

# DIOFANTOVE $m$ -TORKE I ELIPTIČKE KRIVULJE

## 5. zadaća

1. Nađite sve  $D(16)$ -trojke  $\{a, b, c\}$  takve da je  $0 < a < b$  i  $c < 0$ . Za svaku takvu trojku, odredite torzijsku grupu i rang eliptičke krivulje dane jednačbom  $y^2 = (ax + 16)(bx + 16)(cx + 16)$ .
2. Za svaki  $k \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ , nađite prirodne brojeve  $a < b < c < d < e$  sa svojstvom da su  $\{a, b, c, d\}$  i  $\{a, b, c, e\}$   $D(k^2)$ -četvorke.
3. Dokažite da jednačba  $y^2 = x^3 + 7$  nema cjelobrojnih rješenja.
4. Neka je  $a = 119$ ,  $b = 472$ ,  $c = 26288040$ . Provjerite da je  $\{a, b, c\}$  Diofantova trojka te da eliptička krivulja  $y^2 = (x + ab)(x + ac)(x + bc)$  ima više od 100 cjelobrojnih točaka.
5. Nađite prirodan broj  $d > 2$  takav da sustav Pellovih jednačbi  $x^2 - 2y^2 = 1$ ,  $z^2 - dy^2 = 1$  (sa zajedničkom nepoznaticom  $y$ ) ima barem jedno rješenje u prirodnim brojevima, te potom nađite sva cjelobrojna rješenja dobivenog sustava.

Andrej Dujella