3 Teorem o reziduumima i primjene

3.1 Reziduumi

Definicija. Neka je funkcija f holomorfna na probušenom krugu $K^*(z_0, r)$ i neka je

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

njen Laurentov red oko točke z_0. Koeficijent a_{-1} uz $\frac{1}{z-z_0}$ tog reda zove se *reziduum funkcije* f *u točki* z_0 i označava se s $\mathrm{res}(f, z_0)$.

Prema formuli za koeficijente Laurentovog reda imamo

$$\mathrm{res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} f(z)\, dz,$$

gdje je Γ_0 bilo koja po dijelovima glatka pozitivno orijentirana krivulja unutar $K(z_0, r)$ koja okružuje singularitet z_0. Dakle,

$$\int_{\Gamma_0} f(z)\, dz = 2\pi i\, \mathrm{res}(f, z_0)$$

pa se računanje integrala može svesti na računanje reziduuma. Ako je z_0 uklonjiv singularitet, onda je $\mathrm{res}(f, z_0) = 0$. Ako je z_0 pol funkcije f, onda postoji i jednostavniji način računanja reziduuma (od razvijanja funkcije u Laurentov red).

I. Ako je z_0 pol prvog reda za funkciju f, onda je

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \phi(z)$$

i funkcija ϕ je holomorfna u z_0 ili u z_0 ima uklonjivi singularitet,

$$\lim_{z \to z_0} \phi(z) = a_0.$$

Sada iz

$$a_{-1} = (z - z_0) f(z) - (z - z_0)\phi(z)$$

uzimanjem limesa kad $z \to z_0$ imamo

$$a_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Ako je funkcija f oblika $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, gdje su g i h holomorfne, $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ te z_0 nultočka prvog reda funkcije h, onda je z_0 pol prvog reda funkcije f i vrijedi

$$a_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z)}{\frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0}} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Primjer 1. Funkcija $f(z) = \frac{z^2}{z-2}$ ima u točki $z_0 = 2$ pol prvog reda i

$$\operatorname{res}(f, 2) = \frac{g(2)}{h'(2)} = \frac{4}{1} = 4,$$

gdje je $g(z) = z^2$ i $h(z) = z - 2$.

II. Općenitije, ako je z_0 pol n-tog reda funkcije f, onda je

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots$$

pa je

$$(z-z_0)^n f(z) = a_{-n} + \ldots + a_{-1}(z-z_0)^{n-1} + a_0(z-z_0)^n + \ldots$$

što je dakle Taylorov red za funkciju $(z-z_0)^n f(z)$. Reziduum a_{-1} je koeficijent u tom redu pa ga možemo izračunati pomoću derivacija. Funkcija g definirana s

$$g(z) = (z-z_0)^n f(z)$$

holomorfna je u z_0 ili ima u z_0 uklonjiv singularitet, pa imamo formulu

$$a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} g^{(n-1)}(z).$$

Primjer 2. Razvijmo u Laurentov red oko točke π funkciju $f(z) = \frac{\sin z}{(z-\pi)^3}$. Imamo

$$f(z) = \frac{\sin z}{(z-\pi)^3} = \frac{\sin((z-\pi)+\pi)}{(z-\pi)^3} = \frac{-\sin(z-\pi)}{(z-\pi)^3} = \frac{-1}{(z-\pi)^3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-\pi)^{2n+1}}{(2n-1)!}$$

dakle

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-\pi)^{2n-2}}{(2n-1)!}.$$

Funkcija f u točki π ima dakle pol drugog reda. Zatim,

$$\begin{aligned} \operatorname{res}(f, \pi) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to \pi} \frac{d}{dz} \left((z-\pi)^2 \frac{\sin z}{(z-\pi)^3} \right) = \lim_{z \to \pi} \frac{d}{dz} \left(\frac{\sin z}{z-\pi} \right) \\ &= \lim_{z \to \pi} \frac{(z-\pi)\cos z - \sin z}{(z-\pi)^2} \end{aligned}$$

pa je

$$\operatorname{res}(f, \pi) = \lim_{z \to \pi} \frac{-(z-\pi)\sin z}{2(z-\pi)} = -\frac{1}{2} \lim_{z \to \pi} \sin z = 0.$$

Uočimo da smo reziduum mogli pročitati i direktno iz gornjeg Laurentovog reda.

Napomena. U predzadnjem koraku koristili smo L'Hospitalovo pravilo koje glasi:

Ako su funkcije f i g holomorfne u točki $a \in \mathbb{C}$ i vrijedi $f(a) = g(a) = 0$, onda je

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to a} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Dokažite L'Hospitalovo pravilo.

Zadatak 3.1.1. Izračunajte reziduume funkcija u njihovim singularitetima:

(a) $f(z) = \dfrac{1}{z^4 - z^2}$

(b) $f(z) = \dfrac{1}{z^n - 1}$

(c) $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1 - z}$

3.2 Teorem o reziduumima

Teorem. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija koja je holomorfna svugdje gdje je definirana osim u točkama $z_1, \ldots, z_n$ u kojima ima izolirane singularitete i neka je Γ jednostavno zatvoren u Ω nulhomotopan po dijelovima gladak put koji obuhvaća te singularitete. Tada vrijedi

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k),$$

pri čemu je integral u pozitivnom smjeru obilaska po krivulji Γ.

Zadatak 3.2.1. Izračunajte integrale:

(a) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{dz}{1+z^4}$, $\Gamma = S(1,1)$

(b) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{dz}{(z+1)^2(z^2+1)}$, $\Gamma = S(-1+i, 2)$

Definicija. Za funkciju $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ kažemo da *ima izoliran singularitet u točki* ∞ ako postoji $R > 0$ takav da je vijenac $V(0, R, \infty) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$ sadržan u Ω i da je funkcija f holomorfna na tom vijencu.

Definicija. Ako je ∞ izoliran singularitet funkcije f, onda *reziduum funkcije* f *u točki* ∞ definiramo formulom

$$\operatorname{Res}(f, \infty) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} f(z)\, dz,$$

gdje je $R > 0$ radijus takav da kružnica $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$ obuhvaća sve singularitete funkcije f u kompleksnoj ravnini $\mathbb{C}$.

Ako je f holomorfna na vijencu $V(0, \rho, \infty)$, onda je na tom vijencu možemo razviti u Laurentov red

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| > \rho$$

pa zbog

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} f(z)\, dz$$

vrijedi

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -a_{-1}.$$

Ako je f analitička funkcija svugdje na $\mathbb{C}$ osim u konačno mnogo točaka $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ u kojima ima izolirane singularitete, onda je zbroj svih reziduuma funkcije f jednak nuli,

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k) + \operatorname{Res}(f, \infty) = 0.$$

Kako se računa $\operatorname{Res}(f, \infty)$? Ako je f holomorfna na $V(0, \rho, \infty)$, onda je

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| > \rho$$

pa je za $|z| < \frac{1}{\rho}$

$$f(\tfrac{1}{z}) = \ldots + a_{-2}\, z^2 + a_{-1}\, z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots$$

i onda

$$\frac{1}{z^2} f(\tfrac{1}{z}) = \ldots + a_{-2} + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_0}{z^2} + \frac{a_1}{z^3} + \frac{a_2}{z^4} + \ldots$$

dakle,

$$a_{-1} = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2} f(\tfrac{1}{z}), 0 \right).$$

Slijedi

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2} f(\tfrac{1}{z}), 0 \right).$$

Stavimo

$$f_1(z) := f(\tfrac{1}{z}).$$

Ako f_1 ima uklonjiv singularitet u 0 (tada kažemo da je f_1 analitička u 0), onda je

$$f_1(z) = a_0 + a_{-1} z + a_{-2} z^2 + \ldots$$

pa je

$$f_1'(z) = a_{-1} + 2a_{-2} z + \ldots$$

iz čega slijedi

$$a_{-1} = f_1'(0),$$

to jest

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -f_1'(0).$$

Nadalje,

$$f_1'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f_1(z) - f_1(0)}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{z} \left(f(\tfrac{1}{z}) - f(\infty) \right) = \lim_{w \to \infty} w(f(w) - f(\infty)),$$

dakle,

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \lim_{z \to \infty} z(f(\infty) - f(z)).$$

Zadatak 3.2.2. Izračunajte reziduum u točki ∞ za funkciju

(a) $f(z) = \dfrac{z^2 - z + 1}{z^3 - 2z + 1}$

(b) $f(z) = z \sin \dfrac{1}{z+1}$

(c) $f(z) = \sin \dfrac{z}{z+1}$

Zadatak 3.2.3. Izračunajte integral

$$\int_\Gamma \frac{z^2}{z^4 - 1}\, dz, \quad \Gamma = S(0, 2).$$

Zadatak 3.2.4. Izračunajte integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{dz}{(z^4 - 1)^3 (z - 3)}.$$

Zadaća 3.2.

1. Izračunajte integrale

   (a) $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\Gamma \frac{(z-1)^n}{z^n - 1}\, dz$, gdje je Γ kružnica oko 0 radijusa $r > 1$ i $n \in \mathbb{N}$

   (b) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z^8 + 1)^2}$

   (c) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z+1)^4 (z^2 - 9)(z - 4)}$

   Sve krivulje su pozitivno orijentirane.

2. Odredite reziduum u točki ∞ za funkcije

   (a) $f(z) = \sin z \sin \dfrac{1}{z}$ (uočite da je ova funkcija parna funkcija)

   (b) $f(z) = z \cos^2 \dfrac{\pi}{z}$

   (c) $f(z) = \dfrac{\cos z}{(z^4 - 1)^2}$

   (d) $f(z) = \dfrac{1}{z^4 (z + 1)}$

3.3 Rouchéov teorem

Teorem. (Rouché) Neka su f i g holomorfne funkcije na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ i neka je $\Gamma \subseteq \Omega$ kontura čije je unutrašnje područje sadržano u Ω. Ako za svaki $z \in \Gamma$ vrijedi $|g(z)| < |f(z)|$, onda Γ obuhvaća jednak broj nultočaka funkcija f i $f + g$, pri čemu svaku nultočku treba ubrojiti onoliko puta kolika je njena kratnost.

Zadatak 3.3.1. Nađite broj nultočaka polinoma

$$p(z) = z^8 - 6z^6 - z^3 + 2$$

unutar kruga $K(0, 1)$.

Zadatak 3.3.2. Odredite broj rješenja jednadžbe

$$z^4 = \sin z$$

u području $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \pi\}$.

Zadatak 3.3.3. Odredite broj nultočaka polinoma $p(z) = z^5 + 5z - 1$

(a) unutar $K(0, 1)$

(b) u vijencu $V(0, 1, 2)$

Zadatak 3.3.4. Odredite broj nultočaka polinoma $p(z) = z^4 - z^2 + 1$ u desnoj poluravnini.

Zadaća 3.3.

1. Odredite broj nultočaka polinoma u zadanom području.
   (a) $4z^4 - 29z^2 + 25$, $\{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z| < 3\}$
   (b) $z^4 - z^3 - 4z + 1$, $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$
2. Odredite broj rješenja zadane jednadžbe u zadanom području.
   (a) $z^2 - \cos z = 0$, $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$
   (b) $e^z - 4z^n + 1 = 0$, $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

* 3. Pomoću Rouchéovog teorema dokažite Osnovni teorem algebre:

> Polinom stupnja n s koeficijentima u $\mathbb{C}$ ima točno n nultočaka u $\mathbb{C}$ računajući njihove kratnosti.

3.4 Računanje integrala funkcija realne varijable pomoću reziduuma

Pretpostavimo da je funkcija f definirana na čitavoj realnoj osi te da se može analitički proširiti na gornju poluravninu $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ do funkcije $z \mapsto f(z)$ tako da to proširenje ima najviše konačno mnogo singulariteta $z_1, \ldots, z_n$ u gornjoj poluravnini. Promatrajmo glavnu vrijednost integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx.$$

Odaberimo R dovoljno velik tako da polukružnica C_R obuhvati sve singularitete funkcije f u gornjoj poluravnini. Vrijedi

$$\int_{[-R,R]} f(z)\,dz + \int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}(f, z_k).$$

Po definiciji je

$$\int_{[-R,R]} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_{-R}^{R} f(t)\,dt,$$

gdje je γ parametrizacija $\gamma(t) = t$, $t \in [-R, R]$. Zanima nas pod kojim uvjetima vrijedi

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0$$

jer u tom slučaju imamo jednostavno

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}(f, z_k).$$

Jordanova lema. Neka je funkcija f holomorfna u gornjoj poluravnini osim možda u točkama $z_1, \ldots, z_n$ koje se ne nalaze na realnoj osi. Označimo

$$M(R) := \max_{z\in C_R} |f(z)|.$$

Tada vrijedi sljedeće.

(a) Ako je $\lim\limits_{R\to\infty} R\cdot M(R) = 0$, onda je $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0$.

(b) Ako je $\lim\limits_{R\to\infty} M(R) = 0$, onda je $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)e^{i\alpha z}\,dz = 0$ za $\alpha > 0$.

Zadatak 3.4.1. Izračunajte integral

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Integrali tipa $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\,dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x\,dx$, $\alpha > 0$. Po definiciji je

$$e^{i\alpha x} = \cos\alpha x + i\sin\alpha x.$$

Definiramo

$$F(z) = f(z)e^{i\alpha z}.$$

Funkcija F je holomorfna gdje je funkcija f holomorfna. Vrijedi

$$\int_{[-R,R]} F(z)\,dz + \int_{C_R} F(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{res}(F, z_k).$$

Ako za $M(R) = \max_{z \in C_R} |f(z)|$ vrijedi $\lim_{R\to\infty} M(R) = 0$, onda je po Jordanovoj lemi

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z) e^{i\alpha z}\, dz = 0$$

pa je

$$\lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]} F(z)\, dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{res}(F, z_k).$$

Sada zbog

$$\int_{[-R,R]} F(z)\, dz = \int_{-R}^{R} f(t) e^{i\alpha t}\, dt = \int_{-R}^{R} f(t) \cos \alpha t\, dt + i \int_{-R}^{R} f(t) \sin \alpha t\, dt$$

imamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x\, dx = \operatorname{Re}\Big(2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{res}(F, z_k)\Big)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \alpha x\, dx = \operatorname{Im}\Big(2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{res}(F, z_k)\Big)$$

Zadatak 3.4.2. Izračunajte integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + b^2}\, dx, \quad b > 0.$$

Zadatak 3.4.3. Izračunajte integral

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1}\, dx.$$

Zaobilaženje singulariteta na realnoj osi. Ako funkcija f ima konačno mnogo singulariteta na realnoj osi i oni su polovi prvog reda, možemo ih zaobići. Uzimamo konturu Γ koja se sastoji od polukružnice C_R, dijelova realne osi unutar intervala $[-R, R]$ i polukružnica γ_{r,z_j} koje zaobilaze singularitete na realnoj osi.

Ako je $z_0 \in \mathbb{R}$ pol prvog reda funkcije f, onda je

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \phi(z)$$

i funkcija ϕ je holomorfna u točki z_0. Dakle,

$$\int_{\gamma_{r,z_0}} f(z)\, dz = a_{-1} \int_{\gamma_{r,z_0}} \frac{dz}{z - z_0} + \int_{\gamma_{r,z_0}} \phi(z)\, dz.$$

Vrijedi

$$\left| \int_{\gamma_{r,z_0}} \phi(z)\, dz \right| \le \max_{z \in \gamma_{r,z_0}} |\phi(z)| \cdot \left| \int_{\gamma_{r,z_0}} dz \right| = \max_{z \in \gamma_{r,z_0}} |\phi(z)| \cdot \pi r \to 0 \text{ kad } r \to 0.$$

Uz to,

$$\int_{\gamma_{r,z_0}} \frac{dz}{z - z_0} = \int_{\pi}^{0} \frac{rie^{it}}{re^{it}}\, dt = -i\pi,$$

jer je γ_{r,z_0} negativno orijentirana, uz parametrizaciju $t \mapsto re^{it} + z_0$, za t u segmentu $[0, \pi]$, od π prema 0. Slijedi da je tada

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_{r,z_0}} f(z)\, dz = -a_{-1} i\pi = -i\pi \operatorname{res}(f, z_0).$$

Ako je

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\, dz = 0,$$

onda iz

$$2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{res}(f, z_k) = \int_\Gamma f(z)\, dz = \int_{C_R} f(z)\, dz + \int_{[-R,R]\setminus U} f(z)\, dz + \sum_{\operatorname{Im} z_k = 0} \int_{\gamma_{r,z_k}} f(z)\, dz,$$

gdje je

$$U = \bigcup_{\operatorname{Im} z_k = 0} \langle z_k - r, z_k + r\rangle,$$

imamo da je limes kad $R \to \infty$, $r \to 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{res}(f, z_k) + \pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k = 0} \operatorname{res}(f, z_k).$$

Zadatak 3.4.4. Izračunajte sljedeće integrale.

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(x^2 + b^2)}\, dx, \quad a, b > 0$

Zadatak 3.4.5. Izračunajte integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 ax}{x^2(x^2 + b^2)}\, dx, \quad a, b > 0.$$

Integrali oblika $\int_0^\infty \frac{f(x)}{x^\alpha}\, dx,\ 0 < \alpha < 1$, za f racionalnu funkciju bez singulariteta u $\mathbb{R}^+$. Pretpostavimo dodatno da postoji $R > 0$ i $m \geq 1$ tako da je

$$|f(x)| \leq \frac{M}{|x|^m} \text{ za sve } x \in \mathbb{R} \text{ takve da je } |x| \geq R.$$

Definiramo

$$F(z) = \frac{f(z)}{|z|^\alpha e^{i\alpha \arg z}}.$$

Ta je funkcija holomorfna svugdje na području

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg z < 2\pi\}$$

osim u konačno mnogo točaka. Uočimo da se F ne može definirati da bude neprekidna u točkama $x \in \mathbb{R}^+$ pozitivnog dijela realne osi.

Za put integracije $\Gamma_{R,r,\epsilon}$ uzimamo da se sastoji od ovih dijelova:

- C_R – pozitivno orijentiran luk kružnice $z = Re^{i\phi}$, $0 < \phi < 2\pi$, koja obuhvaća sve singularitete $z_1, \dots, z_n$
- c_r – negativno orijentiran luk kružnice $z = re^{i\phi}$, $0 < \phi < 2\pi$, dovoljno malog polumjera da ne obuhvaća niti jedan singularitet
- L_1 – dužina paralelna s realnom osi u gornjoj poluravnini na udaljenosti $\frac{\epsilon}{2}$, od točke manje kružnice do točke veće kružnice
- L_2 – dužina paralelna s realnom osi u donjoj poluravnini na udaljenosti $\frac{\epsilon}{2}$, od točke veće kružnice do točke manje kružnice

Promatrat ćemo limes integrala po toj krivulji kad $R \to \infty$, $r \to 0$, $\epsilon \to 0$. Vrijedi sljedeće.

- Kad $z \to x \in [r, R]$ uz $\operatorname{Im} z > 0$, njegov argument $\arg z \to 0$, pa
$$z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg z} \longrightarrow |z|^\alpha.$$
- Kad $z \to x \in [r, R]$ uz $\operatorname{Im} z < 0$, njegov argument $\arg z \to 2\pi$, pa
$$z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg z} \longrightarrow |z|^\alpha e^{i\alpha 2\pi}.$$

Kada pustimo $\epsilon \to 0$, dobivamo dakle

$$\int_r^R \frac{f(x)}{x^\alpha}\,dx + \int_{C_R} \frac{f(z)}{z^\alpha}\,dz + \int_R^r \frac{f(x)}{x^\alpha e^{2\alpha i\pi}}\,dx + \int_{c_R} \frac{f(z)}{z^\alpha}\,dz = 2\pi i \sum_{z_k \in D} \operatorname{res}\Big(z \mapsto \frac{f(z)}{z^\alpha}, z_k\Big).$$

Ovdje nismo mogli odmah uzeti krivulju koja sadrži segmente $[r, R]$ realne osi jer ona ne bi bila sadržana u D, a D je maksimalno područje na kojem f može biti definirana da bude neprekidna. Sada imamo

$$\left| \int_{C_R} \frac{f(z)}{z^\alpha}\,dz \right| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})}{(Re^{it})^\alpha} iRe^{it}\,dt \right| \le \int_0^{2\pi} \frac{M}{R^m} \frac{1}{R^\alpha} R\,dt = \frac{2M\pi}{R^{m+\alpha+1}} \longrightarrow 0$$

kad $R \to \infty$. Također,

$$\left| \int_{c_R} \frac{f(z)}{z^\alpha}\,dz \right| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{(re^{it})^\alpha} ire^{it}\,dt \right| \le \int_0^{2\pi} \frac{K}{r^\alpha} r\,dt = Kr^{1-\alpha} 2\pi \longrightarrow 0$$

kad $r \to 0$, pri čemu je K neka konstanta kojom je funkcija f ograničena na nekoj okolini točke 0, a ona postoji jer je f holomorfna u 0. Iz toga dobivamo, kada pustimo $R \to \infty$, $r \to 0$,

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x^\alpha}\,dx + \frac{1}{e^{2\pi i\alpha}} \int_\infty^0 \frac{f(x)}{x^\alpha}\,dx = 2\pi i \sum_{z_k \in D} \operatorname{res}\Big(z \mapsto \frac{f(z)}{z^\alpha}, z_k\Big)$$

iz čega slijedi formula

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x^\alpha}\,dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i\alpha}} \sum_{z_k \in D} \operatorname{res}\Big(z \mapsto \frac{f(z)}{z^\alpha}, z_k\Big).$$

Zadatak 3.4.6. Izračunajte integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}.$$