UVOD U TEORIJU BROJEVA

kolokvij

20. 12. 1999.

1. a) Riješite sustav kongruencija:

$$x \equiv 5 \pmod{7}, \quad x \equiv 4 \pmod{11}, \quad x \equiv 2 \pmod{13}.$$

   b) Nađite cijele brojeve x i y takve da je $71x + 50y = 1$, te odredite razvoj u jednostavni verižni razlomak broja $\frac{50}{71}$.

2. Nađite najmanji primitivni korijen modulo 67, te pomoću indeksa riješite kongruenciju $x^{30} \equiv 14 \pmod{67}$.

3. Odredite sve proste brojeve p takve da je $\left(\frac{-3}{p}\right) = 1$.

   Izračunajte Legendreove simbole $\left(\frac{160}{163}\right)$ i $\left(\frac{164}{167}\right)$.

4. Odredite $h(-40)$, te nađite reduciranu formu ekvivalentnu sa $127x^2 - 204xy + 82y^2$.

5. Označimo sa $Q(x)$ broj kvadratno slobodnih prirodnih brojeva koji su $\leq x$. Koliko je $Q(20)$? Dokažite da je

$$Q(x) = \sum_{n \leq x} |\mu(n)| = \sum_{n \leq x} \sum_{d^2 | n} \mu(d)\,,$$

   te da je $Q(x) = \dfrac{6}{\pi^2}\, x + O(\sqrt{x})$.

6. a) Nađite sva rješenja Pellovih jednadžbi $x^2 - 41y^2 = 1$ i $x^2 - 41y^2 = -1$ za koja vrijedi $1 < x < 10000$.

   b) Nađite sve Pitagorine trokute kojima je jedna stranica jednaka 51.

Rezultati : srijeda, 22.12.1999. u 11^{30} sati. Andrej Dujella