DIOFANTSKE JEDNADŽBE

4. zadaća

7. 3. 2007.

1. Neka je a neparan broj. Dokažite da kongruencija
$$x^2 \equiv a \pmod{2^k}$$
ima rješenja za svaki prirodan broj k ako i samo ako je $a \equiv 1 \pmod 8$.

2. Nađite sva rješenja kongruencija
   a) $x^2 \equiv 41 \pmod{125}$,
   b) $x^2 \equiv 41 \pmod{128}$.

3. Dokažite da jednadžba
$$(x^2 - 13y^2)(x^2 - 17y^2)(x^2 - 221y^2) = 0$$
ima netrivijalna rješenja u $\mathbb{R}$ i $\mathbb{Q}_p$ za svaki p, ali nema u $\mathbb{Q}$.

4. Neka je $g(x)$ minimalni polinom algebarskog broja α, neka je m prirodan broj sa svojstvom da su koeficijenti polinoma $m \cdot g(x)$ cijeli brojevi, te neka su $\alpha^{(1)} = \alpha$, $\alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(d)}$ nultočke od g. Dokažite da se tada za konstantu $c(\alpha)$ u Liouvilleovom teoremu može uzeti
$$c(\alpha) = m^{-1} \prod_{j=2}^{d} (1 + |\alpha| + |\alpha^{(j)}|)^{-1}.$$

5. Dokažite da tvrdnja Rothovog teorema vrijedi za sve $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

6. Nađite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe
$$x^4 - 2x^3y + 2x^2y^2 - 4xy^3 + 4y^4 = 1.$$

Rok za predaju zadaće je 21.3.2007.

Andrej Dujella