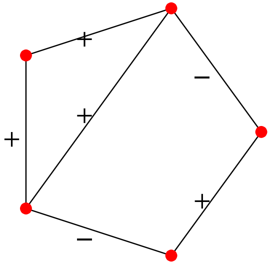
Označeni grafovi

$\dot{G} = (V, E, \sigma), \quad \sigma : E \to \{-1, 1\}$



Označeni grafovi

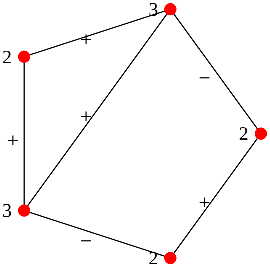
$\dot{G} = (V, E, \sigma), \quad \sigma : E \to \{-1, 1\}$



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Označeni grafovi

$\dot{G} = (V, E, \sigma), \quad \sigma : E \to \{-1, 1\}$

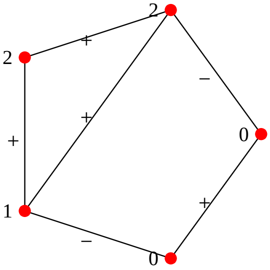


$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Stupanj vrhova

Označeni grafovi

$\dot{G} = (V, E, \sigma), \quad \sigma : E \to \{-1, 1\}$

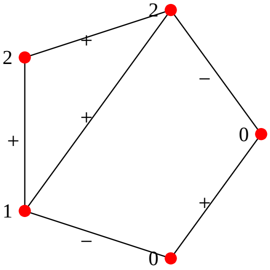


$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Stupanj vrhova, zbirni stupanj (?) vrhova (net-degree)

Označeni grafovi

$\dot{G} = (V, E, \sigma), \quad \sigma : E \to \{-1, 1\}$



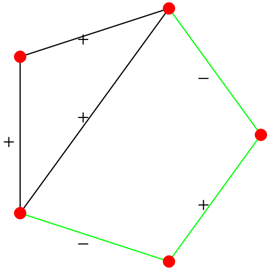
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Stupanj vrhova, zbirni stupanj (?) vrhova (net-degree)

Predzank šetnje: produkt predznaka bridova koje sadrži

Označeni grafovi

$\dot{G} = (V, E, \sigma), \quad \sigma : E \to \{-1, 1\}$



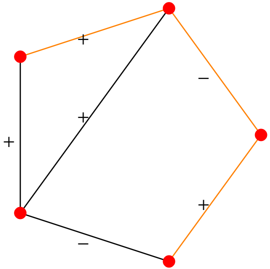
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Stupanj vrhova, zbirni stupanj (?) vrhova (net-degree)

Predzank šetnje: produkt predznaka bridova koje sadrži – pozitivna šetnja

Označeni grafovi

$\dot{G} = (V, E, \sigma), \quad \sigma : E \to \{-1, 1\}$



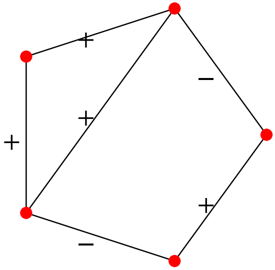
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Stupanj vrhova, zbirni stupanj (?) vrhova (net-degree)

Predzank šetnje: produkt predznaka bridova koje sadrži – negativna šetnja

Označeni grafovi

$\dot{G} = (V, E, \sigma), \quad \sigma : E \to \{-1, 1\}$



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

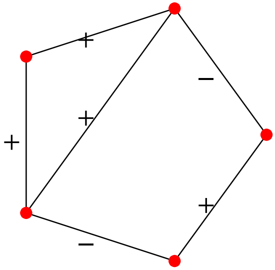
Stupanj vrhova, zbirni stupanj (?) vrhova (net-degree)

Predzank šetnje: produkt predznaka bridova koje sadrži

$w_i(x, y) =$ broj pozitivnih šetnji minus broj negativnih šetnji duljine i između vrhova x, y

Označeni grafovi

$\dot{G} = (V, E, \sigma), \quad \sigma : E \to \{-1, 1\}$



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Stupanj vrhova, zbirni stupanj (?) vrhova (net-degree)

Predzank šetnje: produkt predznaka bridova koje sadrži

$w_i(x, y) =$ broj pozitivnih šetnji minus broj negativnih šetnji duljine i između vrhova x, y

$$\left[A^i\right]_{x,y} = w_i(x, y)$$

Definicija

Za $\dot{G}$ kažemo da je jako regularan označen graf s parametrima $SRSG(n, \Bbbk, \lambda^+, \lambda^-, \mu)$ ako:

Definicija

Za $\dot{G}$ kažemo da je jako regularan označen graf s parametrima $SRSG(n, \Bbbk, \lambda^+, \lambda^-, \mu)$ ako:

1. broj vrhova je n

Definicija

Za $\dot{G}$ kažemo da je jako regularan označen graf s parametrima $SRSG(n, \Bbbk, \lambda^+, \lambda^-, \mu)$ ako:

1. broj vrhova je n
2. svaki vrh je stupnja $\Bbbk$ (običnog stupnja, ne zbirnog stupnja!)

Definicija

Za $\dot{G}$ kažemo da je jako regularan označen graf s parametrima $SRSG(n, \Bbbk, \lambda^+, \lambda^-, \mu)$ ako:

1. broj vrhova je n
2. svaki vrh je stupnja $\Bbbk$ (običnog stupnja, ne zbirnog stupnja!)
3. $w_2(x, y) = \lambda^+$ za svaka dva vrha x, y spojena pozitivnim bridom

Definicija

Za $\dot{G}$ kažemo da je jako regularan označen graf s parametrima $SRSG(n, \Bbbk, \lambda^+, \lambda^-, \mu)$ ako:

1. broj vrhova je n
2. svaki vrh je stupnja $\Bbbk$ (običnog stupnja, ne zbirnog stupnja!)
3. $w_2(x, y) = \lambda^+$ za svaka dva vrha x, y spojena pozitivnim bridom
4. $w_2(x, y) = \lambda^-$ za svaka dva vrha x, y spojena negativnim bridom

Definicija

Za $\dot{G}$ kažemo da je jako regularan označen graf s parametrima $SRSG(n, \Bbbk, \lambda^+, \lambda^-, \mu)$ ako:

1. broj vrhova je n
2. svaki vrh je stupnja $\Bbbk$ (običnog stupnja, ne zbirnog stupnja!)
3. $w_2(x, y) = \lambda^+$ za svaka dva vrha x, y spojena pozitivnim bridom
4. $w_2(x, y) = \lambda^-$ za svaka dva vrha x, y spojena negativnim bridom
5. $w_2(x, y) = \mu$ za svaka vrha x, y koja nisu susjedi

Definicija

Za $\dot{G}$ kažemo da je jako regularan označen graf s parametrima $SRSG(n, \Bbbk, \lambda^+, \lambda^-, \mu)$ ako:

1. broj vrhova je n
2. svaki vrh je stupnja $\Bbbk$ (običnog stupnja, ne zbirnog stupnja!)
3. $w_2(x, y) = \lambda^+$ za svaka dva vrha x, y spojena pozitivnim bridom
4. $w_2(x, y) = \lambda^-$ za svaka dva vrha x, y spojena negativnim bridom
5. $w_2(x, y) = \mu$ za svaka vrha x, y koja nisu susjedi

$$SRG(n, \Bbbk, \lambda, \mu) \iff A^2 = \Bbbk I + \lambda A + \mu(J - I - A)$$

Definicija

Za $\dot{G}$ kažemo da je jako regularan označen graf s parametrima $SRSG(n, k, \lambda^+, \lambda^-, \mu)$ ako:

1. broj vrhova je n
2. svaki vrh je stupnja k (običnog stupnja, ne zbirnog stupnja!)
3. $w_2(x, y) = \lambda^+$ za svaka dva vrha x, y spojena pozitivnim bridom
4. $w_2(x, y) = \lambda^-$ za svaka dva vrha x, y spojena negativnim bridom
5. $w_2(x, y) = \mu$ za svaka vrha x, y koja nisu susjedi

$$SRG(n, k, \lambda, \mu) \iff A^2 = kI + \lambda A + \mu(J - I - A)$$

$$SRSG(n, k, \lambda^+, \lambda^-, \mu) \iff$$

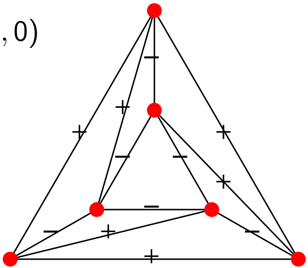
$$A^2 = kI + \lambda^+ \left(\frac{|A| + A}{2}\right) + \lambda^- \left(\frac{|A| - A}{2}\right) + \mu(J - I - |A|)$$

Definicija

Za $\dot{G}$ kažemo da je jako regularan označen graf s parametrima $SRSG(n, \Bbbk, \lambda^+, \lambda^-, \mu)$ ako:

1. broj vrhova je n
2. svaki vrh je stupnja $\Bbbk$ (običnog stupnja, ne zbirnog stupnja!)
3. $w_2(x,y) = \lambda^+$ za svaka dva vrha x, y spojena pozitivnim bridom
4. $w_2(x,y) = \lambda^-$ za svaka dva vrha x, y spojena negativnim bridom
5. $w_2(x,y) = \mu$ za svaka vrha x, y koja nisu susjedi

Primjer. $SRSG(6, 4, 0, 0, 0)$

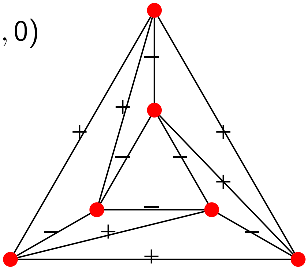


Definicija

Za $\dot{G}$ kažemo da je jako regularan označen graf s parametrima $SRSG(n, \Bbbk, \lambda^+, \lambda^-, \mu)$ ako:

1. broj vrhova je n
2. svaki vrh je stupnja $\Bbbk$ (običnog stupnja, ne zbirnog stupnja!)
3. $w_2(x, y) = \lambda^+$ za svaka dva vrha x, y spojena pozitivnim bridom
4. $w_2(x, y) = \lambda^-$ za svaka dva vrha x, y spojena negativnim bridom
5. $w_2(x, y) = \mu$ za svaka vrha x, y koja nisu susjedi

Primjer. $SRSG(6, 4, 0, 0, 0)$



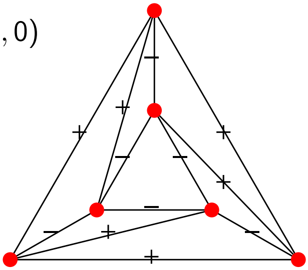
$\lambda^+, \lambda^-, \mu \in \mathbb{Z}$

Definicija

Za $\dot{G}$ kažemo da je jako regularan označen graf s parametrima $SRSG(n, k, \lambda^+, \lambda^-, \mu)$ ako:

1. broj vrhova je n
2. svaki vrh je stupnja k (običnog stupnja, ne zbirnog stupnja!)
3. $w_2(x, y) = \lambda^+$ za svaka dva vrha x, y spojena pozitivnim bridom
4. $w_2(x, y) = \lambda^-$ za svaka dva vrha x, y spojena negativnim bridom
5. $w_2(x, y) = \mu$ za svaka vrha x, y koja nisu susjedi

Primjer. $SRSG(6, 4, 0, 0, 0)$



$\lambda^+, \lambda^-, \mu \in \mathbb{Z}$

Zbirni stupnjevi vrhova ne moraju biti isti!

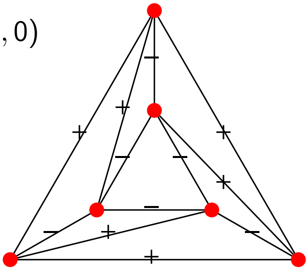
Definicija

Za $\dot{G}$ kažemo da je jako regularan označen graf s parametrima $SRSG(n, \Bbbk, \lambda^+, \lambda^-, \mu)$ ako:

1. broj vrhova je n
2. svaki vrh je stupnja $\Bbbk$ (običnog stupnja, ne zbirnog stupnja!)
3. $w_2(x, y) = \lambda^+$ za svaka dva vrha x, y spojena pozitivnim bridom
4. $w_2(x, y) = \lambda^-$ za svaka dva vrha x, y spojena negativnim bridom
5. $w_2(x, y) = \mu$ za svaka vrha x, y koja nisu susjedi

Primjer. $SRSG(6, 4, 0, 0, 0)$

Odgovarajući neoznačeni graf je $SRG(6, 4, 2, 4)$

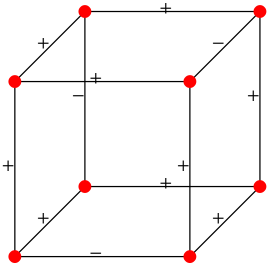


$\lambda^+, \lambda^-, \mu \in \mathbb{Z}$

Zbirni stupnjevi vrhova ne moraju biti isti!

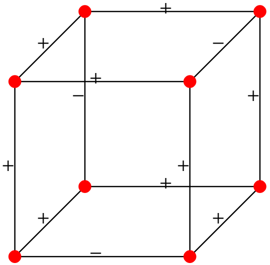
SRSG-ovi su čudni!

Primjer. $SRSG(8, 3, 0, 0, 0)$ – odgovarajući neoznačeni graf nije SRG!



SRSG-ovi su čudni!

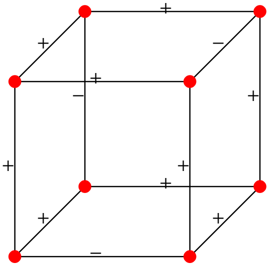
Primjer. $\mathit{SRSG}(8,3,0,0,0)$ – odgovarajući neoznačeni graf nije SRG!



Nepovezan označen graf je SRSG ako i samo ako su komponente SRSG s istim parametrima $\Bbbk, \lambda^+, \lambda^-$ i parametrom $\mu = 0$. Broj vrhova komponenta ne mora biti isti!

SRSG-ovi su čudni!

Primjer. $SRSG(8,3,0,0,0)$ – odgovarajući neoznačeni graf nije SRG!

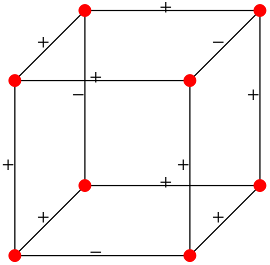


Nepovezan označen graf je SRSG ako i samo ako su komponente SRSG s istim parametrima $\Bbbk, \lambda^+, \lambda^-$ i parametrom $\mu = 0$. Broj vrhova komponenta ne mora biti isti!

Bipartitni SRG-ovi su samo $K_{n,n}$.

SRSG-ovi su čudni!

Primjer. $SRSG(8,3,0,0,0)$ – odgovarajući neoznačeni graf nije SRG!



Nepovezan označen graf je SRSG ako i samo ako su komponente SRSG s istim parametrima $\Bbbk, \lambda^+, \lambda^-$ i parametrom $\mu = 0$. Broj vrhova komponenta ne mora biti isti!

Bipartitni SRG-ovi su samo $K_{n,n}$. Netrivijalni primjeri bipartitnih SRSG-ova dobivaju se od incidencijski grafovi simetričnih dizajna!

SRSG-ovi su čudni!

Grafovi s tri svojstvene vrijednosti su točno netrivijalni SRG-ovi (povezani, nepotpuni). Trivijalni imaju dvije svojstvene vrijednosti.

SRSG-ovi su čudni!

Grafovi s tri svojstvene vrijednosti su točno netrivijalni SRG-ovi (povezani, nepotpuni). Trivijalni imaju dvije svojstvene vrijednosti.

Svi označeni grafovi s dvije svojstvene vrijednosti jesu SRSG-ovi. Nije ih moguće potpuno opisati!

SRSG-ovi su čudni!

Grafovi s tri svojstvene vrijednosti su točno netrivijalni SRG-ovi (povezani, nepotpuni). Trivijalni imaju dvije svojstvene vrijednosti.

Svi označeni grafovi s dvije svojstvene vrijednosti jesu SRSG-ovi. Nije ih moguće potpuno opisati!

Nije poznata spektralna karakterizacija SRSG-ova!

SRSG-ovi su čudni!

Grafovi s tri svojstvene vrijednosti su točno netrivijalni SRG-ovi (povezani, nepotpuni). Trivijalni imaju dvije svojstvene vrijednosti.

Svi označeni grafovi s dvije svojstvene vrijednosti jesu SRSG-ovi. Nije ih moguće potpuno opisati!

Nije poznata spektralna karakterizacija SRSG-ova!

- SRSG može imati više od tri svojstvene vrijednosti (poznati su primjeri s 4 i 5).

SRSG-ovi su čudni!

Grafovi s tri svojstvene vrijednosti su točno netrivijalni SRG-ovi (povezani, nepotpuni). Trivijalni imaju dvije svojstvene vrijednosti.

Svi označeni grafovi s dvije svojstvene vrijednosti jesu SRSG-ovi. Nije ih moguće potpuno opisati!

Nije poznata spektralna karakterizacija SRSG-ova!

- SRSG može imati više od tri svojstvene vrijednosti (poznati su primjeri s 4 i 5).
- Označen graf s tri svojstvene vrijednosti ne mora biti SRGS.

SRSG-ovi su čudni!

Grafovi s tri svojstvene vrijednosti su točno netrivijalni SRG-ovi (povezani, nepotpuni). Trivijalni imaju dvije svojstvene vrijednosti.

Svi označeni grafovi s dvije svojstvene vrijednosti jesu SRSG-ovi. Nije ih moguće potpuno opisati!

Nije poznata spektralna karakterizacija SRSG-ova!

- SRSG može imati više od tri svojstvene vrijednosti (poznati su primjeri s 4 i 5).
- Označen graf s tri svojstvene vrijednosti ne mora biti SRGS.

D. Cvetković, M. Doob, H. Sachs, *Spectra of graphs, 3rd edition*, Johann Ambrosius Barth, Heidelberg, 1995.

Kraj

Hvala na pažnji!