Obrada signala

prvi kolokvij

1. prosinca 2022.

1. Nađite realne i kompleksne Fourierove koeficijente periodičke funkcije f s periodom T definirane s

   a) $f(t) = t$ na $[0, T]$,

   b) $f(t) = t^3$ na $[0, T]$.

2. Neka je $\mathbf{x} = \left(\cos^2(2\pi k/N)\right)_{k=0}^{N-1}$. Izračunajte $F_N \mathbf{x}$.

3. Neka je $\mathbf{x}_1 = (1, 3)$, $\mathbf{x}_2 = (2, 4)$. Izračunajte $\mathrm{DFT}_2 \mathbf{x}_1$ i $\mathrm{DFT}_2 \mathbf{x}_2$. Izračunajte $\mathrm{DFT}_4(1, 2, 3, 4)$ pomoću $\mathrm{DFT}_2 \mathbf{x}_1$ i $\mathrm{DFT}_2 \mathbf{x}_2$.
   Napomena: Direktno računanje $\mathrm{DFT}_4(1, 2, 3, 4)$ će vam donijeti 0 bodova.

4. Dani su $\mathbf{s}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ i neka je $M \geq 2N - 1$. Definiramo vektore iz $\mathbb{R}^M$ s

$$\tilde{\mathbf{s}} = (s_0, s_1, \ldots, s_{N-1}, 0, \ldots, 0, s_1, \ldots, s_{N-1})^\top,$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}, 0, \ldots, 0)^\top.$$

   Dokažite da se prvih N elemenata od $\mathbf{s} \circledast \mathbf{x}$ i $\tilde{\mathbf{s}} \circledast \tilde{\mathbf{x}}$ poklapaju.

5. a) Neka je filter zadan formulom

$$z_n = \frac{1}{4} x_{n+1} + \frac{1}{2} x_n + \frac{1}{2} x_{n-1} + \frac{1}{4} x_{n-2}.$$

   Nađite kompaktnu notaciju za ovaj filter te napišite odgovarajuću Toeplitzovu matricu za $N = 8$.

   b) Neka je dana Toeplitzova matrica

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Nađite kompaktnu notaciju odgovarajućeg filtera.