

## Opća topologija

Literatura:

1. James R. Munkres, *Topology*, Second edition, Prentice Hall (2000)

Dodatna literatura:

2. I. M. Singer, J.A. Thorpe, *Lecture notes on Elementary Topology and Geometry*, Springer (1967)

3. W. Fulton, *Algebraic Topology, a first course*, Springer (1997)

# 1. Topološki prostori i neprekidne funkcije

## Definicija

**Topologija** na skupu  $X$  je familija  $\mathcal{T}$  podskupova od  $X$  sa sljedećim svojstvima:

1.  $\emptyset$  i  $X$  su u  $\mathcal{T}$ .
2. Unija elemenata proizvoljne potfamilije od  $\mathcal{T}$  je u  $\mathcal{T}$ .
3. Presjek elemenata proizvoljne konačne potfamilije od  $\mathcal{T}$  je u  $\mathcal{T}$ .

**Topološki prostor** je uređeni par  $(X, \mathcal{T})$  koji se sastoji od skupa  $X$  i topologije  $\mathcal{T}$  na  $X$ . Kažemo da je podskup  $U$  od  $X$  **otvoren skup** od  $X$  ako  $U$  pripada familiji  $\mathcal{T}$ .

Primjeri: diskretna, trivijalna, kofinitna topologija

## Definicija

Neka su  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{T}'$  dvije topologije na skupu  $X$ . Ako  $\mathcal{T}' \supseteq \mathcal{T}$  kažemo da je  $\mathcal{T}'$  **finija (veća)** od  $\mathcal{T}$ , ili da je  $\mathcal{T}$  **grublja (manja)** od  $\mathcal{T}'$ . U ta dva slučaja kažemo i da su  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{T}'$  **usporedive**.

# Zadavanje topologije bazom

## Definicija

**Baza topologije** (možda pravilnije: baza za topologiju) na skupu  $X$  je familija  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$  podskupova od  $X$  za koju vrijedi:

1. Za svaki  $x \in X$  postoji barem jedan  $B \in \mathcal{B}$  koji sadrži  $x$ .
2. Ako  $x$  pripada presjeku dva elementa  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ , tada postoji  $B_3 \in \mathcal{B}$  koji sadrži  $x$  takav da je  $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ .

Ako  $\mathcal{B}$  zadovoljava ta dva uvjeta, definiramo **topologiju**  $\mathcal{T}$  **generiranu bazom**  $\mathcal{B}$  na sljedeći način: Podskup  $U$  od  $X$  je otvoren u  $X$  (tj.  $U \in \mathcal{T}$ ) ako za svaki  $x \in U$  postoji  $B \in \mathcal{B}$  takav da je  $x \in B \subseteq U$  (**Prvi način generiranja topologije iz baze.**)

Specijalno, svaki element od  $\mathcal{B}$  je ujedno i element of  $\mathcal{T}$ .

### Lema (13.1, Drugi način generiranja topologije iz baze)

Neka je  $X$  skup i  $\mathcal{B}$  baza topologije  $\mathcal{T}$  na  $X$ . Tada je  $\mathcal{T}$  familija svih proizvoljnih unija elemenata iz  $\mathcal{B}$ .

### Lema (13.2, Kako prepoznati neku bazu zadane topologije?)

Neka je  $(X, \mathcal{T})$  topološki prostor. Pretpostavimo da je  $\mathcal{C}$  familija otvorenih podskupova od  $X$  ( $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$ ) takva da za svaki otvoreni skup  $U \in \mathcal{T}$  i svaki  $x \in U$  postoji  $C \in \mathcal{C}$  takav da je  $x \in C \subseteq U$ . Tada je  $\mathcal{C}$  baza topologije  $\mathcal{T}$ .

### Lema (13.3)

Neka su  $\mathcal{B}$  i  $\mathcal{B}'$  baze topologija  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{T}'$  redom na  $X$ . Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

1.  $\mathcal{T}'$  je finija od  $\mathcal{T}$ .
2. Za svaki  $x \in X$  i za svaki  $B \in \mathcal{B}$  koji sadrži  $x$ , postoji  $B' \in \mathcal{B}'$  takav da je  $x \in B' \subseteq B$ .

Primjeri: baze topologije na  $\mathbb{R}^2$  (otv. krugovi; otv. pravokutnici) i usporedba generiranih topologija, jedna baza diskretne topologije

## Definicija

**Podbaza**  $\mathcal{S}$  topologije na  $X$  je familija podskupova od  $X$  čija je unija  $X$  (samo uvjet pokrivanja!) **Topologija generirana podbazom**  $\mathcal{S}$  definira se kao familija  $\mathcal{T}$  svih proizvoljnih unija proizvoljnih konačnih presjeka elemenata iz  $\mathcal{S}$ .

## Napomena

Svi konačni presjeci elemenata iz  $\mathcal{S}$  čine bazu topologije.

Primjer: 3 zanimljive topologije na  $\mathbb{R}$ : standardna, *lower limit* topologija i *K*-topologija

# Uređajna topologija

## Definicija

Neka je  $(X, <)$  (totalno) uređen skup koji ima više od jednog elementa. Neka je  $\mathcal{B}$  familija svih skupova sljedećeg oblika:

1. Svi (otvoreni) intervali  $(a, b)$  od  $X$ .
2. Svi poluotvoreni intervali oblika  $[a_0, b)$ , gdje je  $a_0$  minimum od  $X$  ako postoji.
3. Svi poluotvoreni intervali oblika  $(a, b_0]$ , gdje je  $b_0$  maksimum od  $X$  ako postoji.

Familija  $\mathcal{B}$  je baza topologije na  $X$  koju zovemo **uređajna topologija**.

## Napomena

Sve otvorene zrake  $(a, +\infty)$ ,  $(-\infty, b)$ ,  $a, b \in X$ , od  $X$  tvore podbazu uređajne topologije.

Primjeri uređajnih topologija.

# Produktna topologija

## Definicija

Neka su  $X$  i  $Y$  topološki prostori. **Produktna topologija** na  $X \times Y$  je topologija čija je baza familija  $\mathcal{B}$  svih skupova oblika  $U \times V$ , gdje je  $U$  otvoreni skup u  $X$  i  $V$  otvoreni skup u  $Y$ .

## Napomena

$\mathcal{B}$  nije nužno topologija na  $X \times Y$ , već baza topologije!

## Teorem (15.1)

Ako je  $\mathcal{B}$  baza topologije na  $X$  i  $\mathcal{C}$  baza topologije na  $Y$ , tada je familija  $\mathcal{D} = \{B \times C : B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}\}$  baza produktne topologije na  $X \times Y$ .

Standardna topologija na  $\mathbb{R}^2$ .

# Produktna topologija izražena u terminima podbaze

## Definicija

Neka je  $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$  definirano sa  $\pi_1(x, y) = x$  i neka je  $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$  definirano sa  $\pi_2(x, y) = y$ . Preslikavanja  $\pi_1$  i  $\pi_2$  zovemo **projekcije** na prvi, odnosno drugi, faktor.

## Teorem (15.2)

Familija

$$\mathcal{S} = \{\pi_1^{-1}(U) = U \times Y : U \text{ je otvoren u } X\} \cup \\ \cup \{\pi_2^{-1}(V) = X \times V : V \text{ je otvoren u } Y\}$$

je podbaza produktne topologije na  $X \times Y$ .

Dokaz.

## Definicija

Neka je  $X$  topološki prostor s topologijom  $\mathcal{T}$ . Ako je  $Y$  podskup od  $X$ , familija  $\mathcal{T}_Y = \{Y \cap U : U \in \mathcal{T}\}$  je topologija na  $Y$  koju zovemo **relativna topologija**, a  $Y$  s tom topologijom zovemo **(topološki) potprostor** od  $X$ .

## Lema (16.1)

Ako je  $\mathcal{B}$  baza topologije na  $X$  tada je familija  $\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$  baza relativne topologije na  $Y$ .

## Lema (16.2)

Neka je  $Y$  potprostor od  $X$ . Ako je  $U$  otvoren u  $Y$  (tj.  $U \in \mathcal{T}_Y$ ) i  $Y$  otvoren u  $X$  (tj.  $Y \in \mathcal{T}$ ), tada je  $U$  otvoren u  $X$  (tj.  $U \in \mathcal{T}$ ).

# Relativna topologija i produktna i uređajna topologija

## Teorem (16.3)

Ako je  $A$  potprostor od  $X$  i  $B$  potprostor od  $Y$ , onda je produktna topologija na  $A \times B$  ista kao i relativna topologija na  $A \times B$  u odnosu na produktnu topologiju na  $X \times Y$ .

Dokaz.

## Napomena

Potprostor topološkog prostora s uređajnom topologijom je uređen skup, no uređajna topologija na njemu ne mora se podudarati s naslijeđenom (relativnom) topologijom!

Kontraprimjer i primjeri.

## Definicija

Neka je  $X$  uređen skup. Kažemo da je podskup  $Y$  od  $X$  **konveksan** u  $X$  ako za svaki par točaka  $a < b$  od  $Y$ , cijeli interval  $(a, b)$  točaka od  $X$  leži u  $Y$ .

Pr. U uređenom skupu *intervali, zrake* su konveksni.

**Teorem (16.4, Diskretna i uređajna topologija komutiraju uz pp. konveksnosti)**

Neka je  $X$  uređen skup s uređajnom topologijom i  $Y$  konveksan podskup od  $X$ . Tada je uređajna topologija na  $Y$  jednaka relativnoj topologiji.

**Dokaz.**

## Napomena

Kad ne navedemo o kojoj topologiji na podskupu se radi, uvijek mislimo na **relativnu** topologiju!

# Zatvoreni skupovi i gomilišta.

## Definicija

Kažemo da je podskup  $A$  topološkog prostora  $X$  **zatvoren** ako je skup  $X \setminus A$  otvoren.

Primjeri zatvorenih skupova.

## Teorem (17.1)

Neka je  $X$  topološki prostor. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:

1.  $\emptyset$  i  $X$  su zatvoreni.
2. Proizvoljni presjeci zatvorenih skupova su zatvoreni.
3. Konačne unije zatvorenih skupova su zatvorene.

### Teorem (17.2)

Neka je  $Y$  potprostor od  $X$ . Skup  $A$  je zatvoren u  $Y$  ako i samo ako je jednak presjeku nekog zatvorenog skupa od  $X$  s  $Y$ .

### Teorem (17.3)

Neka je  $Y$  potprostor od  $X$ . Ako je  $A$  zatvoren u  $Y$  i  $Y$  zatvoren u  $X$  tada je  $A$  zatvoren u  $X$ .

## Definicija

Neka je  $A$  podskup topološkog prostora  $X$ . **Nutrinu** od  $A$ ,  $\text{Int } A$ , definiramo kao uniju svih otvorenih skupova ( $u X$ ) sadržanih u  $A$ , a **zatvarač** od  $A$ ,  $\text{Cl } A$ , kao presjek svih zatvorenih skupova (zatvorenih u  $X$ ) koji sadrže  $A$ .

## Teorem (17.4)

Neka je  $Y$  potprostor od  $X$  i  $A$  podskup od  $Y$ . Tada je  $\text{Cl}_Y A = \text{Cl } A \cap Y$ , pri čemu  $\text{Cl}_Y A$  označava zatvarač od  $A$  u  $Y$ .

Primjer: zatvarač skupa ovisi o ambijentnom prostoru.

## Teorem (17.5, Karakterizacija zatvarača)

Neka je  $A$  podskup topološkog prostora  $X$ .

1. Tada je  $x \in \text{Cl } A$  ako i samo ako svaki otvoreni skup  $U$  koji sadrži  $x$  siječe  $A$ .
2. Neka je  $\mathcal{B}$  baza topologije na  $X$ . Tada je  $x \in \text{Cl } A$  ako i samo ako svaki  $B \in \mathcal{B}$  koji sadrži  $x$  siječe  $A$ .

## Definicija

Neka je  $A$  podskup topološkog prostora  $X$  i  $x$  točka od  $X$ . Kažemo da je  $x$  **gomilište** od  $A$  ako svaka okolina od  $x$  siječe  $A$  u nekoj točki različitoj od  $x$ . (Skup  $U$  zovemo **okolina** točke  $x$  ako je  $U$  otvoren i sadrži  $x$ .)

Primjeri: zatvarači i gomilišta nekih skupova.

## Teorem (17.6, Karakterizacija zatvarača preko gomilišta)

Neka je  $A$  podskup topološkog prostora  $X$  i  $A'$  skup svih gomilišta od  $A$ . Tada je  $\text{Cl} A = A \cup A'$ .

## Korolar (17.7)

Podskup topološkog prostora je zatvoren ako i samo ako sadrži sva svoja gomilišta.

# Hausdorffovi prostori

## Definicija (Aksiomi separacije)

Topološki prostor  $X$  zovemo **Hausdorffov** ili  $T_2$ -**prostor** ako za svaki par različitih točaka  $x_1, x_2$  od  $X$ , postoje disjunktne okoline  $U_1$  od  $x_1$  i  $U_2$  od  $x_2$ .

Topološki prostor u kojem je svaki jednočlan podskup (tj. točka) zatvoren skup zovemo  $T_1$ -**prostor**<sup>1</sup>.

Primjeri.

## Teorem (17.8)

Svaki konačan skup u Hausdorffovom prostoru je zatvoren. Specijalno, svi jednočlani podskupovi (točke) su zatvoreni.

---

<sup>1</sup>Alternativno: Kažemo da je topološki prostor  $X$   $T_1$ -prostor ako za svake dvije različite točke  $x_1 \neq x_2$ ,  $x_1, x_2 \in X$ , postoji okolina točke  $x_1$  koja ne sadrži  $x_2$  i obrnuto.

## Teorem (17.9)

Neka je  $X$   $T_1$ -prostor,  $A \subseteq X$ . Točka  $x$  je gomilište od  $A$  ako i samo ako svaka okolina od  $x$  sadrži **beskonačno mnogo** točaka od  $A$ .

Dokaz.

Primjer: prostora koji nije  $T_1$  i Teorem ne vrijedi.

## Definicija

Kažemo da niz točaka  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  u topološkom prostoru  $X$  **konvergira** prema točki  $x$  iz  $X$  ako za svaku okolinu  $U$  od  $x$  postoji prirodni broj  $N$  takav da je  $x_n \in U$  za svaki  $n \geq N$ .

Teorem (17.10, jedinstvenost limesa niza u Hausdorffovom prostoru)

Ako je  $X$  Hausdorffov prostor tada niz točaka iz  $X$  konvergira prema najviše jednoj točki iz  $X$ .

Primjer: nejedinstvenost limesa u nekom ne-Hausdorffovom prostoru.

Teorem (17.11)

Svaki uređen skup s uređajnom topologijom je Hausdorffov prostor.  
Produkt dva Hausdorffova prostora je Hausdorffov.  
Potprostor Hausdorffovog prostora je Hausdorffov.

# Neprekidnost

## Definicija

Neka su  $X$  i  $Y$  topološki prostori. Kažemo da je funkcija  $f : X \rightarrow Y$  **neprekidna** ako je za svaki otvoreni podskup  $V$  od  $Y$  skup  $f^{-1}(V)$  otvoreni podskup od  $X$ .

## Napomena

Dovoljno provjeriti na elementima baze  $\mathcal{B}$ , čak i podbaze  $\mathcal{S}$  od  $Y$ !

Primjer ovisnosti neprekidnosti o izboru topologija na  $X$  i na  $Y$ .

## Teorem (18.1)

Neka su  $X$  i  $Y$  topološki prostori i  $f : X \rightarrow Y$ . Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

1.  $f$  je neprekidna.
2. Za svaki podskup  $A$  od  $X$  vrijedi  $f(\text{Cl } A) \subseteq \text{Cl } f(A)$ . ('bliske točke preslikava blizu').
3. Za svaki zatvoreni skup  $B$  od  $Y$ , skup  $f^{-1}(B)$  je zatvoren u  $X$ .
4. Za svaki  $x \in X$  i svaku okolinu  $V$  od  $f(x)$  postoji okolina  $U$  od  $x$  takva da je  $f(U) \subseteq V$  (neprekidnost u svakoj točki  $x \in X$ ).

## Napomena (Neprekidnost funkcije u točki)

**4.** koristimo za definiciju neprekidnosti  $f : X \rightarrow Y$  **u točki**  $x \in X$ :  
Ako za točku  $x \in X$  i za svaku okolinu  $V$  od  $f(x)$  postoji okolina  $U$  od  $x$  takva da je  $f(U) \subseteq V$ , kažemo da je  $f$  **neprekidna u točki**  $x$ .

## Definicija

Neka su  $X$  i  $Y$  topološki prostori. Kažemo da je funkcija  $f : X \rightarrow Y$  **homeomorfizam** ako je  $f$  bijekcija i ako su i  $f$  i  $f^{-1}$  neprekidne.

Ako je  $f : X \rightarrow Y$  injekcija, te ako je  $f : X \rightarrow f(X)$  homeomorfizam, kažemo da je  $f$  **(topološko) ulaganje** prostora  $X$  u  $Y$ .

→ bijektivna korespondencija topoloških prostora koja čuva topološka svojstva

Primjer: neprekidna bijekcija koja nije homeomorfizam.

## Teorem (18.2, Lokalna formulacija neprekidnosti)

Ako se  $X$  može prikazati kao unija **otvorenih** skupova  $X = \cup_{\alpha} U_{\alpha}$  takvih da su restrikcije  $f|_{U_{\alpha}}$  neprekidne za svaki  $\alpha$ , tada je  $f$  neprekidna na  $X$ .

## Teorem (18.3, Lema o lijepljenju)

Neka je  $X = A \cup B$ , pri čemu su  $A$  i  $B$  **zatvoreni** u  $X$ . Neka su  $f : A \rightarrow Y$  i  $g : B \rightarrow Y$  neprekidne. Ako je  $f(x) = g(x)$  za svaki  $x \in A \cap B$  tada je neprekidna i funkcija  $h : X \rightarrow Y$  definirana sa  $h(x) = f(x)$  ako je  $x \in A$  i  $h(x) = g(x)$  ako je  $x \in B$ .

## Teorem (18.4)

Neka je  $f : A \rightarrow X \times Y$  definirana sa  $f(a) = (f_1(a), f_2(a))$ .  $f$  je neprekidna ako i samo ako su (koordinatne funkcije)  $f_1 : A \rightarrow X$  i  $f_2 : A \rightarrow Y$  neprekidne.

Dokaz.

# Topologije na produktu topoloških prostora

## Definicija

Neka je  $J$  neki skup indeksa. Za dani skup  $X$  definiramo  **$J$ -torku** elemenata skupa  $X$  kao funkciju  $x : J \rightarrow X$ . Za  $\alpha \in J$  vrijednost  $x(\alpha)$  označavamo s  $x_\alpha$  i nazivamo  **$\alpha$ -tom koordinatom** od  $x$ , a funkciju  $x$  najčešće označavamo s  $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ . Skup svih  $J$ -torki iz  $X$ , tj. skup svih funkcija s  $J$  u  $X$ , označavamo s  $X^J$ .

## Definicija

Neka je  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$  indeksirana familija skupova i neka je  $X = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ . Definiramo **Kartezijev produkt**  $\prod_{\alpha \in J} A_\alpha$  te indeksirane familije kao skup svih  $J$ -torki  $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$  elemenata iz  $X$  takvih da je  $x_\alpha \in A_\alpha$  za svaki  $\alpha \in J$ . Dakle, to je skup svih funkcija  $x : J \rightarrow \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$  takvih da je  $x(\alpha) \in A_\alpha$  za svaki  $\alpha \in J$ .

## Napomena

Ako je  $A_\alpha = X$ , za svaki  $\alpha \in J$ , tada je  $\prod_{\alpha \in J} A_\alpha = X^J$ .

# Dvije topologije na Kartezijevom produktu

## Definicija (box topologija)

Neka je  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$  indeksirana familija topoloških prostora. Uzmimo za bazu topologije produkta  $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$  familiju svih skupova oblika  $\prod_{\alpha \in J} U_\alpha$ , gdje su  $U_\alpha$  otvoreni u  $X_\alpha$  za svaki  $\alpha \in J$ . Topologiju generiranu tom bazom zovemo **box topologija (kutijasta topologija)**.

## Definicija (produktna topologija)

Funkcije  $\pi_\beta : \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \rightarrow X_\beta$  definirane s  $\pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha \in J}) = x_\beta$ ,  $\beta \in J$ , zovemo **koordinatne projekcije**.

Neka je

$$\mathcal{S} = \cup_{\alpha \in J} \{ \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) : U_\alpha \text{ otvoren u } X_\alpha \}.$$

Topologiju generiranu podbazom  $\mathcal{S}$  zovemo **produktna topologija**. Skup  $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$  s produktnom topologijom zovemo **produkt topoloških prostora**.

## Teorem (19.1)

Box topologija na  $\prod X_\alpha$  generirana je bazom topologije čiji su elementi skupovi oblika  $\prod U_\alpha$ , gdje je  $U_\alpha$  otvoren u  $X_\alpha$  za svaki  $\alpha$ .  
Produktna topologija na  $\prod X_\alpha$  generirana je bazom čiji su elementi skupovi oblika  $\prod U_\alpha$ , gdje je  $U_\alpha$  otvoren u  $X_\alpha$  za svaki  $\alpha$  i  $U_\alpha = X_\alpha$  **osim za konačno mnogo**  $\alpha$ .

Primijetimo da su za konačne produkte  $\prod_{\alpha=1}^n X_\alpha$  te dvije topologije jednake. Općenito, box topologija je finija od produktne topologije.

Podrazumijevat ćemo da je produkt  $\prod X_\alpha$  opremljen produktnom topologijom, ako eksplicitno ne kažemo drugačije.

## Teorem (19.2, Dovoljno je uzeti produkte baznih elemenata!)

Neka je topologija na svakom prostoru  $X_\alpha$  dana bazom  $\mathcal{B}_\alpha$ . Tada je familija svih skupova oblika  $\prod_{\alpha \in J} B_\alpha$ , gdje je  $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$  za svaki  $\alpha$ , baza box topologije na  $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ .

Familija svih skupova istog oblika, gdje je  $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$  za konačno mnogo indeksa  $\alpha$  i  $B_\alpha = X_\alpha$  za sve preostale indekse, je baza produktne topologije na  $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ .

Primjer:  $\mathbb{R}^n$ .

# Svojstva zajednička objema topologijama

## Teorem (19.3)

Neka je  $A_\alpha$  potprostor od  $X_\alpha$  za svaki  $\alpha \in J$ . Tada je  $\prod A_\alpha$  potprostor od  $\prod X_\alpha$  bilo da su oba prostora opremljena box topologijom, bilo produktnom topologijom.

## Teorem (19.4)

Ako je svaki  $X_\alpha$  Hausdorffov prostor, tada je  $\prod X_\alpha$  Hausdorffov prostor i sa box topologijom i sa produktnom topologijom.

## Teorem (19.5)

Neka je  $A_\alpha \subseteq X_\alpha$  za svaki  $\alpha$ . Tada i u produktnoj i u box topologiji vrijedi  $\prod \text{Cl } A_\alpha = \text{Cl } \prod A_\alpha$ .

# Zašto je produktna topologija *bolja*?

## Teorem (19.6)

Neka je funkcija  $f : A \rightarrow \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$  dana sa  $f(a) = (f_\alpha(a))_{\alpha \in J}$ , gdje je  $f_\alpha : A \rightarrow X_\alpha$  za svaki  $\alpha$ . Neka je  $\prod X_\alpha$  opremljen produktnom topologijom. Tada je funkcija  $f$  neprekidna ako i samo ako je svaka koordinatna funkcija  $f_\alpha$  neprekidna.

Dokaz.

## Napomena

Teorem ( $\Leftarrow$ ) ne vrijedi za box topologiju na Kartezijevom produktu!

Kontraprimjer.

# Metričke topologije

## Definicija

Neka je  $d$  metrika na skupu  $X$ . Tada je familija svih  $\epsilon$ -kugala  $B_d(x, \epsilon)$ , za  $x \in X$  i  $\epsilon > 0$ , baza topologije na  $X$  koju zovemo **metrička topologija** inducirana metrikom  $d$ .

Primjeri metričkih topologija.

## Napomena (Kriterij otvorenosti u metričkoj topologiji)

Skup  $U \subseteq X$  je otvoren u  $X$  u metričkoj topologiji induciranoj metrikom  $d$  ako i samo ako oko svake točke  $y \in U$  postoji  $\epsilon > 0$  takav da  $B_d(y, \epsilon) \subseteq U$ .

## Definicija

Neka je  $(X, \mathcal{T})$  topološki prostor. Kažemo da je  $(X, \mathcal{T})$  **metrizabilan** ako postoji metrika  $d$  na skupu  $X$  koja inducira topologiju  $\mathcal{T}$  na  $X$ .

Kasnije: uvjeti za metrizabilnost topoloških prostora, jer je u metričkim prostorima lakše dokazivati (npr. *Urysohnov teorem metrizacije* itd.)

## Definicija

Neka je  $X$  metrički prostor s metrikom  $d$ . Za podskup  $A$  od  $X$  kažemo da je **omeđen** ako postoji broj  $M$  takav da je  $d(a_1, a_2) \leq M$  za svaki  $a_1, a_2 \in A$ . Ako je  $A$  omeđen i neprazan definiramo **dijametar** od  $A$  kao broj  $\text{diam } A = \sup\{d(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in A\}$ .

## Teorem (20.1)

Neka je  $X$  metrički prostor s metrikom  $d$ . Definiramo  $\bar{d} : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  sa  $\bar{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$ . Tada je  $\bar{d}$  metrika koja inducira istu topologiju na  $X$  kao i metrika  $d$ .

Metriku  $\bar{d}$  zovemo **standardna omeđena metrika** pridružena metrici  $d$ .

Dokaz. Familija kugala radijusa manjeg od 1 su baza svake metričke topologije metrizablenog prostora. Za metričke topologije inducirane s  $d, d'$  se te familije podudaraju.

## Napomena

Posljedica teorema: Omeđenost metrizablenog topološkog prostora nije topološko, nego metričko svojstvo!

# Metrizabilnost produktne i box topologije na $\mathbb{R}^n$ , $\mathbb{R}^\omega$ , $\mathbb{R}^J$

## Lema (20.2)

Neka su  $d$  i  $d'$  metrike na skupu  $X$  te  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{T}'$  topologije inducirane danim metrikama redom. Tada je topologija  $\mathcal{T}'$  finija od topologije  $\mathcal{T}$  ako i samo ako za svaki  $x \in X$  i svaki  $\epsilon > 0$ , postoji  $\delta > 0$  takav da je  $B_{d'}(x, \delta) \subseteq B_d(x, \epsilon)$ .

## Teorem (20.3)

Topologije na  $\mathbb{R}^n$  inducirane euklidskom metrikom  $d$  i kvadratnom metrikom  $\rho$  jednake su produktnoj topologiji na  $\mathbb{R}^n$  (stoga i box topologiji).

(Euklidska metrika  $d = d_2$  dana je sa  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ ,

a kvadratna metrika  $\rho = d_\infty$  sa

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, \dots, n\}.)$$

Dokaz.  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \sqrt{n}\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ .

## Definicija (Generalizacija kvadratne metrike na $\mathbb{R}^J$ )

Neka su  $J$  skup indeksa i  $x = (x_\alpha)_{\alpha \in J}$  i  $y = (y_\alpha)_{\alpha \in J}$  točke iz  $\mathbb{R}^J$ . Definiramo metriku  $\bar{\rho}$  na  $\mathbb{R}^J$  sa  $\bar{\rho}(x, y) = \sup\{\bar{d}(x_\alpha, y_\alpha) : \alpha \in J\}$ , gdje je  $\bar{d}$  standardna omeđena metrika na  $\mathbb{R}$ . Metriku  $\bar{\rho}$  zovemo **uniformna metrika** na  $\mathbb{R}^J$ , a topologiju koju ona inducira zovemo **uniformna topologija**.

Ime: Na prostoru funkcija  $\mathbb{R}^X$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , konvergencija niza funkcija u uniformnoj topologiji je uniformna konvergencija na  $X$ !

## Teorem (20.4)

Uniformna topologija na  $\mathbb{R}^J$  je finija od produktne topologije i grublja od box topologije. Sve tri topologije su različite ako je  $J$  beskonačan (iste ako je konačan).

Dokaz.

Teorem (20.5, Metrizabilnost produktne topologije na  $\mathbb{R}^\omega$ )

Za  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^\omega$  definiramo  $D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\bar{d}(x_i, y_i)}{i} \right\}$ . Tada je  $D$  metrika i inducira produktnu topologiju na  $\mathbb{R}^\omega$ .

Dokaz.

## Napomena

Poopćavanjem dokaza može se pokazati da je svaki prebrojiv Kartezijev produkt metrizabilnih prostora metrizabilan.

## Napomena (Pokazat ćemo kasnije...)

1. Box topologija na  $\mathbb{R}^\omega$  NIJE metrizabilna.
2. Neprebrojiv produkt  $\mathbb{R}^J$  NIJE metrizabilan.

## Teorem (21.1, $\epsilon - \delta$ karakterizacija neprekidnosti u metrizabilnim prostorima)

Neka je  $f : X \rightarrow Y$ , pri čemu su  $X$  i  $Y$  metrizabilni s metrikama  $d_X$  i  $d_Y$  redom. Tada je neprekidnost od  $f$  ekvivalentna zahtjevu da za svaki  $x \in X$  i za svaki  $\epsilon > 0$  postoji  $\delta > 0$  takav da  $d_X(x, y) < \delta$  implicira  $d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$ .

## Lema (21.2)

Neka je  $X$  topološki prostor i  $A \subseteq X$ . Ako postoji niz točaka u  $A$  koji konvergira prema  $x$ , tada je  $x \in \text{Cl}A$ . Ako je  $X$  metrizabilan, vrijedi i obrat.

Dokaz ( $\Leftarrow$ ). Napomena: dovoljno: 1-prebrojiv.

## Teorem (21.3, Heineova karakterizacija neprekidnosti u metrizabilnim prostorima)

Neka je  $f : X \rightarrow Y$ . Ako je funkcija  $f$  neprekidna, tada za svaki konvergentni niz  $x_n \rightarrow x$  u  $X$ , niz  $f(x_n)$  konvergira prema  $f(x)$ . Ako je  $X$  metrizabilan, vrijedi i obrat.

Dokaz: ( $\Leftarrow$ )  $f$  nepr. akko  $f(\text{Cl}(A)) \subseteq \text{Cl}(f(A))$ ,  $A \subseteq X$ .

## Definicija

Za prostor  $X$  kažemo da ima **prebrojivu bazu okolina u točki**  $x$  ako postoji prebrojiva familija  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  okolina od  $x$  sa svojstvom da svaka okolina  $U$  od  $x$  sadrži najmanje jedan od skupova  $U_n$ . Za prostor  $X$  koji ima prebrojivu bazu okolina u svakoj svojoj točki kažemo da zadovoljava **prvi aksiom prebrojivosti**.

Primijetimo da obrati prethodne leme i teorema vrijede i ako  $X$  zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti (tj. ne mora biti metrizable). **Dokaz Leme (21.2) ( $\Leftarrow$ ).**

## Napomena

Metrizable prostor uvijek zadovoljava 1. aksiom prebrojivosti!  
Obrat nije nužno istinit (Npr. *Sorgenfreyev pravac*  $\mathbb{R}_\ell$ ).

**Dokaz da  $\mathbb{R}^\omega$  u box topologiji nije metrizable, neprebrojiv produkt  $\mathbb{R}$  sa samim sobom nije metrizable. Pokazujemo zapravo: ne zadovoljava čak niti 1. aksiom prebrojivosti.**

## Definicija

Neka je  $f_n : X \rightarrow Y$  niz funkcija sa skupa  $X$  u metrički prostor  $Y$  s metrikom  $d$ . Kažemo da niz  $(f_n)$  **uniformno konvergira** prema funkciji  $f : X \rightarrow Y$  ako za svaki  $\epsilon > 0$  postoji prirodan broj  $N$  takav da je  $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$  za svaki  $n > N$  i sve  $x \in X$ .

## Teorem (21.6, Neprekidnost uniformnog limesa)

Neka je  $f_n : X \rightarrow Y$  niz neprekidnih funkcija s topološkog prostora  $X$  u metrički prostor  $Y$ . Ako niz  $(f_n)$  uniformno konvergira prema  $f$ , tada je  $f$  neprekidna.

## Napomena (Konvergencija niza realnih funkcija kao konvergencija u topološkim prostorima funkcija)

Neka je  $X$  proizvoljan skup,  $f, f_n \in \mathbb{R}^X$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

(1) Niz funkcija  $(f_n)$  konvergira *uniformno* k  $f$  na  $X$  ako i samo ako  $(f_n) \rightarrow f$  u uniformnoj metrici  $\bar{\rho}$  (tj. uniformnoj topologiji) prostora  $\mathbb{R}^X$ .

(2) Niz funkcija  $(f_n)$  konvergira k  $f$  *po točkama* na  $X$  ( $((f_n(x)) \rightarrow f(x), \forall x \in X)$ ) ako i samo ako  $(f_n) \rightarrow f$  u produktnoj topologiji prostora  $\mathbb{R}^X$ .

# Kvocijentna topologija

## Definicija

Neka su  $X$  i  $Y$  topološki prostori i neka je  $p : X \rightarrow Y$  surjekcija. Preslikavanje  $p$  zovemo **kvocijentno preslikavanje** ako je podskup  $U \subseteq Y$  otvoren (zatvoren) u  $Y$  ako i samo ako je  $p^{-1}(U)$  otvoren (zatvoren) u  $X$  (tzv. svojstvo *jake neprekidnosti*).

Nap. kvocijentno+bijekcija=homeomorfizam

Drugi način definiranja:

Kažemo da je podskup  $C$  od  $X$  **zasićen (saturiran)** u odnosu na surjekciju  $p : X \rightarrow Y$  ako  $C$  sadrži svaki skup  $p^{-1}(\{y\})$  (*vlakno*) koji siječe, tj. ako je

$$C = p^{-1}(p(C)).$$

Dakle,  $C$  je **zasićen u odnosu na surjekciju  $p$  akko je jednak kompletnoj praslici nekog podskupa od  $Y$ .**

Surjeksija  $p$  je kvocijentno preslikavanje ako i samo ako je  $p$  neprekidno i preslikava zasićene otvorene skupove od  $X$  na otvorene skupove od  $Y$  (zasićene zatvorene skupove od  $X$  na zatvorene skupove od  $Y$ ).

## Napomena

Neprekidna surjeksija koja je otvoreno (ili zatvoreno) preslikavanje je kvocijentno preslikavanje, ali obrat ne vrijedi: postoje kvocijentna preslikavanja koja nisu niti otvorena niti zatvorena.

Primjer: projekcije.

## Definicija

Neka je  $X$  topološki prostor,  $A$  skup i  $p : X \rightarrow A$  **surjekcija**. Tada postoji točno jedna topologija  $\mathcal{T}$  na  $A$  u odnosu na koju je  $p$  kvocijently preslikavanje i zovemo ju **kvocijentlyna topologija** inducirana s  $p$ .

Topologija  $\mathcal{T}$  se sastoji od onih podskupova  $U$  od  $A$  za koje je  $p^{-1}(U)$  otvoren u  $X$ .

## Definicija (Identifikacijsko kvocijentlyno preslikavanje)

Neka je  $X$  topološki prostor i neka je  $X^*$  particija od  $X$  u disjunktne podskupove čija unija je  $X$ . Neka je  $p : X \rightarrow X^*$  surjekcija koja preslikava svaku točku od  $X$  na element od  $X^*$  koji je sadrži. U kvocijentlynoj topologiji induciranoj s  $p$  prostor  $X^*$  zovemo **kvocijentlyni prostor** od  $X$ .

## Napomena

Preslikavanjem  $p : X \rightarrow X^*$  dana je relacija ekvivalencije:  $x \equiv y$  ako  $p(x)$  i  $p(y)$  leže u istom skupu particije.  $X^*$  je tada skup klasa ekvivalencije, pišemo:  $X^* = X/\equiv$ .

Primjeri: jedinična 2-sfera i torus kao kvocijentlyni prostori.

Primjer: Restrikcija kvocijentnog preslikavanja na potprostor ne mora biti kvocijentno preslikavanje.

## Teorem (22.1)

Neka je  $p : X \rightarrow Y$  kvocijentno preslikavanje, neka je  $A$  potprostor od  $X$  koji je zasićen u odnosu na  $p$  i neka je  $q = p|_A : A \rightarrow p(A)$  restrikcija od  $p$ .

1. Ako je  $A$  ili otvoren ili zatvoren u  $X$ ,  $q$  je kvocijentno preslikavanje.
2. Ako je  $p$  ili otvoreno preslikavanje ili zatvoreno preslikavanje,  $q$  je kvocijentno preslikavanje.

Ideja dokaza: Kako je  $q$  neprekidna surjekcija, dovoljno pokazati: ako je za  $V \subseteq p(A)$  skup  $q^{-1}(V)$  otvoren u  $A$ , onda je  $V$  otvoren u  $p(A)$ . Zasićenost  $A$  bitna da bi vrijedilo  $q^{-1}(V) = p^{-1}(V)$ ,  $V \subseteq p(A)$ .

## Napomena

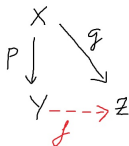
Kompozicija kvocijentnih preslikavanja je kvocijentno preslikavanje. To ne vrijedi nužno za Kartezijeve produkte. Hausdorffovo svojstvo se ne prenosi nužno s prostora  $X$  na kvocijentni prostor  $X^*$ .

# Konstrukcija neprekidnih funkcija na kvocijentnom prostoru

Teorem (22.2, *Faktorizacija preslikavanja kroz kvocijentno preslikavanje*)

Neka je  $p : X \rightarrow Y$  kvocijentno preslikavanje. Neka je  $Z$  prostor i neka je  $g : X \rightarrow Z$  preslikavanje koje je konstantno na svakom skupu  $p^{-1}(\{y\})$ , za  $y \in Y$ . Tada  $g$  inducira preslikavanje  $f : Y \rightarrow Z$  na kvocijentnom prostoru  $Y$  takvo da je  $f \circ p = g$ .

- (1) Preslikavanje  $f$  je neprekidno ako i samo ako je  $g$  neprekidno.
- (2)  $f$  je kvocijentno preslikavanje ako i samo ako je  $g$  kvocijentno preslikavanje.



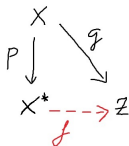
Skup  $p^{-1}(\{y\})$  zovemo **vlakno** od  $p$ .

Dokaz.

## Korolar (22.3, homeomorfizam induciran kvocijntnim preslikavanjem)

Neka je  $g : X \rightarrow Z$  neprekidna surjekcija. Neka je  $X^* = \{g^{-1}(\{z\}) : z \in Z\}$  kvocijntni prostor od  $X$  te neka je  $f : X^* \rightarrow Z$  inducirana neprekidna (zašto?) bijekcija ( $g = f \circ p$ ).

1.  $f$  je homeomorfizam ako i samo ako je  $g$  kvocijntno preslikavanje.
2. Ako je  $Z$  Hausdorffov i  $X^*$  je Hausdorffov.



Dokaz.

Primjer:  $g$  nije kvocijntno preslikavanje i inducirani  $f$  na kvocijntnom prostoru nije homeomorfizam.

## 2. Povezanost i kompaktnost

Motivacija za proučavanje svojstava povezanosti i kompaktnosti topoloških prostora (Weierstrassov teorem: neprekidna slika segmenta segment-postižu se međuvrijednosti i maksimum/minimum, Teorem o unif. nepr. f-cije na segmentu; za realne funkcije jedne realne varijable)

## Definicija

Neka je  $X$  topološki prostor. **Separacija** od  $X$  je par  $U, V$  disjunktnih nepraznih otvorenih podskupova od  $X$  čija unija je  $X$ . Za topološki prostor  $X$  kažemo da je **povezan** ako ne postoji separacija od  $X$ .

Prostor  $X$  je povezan akko su jedini podskupovi koji su i otvoreni i zatvoreni u  $X$  prazan skup  $\emptyset$  i čitav prostor  $X$ .

## Lema (23.1, Karakterizacija separacije potprostora)

Neka je  $Y$  potprostor od  $X$ . Par  $A, B \subseteq Y$  je separacija od  $Y$  ako i samo ako su disjunktni, neprazni, unija im je  $Y$ , a niti jedan od njih ne sadrži gomilište (u  $X$ ) drugoga.

Dokaz.

Primjeri nepovezanih prostora.

# Dovoljni uvjeti za povezanost (pot)prostora

Lema (23.2, u dokazu Teorema 23.3)

Ako su skupovi  $C$  i  $D$  separacija od  $X$  i ako je  $Y$  povezan potprostor od  $X$ , tada je ili  $Y \subseteq C$ , ili  $Y \subseteq D$ .

Teorem (23.3)

Unija familije povezanih potprostora od  $X$  koja ima zajedničku točku je povezana.

Dokaz: pp. suprotno + Lema 23.2.

Teorem (23.4, Povezanost skupa se ne naruši dodavanjem nekih gomilišta skupu.)

Neka je  $A$  povezan potprostor od  $X$ . Ako je  $A \subseteq B \subseteq C \mid A$ , tada je  $B$  također povezan.

Teorem (23.5)

Neprekidna slika povezanog prostora je povezana. Dokaz.

## Teorem (23.6)

Konačni Kartezijev produkt povezanih prostora je povezan.

Dokaz.

Primjeri: za beskonačne produkte povezanost produkta povezanih prostora ovisi o izboru topologije na produktu. Povezanost  $\mathbb{R}^\omega$  u produktnoj i box topologiji.

## Napomena

Proizvoljni Kartezijevi produkti povezanih skupova **u produktnoj topologiji** su povezani.

Dokaz: generalizacija primjera.

# Povezanost potprostora od $\mathbb{R}$ . Primjeri povezanih prostora.

## Definicija

Totalno uređen skup  $L$  koji ima više od jednog elementa zovemo **linearni kontinuum** ako vrijedi:

1.  $L$  ima svojstvo supremuma (*svaki neprazan odozgo omeđen podskup  $L_0$  od  $L$  ima supremum u  $L$* ),
2. Ako je  $x < y$ , tada postoji  $z$  takav da je  $x < z < y$  (*gustoća  $L$  u samome sebi*).

Npr.  $\mathbb{R}$ . Linearni kontinuum generalizacija  $\mathbb{R}$ .

Primjeri linearnih kontinuuma različitih od  $\mathbb{R}$ .

## Teorem (24.1, Povezanost linearnog kontinuuma)

Ako je  $L$  linearni kontinuum s uređajnom topologijom, tada je  $L$  povezan, a povezani su i intervali i zrake u  $L$ .

Ideja dokaza: konveksni potprostori od  $L$  su povezani, kao dokaz povezanosti segmenta u  $\mathbb{R}$ .

## Korolar (24.2)

Realni pravac  $\mathbb{R}$  te intervali i zrake u  $\mathbb{R}$  su povezani skupovi (u uređajnoj = standardnoj topologiji).

## Teorem (24.3, Generalizacija teorema o međuvrijednostima)

Neka je  $f : X \rightarrow Y$  neprekidno preslikavanje, gdje je  $X$  povezan prostor i  $Y$  totalno uređen skup s uređajnom topologijom. Ako su  $a$  i  $b$  točke od  $X$  i ako je  $r$  točka od  $Y$  koja leži između  $f(a)$  i  $f(b)$ , tada postoji točka  $c$  u  $X$  takva da je  $f(c) = r$ .

Specijalno,  $X = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ,  $Y = \mathbb{R}$ .

Dokaz.

# Povezanost putevima

## Definicija

Za dane točke  $x$  i  $y$  prostora  $X$ , **put** u  $X$  od  $x$  do  $y$  je neprekidno preslikavanje  $f : [a, b] \rightarrow X$  nekog segmenta  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  u  $X$ , takvo da je  $f(a) = x$  i  $f(b) = y$ . Za prostor  $X$  kažemo da je **putevima povezan** ako svaki par točaka od  $X$  može biti povezan putom u  $X$ .

## Napomena (Dovoljan uvjet za povezanost)

- (1) Neprekidna slika putevima povezanog prostora je putevima povezana.
- (2) Svaki prostor  $X$  koji je putevima povezan je i povezan. Obrat ne vrijedi.

**Dokaz. Primjeri i kontraprimjeri (tzv. *topološka sinusoida*).**

# Komponente povezanosti i povezanosti putevima

(Proces rastavljanja prostora na komponente povezanosti ili povezanosti putevima)

## Definicija

Neka je  $X$  topološki prostor. Definiramo relaciju ekvivalencije na  $X$ :  $x \sim y$  ako postoji povezan potprostor od  $X$  koji sadrži  $x$  i  $y$ . Klase ekvivalencije zovemo **komponente** ili **komponente povezanosti** od  $X$ .

## Teorem (25.1)

Komponente od  $X$  su povezani disjunktni potprostori od  $X$ , čija je unija  $X$ , takvi da svaki neprazni povezan potprostor od  $X$  siječe samo jednu od njih.

Dokaz povezanosti komponenti. Komponenta povezanosti od  $x_0 \in X$  je unija svih povezanih podskupova od  $X$  koji sadrže  $x_0$ !

## Napomena

Komponente povezanosti od  $X$  su zatvorene u  $X$ , jer sadrže svoj zatvarač (koji je također povezan). Ako  $X$  ima konačno mnogo kp, one su otvorene u  $X$  kao komplement konačne unije zatvorenih.

## Definicija

Definiramo drugu relaciju ekvivalencije na prostoru  $X$ :  $x \sim y$  ako postoji put u  $X$  od  $x$  do  $y$ . Klase ekvivalencije zovemo **komponente povezanosti putevima** od  $X$ .

## Teorem (25.2)

Komponente povezanosti putevima od  $X$  su putevima povezani disjunktni potprostori od  $X$ , čija je unija  $X$ , takvi da svaki neprazni putevima povezani potprostor od  $X$  siječe samo jednu od njih.

Primjeri.

# Lokalna povezanost prostora

## Definicija

Za prostor  $X$  kažemo da je **lokalno povezan u**  $x$  ako za svaku okolinu  $U$  od  $x$  postoji povezana okolina  $V$  od  $x$  sadržana u  $U$ . Za prostor  $X$  kažemo da je **lokalno povezan** ako je lokalno povezan u svakoj svojoj točki.

Za prostor  $X$  kažemo da je **lokalno putevima povezan u**  $x$  ako za svaku okolinu  $U$  od  $x$  postoji putevima povezana okolina  $V$  od  $x$  sadržana u  $U$ . Za prostor  $X$  kažemo da je **lokalno putevima povezan** ako je lokalno putevima povezan u svakoj svojoj točki.

## Teorem (25.3, Karakterizacija lokalne povezanosti)

Prostor  $X$  je lokalno povezan ako i samo ako za svaki otvoren skup  $U$  od  $X$  je svaka komponenta povezanosti od  $U$  otvorena u  $X$ .

Dokaz (sami).

Primjeri (povezanost i lokalna povezanost)

## Teorem (25.4, Karakterizacija lokalne povezanost putevima)

Prostor  $X$  je lokalno putevima povezan ako i samo ako za svaki otvoren skup  $U$  od  $X$  svaka putevima povezana komponenta od  $U$  je otvorena u  $X$ .

### Napomena

Specijalno, u lokalno putevima povezanim prostorima su komponente povezanosti i povezanosti putevima otvoreni skupovi. Sjetimo se: komponente povezanosti su u svakom prostoru zatvoreni skupovi.

## Teorem (25.5)

Neka je  $X$  topološki prostor. Svaka komponenta povezanosti putevima od  $X$  leži u nekoj komponenti povezanosti od  $X$ . Ako je  $X$  lokalno putevima povezan tada se komponente povezanosti i komponente povezanosti putevima podudaraju.

Dokaz.

# Kompaktni prostori

## Definicija

Za familiju  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$  podskupova prostora  $X$  kažemo da **pokriva**  $X$ , ili da je **pokrivač** od  $X$ , ako je unija elemenata od  $\mathcal{A}$  jednaka  $X$ . Familiju  $\mathcal{A}$  zovemo **otvoreni pokrivač** od  $X$  ako su svi njezini elementi otvoreni podskupovi od  $X$ .

Ako je  $Y$  potprostor od  $X$ , za familiju  $\mathcal{A}$  podskupova od  $X$  kažemo da **pokriva**  $Y$  ako unija njezinih elemenata sadrži  $Y$ .

## Definicija

Za prostor  $X$  kažemo da je **kompaktan** ako svaki otvoreni pokrivač  $\mathcal{A}$  od  $X$  sadrži konačnu potfamiliju koja pokriva  $X$ .

Primjeri.

## Lema (26.1)

Neka je  $Y$  potprostor od  $X$ .  $Y$  je kompaktan ako i samo ako svaki pokrivač od  $Y$  čiji su elementi skupovi otvoreni u  $X$  sadrži konačnu potfamiliju koja pokriva  $Y$ .

Dokaz (sami, relativna topologija).

# Dovoljni uvjeti za kompaktnost

## Teorem (26.2)

Svaki zatvoreni potprostor kompaktnog prostora je kompaktan.

Dokaz.

## Teorem (26.3)

Svaki kompaktan potprostor Hausdorffovog prostora je zatvoren.

Lema (26.4, Separacija kompakta i točke u Hausdorffovom prostoru otv. skupovima)

Ako je  $Y$  kompaktan potprostor Hausdorffovog prostora  $X$  i  $x_0$  nije u  $Y$ , onda postoje otvoreni disjunktni skupovi  $U$  i  $V$  od  $X$  koji sadrže  $x_0$  i  $Y$  redom.

Dokaz.

Zahtjev Hausdorffovosti u Teoremu 26.3 je bitan! (Kontraprimjer)

## Teorem (26.5)

Neprekidna slika kompaktnog prostora je kompaktna.

## Teorem (26.6)

Neka je  $f : X \rightarrow Y$  neprekidna bijekcija. Ako je  $X$  kompaktna i  $Y$  Hausdorffov, onda je  $f$  homeomorfizam.

Dokaz: slika zatvorenih skupova u  $X$  je zatvorena u  $Y$ .

## Definicija

Za familiju  $\mathcal{C}$  podskupova od  $X$  kažemo da je **centrirana** ako je za svaku konačnu potfamiliju  $\{C_1, \dots, C_n\}$  od  $\mathcal{C}$  presjek  $C_1 \cap \dots \cap C_n$  neprazan.

## Teorem (26.9, Karakterizacija kompaktnosti preko zatvorenih skupova)

Neka je  $X$  topološki prostor.  $X$  je kompaktan ako i samo ako je za svaku centriranu familiju  $\mathcal{C}$  zatvorenih skupova u  $X$  presjek  $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$  svih elemenata od  $\mathcal{C}$  neprazan.

Ideja dokaza: gledamo komplemente pokrivača.

Specijalan slučaj ovog teorema je *Cantorov teorem*: kada imamo **silazan (ugniježdjeni) niz**  $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots \supseteq C_n \supseteq C_{n+1} \supseteq \dots$  nepraznih zatvorenih skupova u kompaktnom prostoru  $X$ . Tada je familija  $\mathcal{C} = \{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  centrirana pa je presjek  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$  neprazan.

# Produkti kompaktnih prostora

## Teorem (26.7)

Produkt konačno mnogo kompaktnih prostora je kompaktan.

## Lema (26.8, Lema o cijevi)

Neka su  $X$ ,  $Y$  topološki prostori i  $Y$  **kompaktan**. Ako je  $N$  otvoren skup u produktu  $X \times Y$  koji sadrži 'prerez'  $\{x_0\} \times Y$ , tada postoji okolina  $V$  oko  $x_0$  u  $X$  takva da  $N$  sadrži i 'cijev'  $V \times Y$ .

Dokaz teorema:

(1) dokaz Leme o cijevi; (2) redukcija pokrivača od  $X$  koristeći kompaktnost svakog prereza  $\{x\} \times Y \simeq Y$ ,  $x \in X$ , i Lemu o cijevi.

Kontraprimjer: zahtjev  $Y$  kompaktan u *Lemi o cijevi* je bitan.

# Tihonovljev teorem (kompaktnost proizvoljnih produkata cpt. prostora)

\* Koristimo karakterizaciju kompaktnosti preko centriranih familija zatvorenih skupova

## Lema (37.1)

Neka je  $X$  skup i neka je  $\mathcal{A}$  centrirana familija podskupova od  $X$ . Tada postoji maksimalna centrirana familija  $\mathcal{D}$  podskupova od  $X$  koja sadrži  $\mathcal{A}$  (maksimalna znači da ne postoji familija podskupova od  $X$  koja strogo sadrži  $\mathcal{D}$  i ima tražena svojstva).

**Dokaz.** *Zornova lema na parcijalno uređenom skupu (u smislu potfamilija  $\subset$ ) svih centriranih familija podskupova od  $X$  koje sadrže  $\mathcal{A}$ .*

**Zornova lema:** Ako svaki totalno uređen podskup u parcijalno uređenom skupu  $(U, <)$  ima gornju među, tada  $U$  ima maksimalni element.

## Lema (37.2)

Neka je  $X$  skup i  $\mathcal{D}$  neka maksimalna centrirana familija podskupova od  $X$ . Tada vrijedi:

1. Svaki konačan presjek elemenata od  $\mathcal{D}$  je element od  $\mathcal{D}$ .
2. Ako je  $A$  podskup od  $X$  koji siječe svaki element od  $\mathcal{D}$ , tada je  $A$  element od  $\mathcal{D}$ .

## Teorem (37.3, Tihonovljev teorem)

Proizvoljan produkt kompaktnih prostora je kompaktan u produktnoj topologiji.

Dokaz: Leme 37.1 i 37.2. Dokazujemo da svaka centrirana familija  $\mathcal{A}$  u produktu ima neprazan presjek tako da nadopunimo do maksimalne centrirane familije  $\mathcal{D}$  koja je sadrži. Pokažemo (pomoću koordinatnih projekcija) da  $\mathcal{D}$  ima neprazan presjek.

# Kompaktnost u $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^n$

## Teorem (27.1)

Neka je  $X$  totalno uređen skup sa svojstvom supremuma. U uređajnoj topologiji, svaki segment (zatvoreni interval) u  $X$  je kompaktan.

U dokazu se koristi samo svojstvo supremuma, ne i gustoće kao kod povezanosti!

## Korolar (27.2)

Svaki segment  $[a, b]$ ,  $a < b$ , u  $\mathbb{R}$  je kompaktan.

## Teorem (27.3, Karakterizacija kompaktnosti u $\mathbb{R}^n$ )

Potprostor  $A$  od  $\mathbb{R}^n$  je kompaktan ako i samo ako je zatvoren i omeđen (u euklidskoj metrici  $d_2$  ili u kvadratnoj metrici  $d_\infty$ ).

Ideja dokaza ( $\Leftrightarrow$ ):  $A$  zatvoreni podskup kocke  $[-r, r]^n$  kompaktne u  $\mathbb{R}^n$ .

## Napomena

**Karakterizacija ( $\Leftrightarrow$ ) NE vrijedi općenito u metričkim prostorima!**

(Kompaktnost je topološko, a omeđenost metričko svojstvo. Npr.  $\mathbb{R}$  nije kompaktan u standardnoj topologiji, a omeđen je i zatvoren u standardnoj omeđenoj metrici koja je inducira.)

## Teorem (27.4, Weierstrassov teorem)

Neka je  $f : X \rightarrow Y$  neprekidna, pri čemu je  $Y$  totalno uređen skup s uređajnom topologijom. Ako je  $X$  kompaktan, tada postoje točke  $c$  i  $d$  u  $X$  takve da je  $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$  za svaki  $x \in X$ .

Dokaz.

## Definicija

Neka je  $(X, d)$  metrički prostor i  $A$  neprazni podskup od  $X$ .

Za  $x \in X$  definiramo **udaljenost od  $x$  do  $A$**  kao

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

**Dijametar** skupa  $A$  definiramo kao

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(a, a') : a, a' \in A\} \leq \infty.$$

## Lema (27.5, O Lebesgueovom broju za kompakte)

Neka je  $\mathcal{A}$  otvoreni pokrivač metričkog prostora  $(X, d)$ . Ako je  $X$  kompaktan, onda postoji  $\delta > 0$  takav da za svaki podskup od  $X$  dijametra manjeg od  $\delta$  postoji element od  $\mathcal{A}$  koji ga sadrži.

Broj  $\delta$  zovemo **Lebesgueov broj** pokrivača  $\mathcal{A}$ .

Dokaz. Primjer: lema ne vrijedi bez pp. kompaktnosti  $X$

## Definicija

Za funkciju  $f$  s metričkog prostora  $(X, d_X)$  u metrički prostor  $(Y, d_Y)$  kažemo da je **uniformno neprekidna** ako za dani  $\epsilon > 0$  postoji  $\delta > 0$  takav da za svaki par točaka  $x_0, x_1$  iz  $X$

$$d_X(x_0, x_1) < \delta \implies d(f(x_0), f(x_1)) < \epsilon.$$

## Teorem (27.6, O uniformnoj neprekidnosti na kompaktu)

Neka je  $f : X \rightarrow Y$  neprekidna funkcija s kompaktnog metričkog prostora  $(X, d_X)$  u metrički prostor  $(Y, d_Y)$ . Tada je  $f$  uniformno neprekidna.

Ideja dokaza: Koristimo Lebesgueov broj (sami).

# Neprebrojivost skupa $\mathbb{R}$

## Definicija

Za točku  $x$  prostora  $X$  kažemo da je **izolirana točka** od  $X$  ako je skup  $\{x\}$  otvoren u  $X$  (tj. *ako je 'sama sebi okolina'*, tj. ako postoji okolina od  $x$  koja ne sadrži niti jedan element skupa  $X$  različit od  $x$ ).

## Teorem (27.7)

Neka je  $X$  neprazan kompaktan Hausdorffov prostor. Ako  $X$  nema izoliranih točaka,  $X$  je neprebrojiv.

Primjer:  $0 \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$  kompaktan, Hausdorffov i prebrojiv, no ima izolirane točke.

## Korolar (27.8)

Svaki segment u  $\mathbb{R}$  je neprebrojiv (pa i  $\mathbb{R}$  i njegovi intervali).

## Dvije slabije formulacije kompaktnosti:

### *Bolzano-Weierstrassova i nizovna kompaktnost*

#### Teorem (28.1)

Ako je  $X$  kompaktan, svaki beskonačan podskup od  $X$  ima gomilište u  $X$ . Obrat ne vrijedi!

*Dokaz.*

Svojstvo da svaki beskonačan podskup od  $X$  ima gomilište naziva se

**Bolzano-Weierstrass kompaktnost** i nekad se smatrala definicijom kompaktnosti.

Zapravo je slabije svojstvo. *Primjer da obrat ne vrijedi.*

#### Definicija

Za prostor  $X$  kažemo da je **nizovno kompaktan** ako svaki niz  $(x_n)$  u  $X$  ima konvergentan podniz u  $X$ .

#### Teorem (28.2)

Za metrizabilne prostore  $X$  ekvivalentno je:

- (1)  $X$  je kompaktan.
- (2)  $X$  je Bolzano-Weierstrass kompaktan.
- (3)  $X$  je nizovno kompaktan. **(1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (3) lagano.**

# Lokalna kompaktnost

## Definicija

Za prostor  $X$  kažemo da je **lokalno kompaktan** u  $x \in X$  ako postoji kompaktan potprostor  $C$  od  $X$  koji sadrži neku okolinu od  $x$ . Ako je  $X$  lokalno kompaktan u svakoj svojoj točki, za  $X$  kažemo da je **lokalno kompaktan**.

$X$  kompaktan  $\rightarrow X$  lokalno kompaktan. **Primjeri.**

## Teorem (29.1, LCH prostor kao potprostor CH prostora)

Prostor  $X$  je lokalno kompaktan Hausdorffov prostor ako i samo ako postoji prostor  $Y$  koji zadovoljava sljedeće uvjete:

1.  $X$  je potprostor od  $Y$ .
2. Skup  $Y \setminus X$  se sastoji od jedne točke.
3.  $Y$  je kompaktan Hausdorffov prostor.

(tj. ako postoji kompaktifikacija prostora  $X$  jednom točkom!)

Ako i  $Y$  i  $Y'$  zadovoljavaju te uvjete onda postoji homeomorfizam  $s$  na  $Y'$  koji je jednak identiteti na  $X$ .

Dokaz.

1. jedinstvenost prostora  $Y$  do na homeomorfizam,
2. ( $\Rightarrow$ ) Za  $X$  LCH formiramo  $Y = X \cup \{\infty\}$ . Definiramo topologiju na  $Y$  kao familiju svih skupova:  
(tipa 1) **otvorenih u  $X$**  i  
(tipa 2) **oblika  $Y \setminus C$ , gdje je  $C$  kompaktan u  $X$** .  
Provjeravamo: to je topologija na  $Y$ ,  $X$  je potprostor od  $Y$ ,  $Y$  CH.
3. ( $\Leftarrow$ ) Za  $Y$  CH pokazujemo da je  $X = Y \setminus \{\infty\}$  LCH.

## Napomena

Iz konstrukcije topologije na  $Y$  se vidi:

- (1) Ako je  $X$  kompaktan, tada je  $\infty$  izolirana točka od  $Y$  (sama svoja okolina).
- (2) Ako  $X$  nije kompaktan, tada je  $\infty$  gomilište skupa  $X$  u  $Y$ , pa je  $\text{Cl}_Y X = Y$ .

## Definicija (Jednotočkovna kompaktifikacija)

Ako je  $Y$  kompaktan Hausdorffov prostor i ako je  $X$  pravi potprostor od  $Y$  čiji zatvarač je jednak  $Y$ , onda za  $Y$  kažemo da je **kompaktifikacija** od  $X$ . Ako je  $Y \setminus X$  jedna točka,  $Y$  zovemo **jednotočkovna kompaktifikacija** od  $X$ . **Primjeri.**

Pokazali smo u Teoremu 29.1:  $X$  ima jednotočkovnu kompaktifikaciju (skoro jedinstvenu) ako i samo ako je lokalno kompaktan Hausdorffov i nije sam kompaktan.

## 'Lokalnost' pojma lokalne kompaktnosti

### Korolar (29.2, Karakterizacija lokalne kompaktnosti)

Neka je  $X$  Hausdorffov prostor.  $X$  je lokalno kompaktan ako i samo ako za dani  $x$  iz  $X$  i danu okolinu  $U$  od  $x$  postoji okolina  $V$  od  $x$  takva da je  $\text{Cl } V$  kompaktan i  $\text{Cl } V \subset U$ .

Dokaz.

### Korolar (29.3, Lokalna kompaktnost potprostora)

Neka je  $X$  lokalno kompaktan Hausdorffov prostor i  $A$  potprostor od  $X$ . Ako je  $A$  zatvoren u  $X$  ili otvoren u  $X$ , onda je  $A$  lokalno kompaktan.

Dokaz.

Zašto su LCH prostori *dobri*?

### Korolar (29.4, Ulaganje LCH prostora u CH prostore)

Prostor  $X$  je homeomorfan otvorenom potprostoru kompaktnog Hausdorffovog prostora ako i samo ako je  $X$  lokalno kompaktan Hausdorffov.

### 3. Aksiomi prebrojivosti i aksiomi separacije

Cilj: naći dovoljne uvjete za ulaganje prostora u metrički prostor (*Urysohnov teorem metrizacije*).

# Aksiomi prebrojivosti

## Definicija

Za prostor  $X$  kažemo da ima **prebrojivu bazu okolina u točki  $x$**  ako postoji prebrojiva familija  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  okolina od  $x$  sa svojstvom da svaka okolina  $U$  od  $x$  sadrži barem jedan od skupova  $U_n$ .

Za prostor  $X$  koji ima prebrojivu bazu okolina u svakoj svojoj točki kažemo da zadovoljava **prvi aksiom prebrojivosti**.

## Teorem (30.1, radili prije)

Neka je  $X$  topološki prostor.

1. Neka je  $A$  podskup od  $X$ . Ako postoji niz točaka u  $A$  koji konvergira prema  $x$ , tada je  $x \in \text{Cl } A$ .
2. Neka je  $f : X \rightarrow Y$ . Ako je funkcija  $f$  neprekidna, tada za svaki konvergentni niz  $x_n \rightarrow x$  u  $X$ , niz  $f(x_n)$  konvergira prema  $f(x)$ .

Ako  $X$  zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti, vrijede i obrati 1. i 2.

## Definicija

Ako prostor  $X$  ima prebrojivu bazu topologije, tada kažemo da  $X$  zadovoljava **drugi aksiom prebrojivosti**.

## Napomena

- (1) Drugi aksiom prebrojivosti povlači prvi.
- (2) Svaki metrizablestan prostor zadovoljava 1. aksiom prebrojivosti ( $\{B(x, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}\}$ ). Za 2. aksiom prebrojivosti to nije slučaj (npr.  $\mathbb{R}^\omega$  s uniformnom topologijom).

Primjeri.

## Teorem (30.2)

Potprostor prostora koji zadovoljava prvi (drugi) aksiom prebrojivosti također zadovoljava prvi (drugi) aksiom prebrojivosti. **Prebrojivi** produkt prostora koji zadovoljavaju prvi (drugi) aksiom prebrojivosti također zadovoljava prvi (drugi) aksiom prebrojivosti.

## Definicija

Za podskup  $A$  prostora  $X$  kažemo da je **gust** u  $X$  ako je  $\text{Cl} A = X$ .

## Teorem (30.3)

Pretpostavimo da  $X$  zadovoljava 2. aksiom prebrojivosti. Tada vrijedi:

1. Svaki otvoreni pokrivač od  $X$  sadrži prebrojivu potfamiliju koja pokriva  $X$ .
2. Postoji prebrojiv podskup od  $X$  koji je gust u  $X$ .

### Dokaz.

Prostor za koji svaki otvoreni pokrivač sadrži prebrojiv potpokrivač zovemo **Lindelöfov**, a prostor koji ima prebrojivi gusti podskup zovemo **separabilan**.

## Napomena

Za metrizabilne prostore sva 3 "aksioma" su ekvivalentna.

### Primjeri:

2. aksiom jači od ostalih (npr. *Sorgenfreyev pravac*  $\mathbb{R}_\ell$ ); Lindelöfovost i separabilnost ne ostaju očuvani na produktima (npr. *Sorgenfreyeva ravnina*  $\mathbb{R}_\ell^2$ ) i potprostorima!

# Aksiomi separacije

Prisjetimo se: prostor  $X$  zovemo **Hausdorffovim** ( $T_2$ -prostorom) ako za svaki par različitih točaka  $x, y$  od  $X$ , postoje disjunktni otvoreni skupovi koji sadrže  $x$  i  $y$  redom.

## Definicija

Pretpostavimo da su jednočlani skupovi zatvoreni u  $X$  (tj. da je  $X$   $T_1$ -prostor).

Za  $X$  kažemo da je **regularan** ( $T_3$ -prostor) ako za svaku točku  $x$  i zatvoreni skup  $B$  koji ne sadrži  $x$ , postoje disjunktni otvoreni skupovi koji sadrže  $x$  i  $B$  redom.

Za  $X$  kažemo da je **normalan** ( $T_4$ -prostor) ako za svaki par disjunktnih zatvoreni skupova  $A, B$  od  $X$ , postoje disjunktni otvoreni skupovi koji sadrže  $A$  i  $B$  redom.

Te aksiome zovemo **aksiomi separacije**.

## Napomena

$$T_4 \stackrel{\text{uz pp.}}{\Rightarrow} T_1 \quad T_3 \stackrel{\text{uz pp.}}{\Rightarrow} T_1 \quad T_2 \Rightarrow T_1$$

## Lema (31.1, Karakterizacija regularnosti i normalnosti)

Neka je  $X$   $T_1$ -topološki prostor.

1.  $X$  je regularan ako i samo ako za svaku točku  $x$  iz  $X$  i okolinu  $U$  od  $x$ , postoji okolina  $V$  od  $x$  takva da je  $\text{Cl } V \subseteq U$ .
2.  $X$  je normalan ako i samo ako za svaki zatvoreni skup  $A$  i otvoreni skup  $U$  koji sadrži  $A$ , postoji otvoreni skup  $V$  koji sadrži  $A$  takav da je  $\text{Cl } V \subseteq U$ . **Dokaz.**

## Teorem (31.2)

1. Potprostor Hausdorffovog prostora je Hausdorffov. Produkt Hausdorffovih prostora je Hausdorffov.
2. Potprostor regularnog prostora je regularan. Produkt regularnih prostora je regularan.

**Dokaz:** sami. Ne zaboravite provjeriti  $T_1$ -svojstvo!

## Napomena

Za normalne prostore analogon Teorema 31.2. ne vrijedi!

Gdje ne prolazi dokaz 2. ( $T_3$  i  $T_4$  svojstvo slično)? Primjeri (aksiomi separacije).

# Dovoljni uvjeti za normalnost prostora

Motivacija: *Urysohnov teorem metrizacije* i *Tietzeov teorem o proširenju preslikavanja* vrijede u normalnim prostorima!

## Teorem (32.1)

Svaki regularan prostor koji zadovoljava 2. aksiom prebrojivosti je normalan.

Dokaz.

## Teorem (32.2)

Svaki metrizabilan prostor je normalan.

Dokaz. Sami. Slično kao u prethodnom teoremu (kugle).

## Teorem (32.3)

Svaki kompaktan Hausdorffov prostor je normalan.

Dokaz: Po Lemi 26.4 imamo regularnost. Dokaz separacije za dva zatvorena skupa  $A$  i  $B$  primjenom Leme (tj. regularnosti) po svim točkama skupa  $A$  koji je zatvoren, time i kompaktan.

## Teorem (32.4)

Svaki totalno uređen skup  $X$  je normalan u uređajnoj topologiji.

Nećemo dokazivati.

Primjer: normalnost  $\mathbb{R}^N$ ,  $\mathbb{R}^\omega$ ,  $\mathbb{R}^J$ .

# Urysohnova lema

## Teorem (33.1, Urysohnova lema)

Neka je  $X$  normalan prostor. Neka su  $A$  i  $B$  disjunktni zatvoreni podskupovi od  $X$ . Neka je  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  segment. Tada postoji neprekidno preslikavanje  $f : X \rightarrow [a, b]$  takvo da je  $f(x) = a$  za sve  $x$  iz  $A$  i  $f(x) = b$  za sve  $x$  iz  $B$ .

Ideja dokaza: Dovoljno dokazati za  $[a, b] = [0, 1]$ .

1. Koristeći normalnost, generiramo niz okolina  $U_p$  oko  $A$  disjunktnih s  $B$ , indeksiran s  $p \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ , takav da je  $\text{Cl}(U_p) \subseteq U_q$  za  $p < q$ .
2. Konstruiramo  $f$  na sljedeći način: mijenja se po okolinama  $U_p$  prateći  $p$  od 0 na  $A$  do 1 na  $B$ , a na  $[0, 1]$  je proširena po neprekidnosti.

## Definicija

Ako su  $A$  i  $B$  podskupovi topološkog prostora  $X$  i ako postoji neprekidna funkcija  $f : X \rightarrow [0, 1]$  takva da je  $f(A) = \{0\}$  i  $f(B) = \{1\}$ , tada kažemo da se  $A$  i  $B$  **moгу separirati neprekidnom funkcijom**.

## Napomena

(1) Neka je  $X$   $T_1$ -prostor.  $X$  je normalan ako i samo ako se svaka dva disjunktna zatvorena podskupa od  $X$  mogu separirati neprekidnom funkcijom.

(2) U regularnim prostorima točka i skup ne moraju se moći separirati neprekidnom funkcijom.

(1)  $(\Leftarrow) A \subseteq f^{-1}([0, 1/2]), B \subseteq f^{-1}((1/2, 1])$ ;

(2) U dokazu Urysohnove leme već konstrukcija  $U_2$  ne prolazi, jer trebamo normalnost.

## Definicija ( $T_{3\frac{1}{2}}$ -prostori)

Neka je  $X$   $T_1$ -prostor. Kažemo da je  $X$  je **potpuno regularan** ako za svaku točku  $x_0$  i za svaki zatvoren skup  $A$  koji ne sadrži  $x_0$ , postoji neprekidna funkcija  $f : X \rightarrow [0, 1]$  takva da je  $f(A) = \{0\}$  i  $f(x_0) = 1$  (tj. ako se svaki točka i zatvoren skup mogu separirati neprekidnom funkcijom).

Nap.  $T_3 \subsetneq T_{3\frac{1}{2}} \subsetneq T_4$ . **Primjeri.**

## Teorem (33.2)

Potprostor potpuno regularnog prostora je potpuno regularan.

Produkt potpuno regularnih prostora je potpuno regularan.

# Urysohnov teorem metrizacije

## Teorem (34.1, Urysohnov teorem metrizacije)

Svaki regularni prostor  $X$  koji zadovoljava 2. aksiom prebrojivosti je metrizable.

Ideja dokaza:

Pokazujemo da je  $X$  homeomorfan potprostoru metrizablenog prostora:

(1. dokaz)  $\mathbb{R}^\omega$  (tj.  $[0, 1]^\omega$ ) s produktnom topologijom  $\Pi$

(2. dokaz)  $\mathbb{R}^\omega$  (tj.  $[0, 1]^\omega$ ) s uniformnom metrikom

(tj. *ulaže se u te prostore*).

*Pomoćna tvrdnja.* Postoji niz  $(f_n)$  neprekidnih funkcija  $f_n : X \rightarrow [0, 1]$  takav da vrijedi: za svaku točku  $x_0 \in X$  i za svaku okolinu  $U$  oko  $x_0$  postoji neki član niza  $f_n$  takav da  $f_n(x_0) > 0$  i  $f_n$  iščezava na  $X \setminus U$ .

*Dokaz:* Urysohnova lema (regularan prostor s 2. aksiomom prebrojivosti je normalan) + smanjivanje familije korištenjem 2. aksioma prebrojivosti.

Pokazujemo:

(1. dokaz)  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^\omega$ ,  $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots)$ , je smještenje  $X$  u  $\mathbb{R}^\omega$  s produktnom topologijom (pokazujemo:  $F : X \rightarrow F(X) \subseteq \mathbb{R}^\omega$  homeomorfizam)

(2. dokaz)  $F : X \rightarrow [0, 1]^\omega$ ,  $F(x) = (f_1(x), \frac{f_2(x)}{2}, \frac{f_3(x)}{3}, \dots)$ , je smještenje  $X$  u  $\mathbb{R}^\omega$  s uniformnom topologijom.

• (1. dokaz) se generalizira na ulaganje potpuno regularnih prostora u  $[0, 1]^J$  (Teorem 34.3), (2. dokaz) na N-S teorem metrizacije (Teorem 40.3, nužni i dovoljni uvjeti)!

Dokaz (1) generalizira se na:

### Teorem (34.2, Teorem o smještenju prostora u $\mathbb{R}^J$ )

Neka je  $X$   $T_1$ -prostor. Pretpostavimo da je  $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$  indeksirana familija neprekidnih funkcija  $f_\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}$  takva da za svaku točku  $x_0$  od  $X$  i za svaku okolinu  $U$  od  $x_0$  postoji indeks  $\alpha$  za koji je  $f_\alpha$  pozitivna u  $x_0$  i nula je izvan  $U$ . Tada je funkcija  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^J$  definirana sa  $F(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha \in J}$  smještenje od  $X$  u  $\mathbb{R}^J$ . Ako  $f_\alpha$  preslikava  $X$  u  $[0, 1]$  za svaki  $\alpha$ , tada  $F$  smještava  $X$  u  $[0, 1]^J$ .

Dokaz:  $T_1$ -svojstvo osigurava injektivnost  $F$ .

### Teorem (34.3)

Prostor  $X$  je potpuno regularan ako i samo ako je homeomorfan potprostoru od  $[0, 1]^J$  za neki  $J$ .

Dokaz: ( $\Leftarrow$ ) produkti i potprostori potpuno regularnih potpuno regularni.

# Tietzeov teorem o proširenju preslikavanja

(posljedica Urysohnove leme)

## Teorem (Tietzeov teorem o proširenju preslikavanja)

Neka je  $X$  normalan prostor i neka je  $A$  zatvoren potprostor od  $X$ .

1. Svaka neprekidna funkcija  $f : A \subseteq X \rightarrow [a, b] \subseteq \mathbb{R}$  može se proširiti do neprekidne funkcije koja čitav  $X$  preslikava u  $[a, b]$ .
2. Svako neprekidno preslikavanje  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  može se proširiti do neprekidnog preslikavanja čitavog prostora  $X$  u  $\mathbb{R}$ .

Skica dokaza:

- ▶ BSO stavimo  $[a, b] := [-r, r]$ ,  $r > 0$  mali.
- ▶ Konstruiramo uniformno konvergentan niz neprekidnih funkcija na  $X$   $(\sum_{k=1}^n g_k) : X \rightarrow [-r, r]$  takvih da su *sve bliže*  $f$  na  $A$ . Urysohnova lema, induktivno.
- ▶ Limes je neprekidna funkcija  $g := \sum_{k=1}^{\infty} g_k : X \rightarrow [-r, r]$ . Pokažemo:  $g|_A = f$ .
- ▶ (2)  $\mathbb{R} \stackrel{\text{hom.}}{\simeq} (-1, 1)$ , primijenimo (1) pa *pokrpamo* rubove.

## 5. Teoremi metrizacije i parakompaktnost

- ▶ Dosad dovoljni uvjeti metrizabilnosti:  
Tm 34.1. *Urysohnov teorem metrizacije*:  
 $X$  regularan + prebrojiva baza  $\rightarrow X$  metrizabilan
- ▶ **Nužni** i dovoljni uvjeti metrizabilnosti:  
\**Nagata-Smirnovljevi teoremi metrizacije*:  
 $X$  metrizabilan  $\leftrightarrow X$  regularan + prebrojivo lokalno konačna baza  
\**Smirnovljevi teoremi metrizacije*:  
 $X$  metrizabilan  $\leftrightarrow X$  lokalno metrizabilan i parakompaktan Hausdorffov

## Definicija

Neka je  $X$  topološki prostor. Za familiju  $\mathcal{A}$  podskupova od  $X$  kažemo da je **lokalno konačna** u  $X$  ako svaka točka od  $X$  ima okolinu koja siječe samo konačno mnogo elemenata od  $\mathcal{A}$ .

Primjeri lok. konačnih familija.

## Lema (39.1)

Neka je  $\mathcal{A}$  lokalno konačna familija podskupova od  $X$ . Tada:

1. Svaka potfamilija od  $\mathcal{A}$  je lokalno konačna.
2. Familija  $\mathcal{B} = \{\text{Cl } A\}_{A \in \mathcal{A}}$  je lokalno konačna.
3.  $\text{Cl}(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \text{Cl } A$ .

Dokaz: 3.  $\supseteq$  uvijek, za  $\subseteq$  koristimo svojstvo lokalne konačnosti.

## Napomena

Za **indeksiranu** familiju  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$  podskupova od  $X$  kažemo da je lokalno konačna u  $X$  ako svaki  $x \in X$  ima okolinu koja siječe  $A_\alpha$  za samo konačno indeksa  $\alpha \in J$  (u indeksiranoj familiji skupovi se mogu ponavljati, pa je moguće  $A_\alpha = A$  za beskonačno mnogo indeksa  $\alpha$ !)

## Definicija

Za familiju  $\mathcal{B}$  podskupova od  $X$  kažemo da je **prebrojivo lokalno konačna** ili  **$\sigma$ -lokalno konačna** ako  $\mathcal{B}$  možemo prikazati kao prebrojivu uniju familija  $\mathcal{B}_n$  od kojih je svaka lokalno konačna.

Svaka prebrojiva i svaka lokalno konačna familija je prebrojivo lokalno konačna.

## Definicija

Neka je  $\mathcal{A}$  familija podskupova prostora  $X$ . Za familiju  $\mathcal{B}$  podskupova od  $X$  kažemo da je **profinjenje** od  $\mathcal{A}$  ako za svaki  $B \in \mathcal{B}$  postoji  $A \in \mathcal{A}$  koji sadrži  $B$ . Ako su elementi od  $\mathcal{B}$  otvoreni skupovi,  $\mathcal{B}$  zovemo **otvoreno profinjenje** od  $\mathcal{A}$ ; ako su elementi od  $\mathcal{B}$  zatvoreni skupovi,  $\mathcal{B}$  zovemo **zatvoreno profinjenje**.

## Lema (39.2, Prebrojivo lokalno konačan pokrivač metrizabilnog prostora)

Neka je  $X$  metrizabilan prostor. Ako je  $\mathcal{A}$  otvoren pokrivač od  $X$  tada postoji otvoren pokrivač  $\mathcal{E}$  od  $X$  koji profinjuje  $\mathcal{A}$  i koji je prebrojivo lokalno konačan.

Dokaz.

## Definicija

Za podskup  $A$  prostora  $X$  kažemo da je  $G_\delta$  **skup** u  $X$  ako je jednak presjeku prebrojive familije otvorenih podskupova od  $X$ .

Primjeri. U metričkom prostoru svaki zatvoren podskup je  $G_\delta$ -skup.

# Nagata–Smirnovljev teorem metrizacije

Teorem (40.3, Nagata – Smirnovljev teorem metrizacije)

Prostor  $X$  je metrizable ako i samo ako je regularan i ima prebrojivo lokalno konačnu bazu.

Štoviše,  $X$  ulažemo u metrički prostor  $([0, 1]^J, \bar{\rho})$  s uniformnom metrikom.

Koraci dokaza :

( $\Leftarrow$ ) (adaptacija 2. dokaza Urysohnovog teorema)

1. Lema 40.1: normalnost prostora
2.  $\mathcal{B} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$  baza,  $\mathcal{B}_n$  lokalno konačna. Lema 40.2  $\Rightarrow$  nađemo familiju (ne nužno prebrojivu) neprekidnih funkcija

$$\left\{ f_{n,B} : X \rightarrow [0, \frac{1}{n}] : n \in \mathbb{N}, B \in \mathcal{B}_n \right\}$$

koje separiraju točke od zatvorenih skupova u  $X$

$$(f_{n,B}|_B > 0, f_{n,B}(x) = 0, x \notin B).$$

3.  $F : X \rightarrow [0, 1]^J$ ,  $F(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha \in J}$ ,  $J = \{(n, B) : B \in \mathcal{B}_n, n \in \mathbb{N}\}$ , ulaganje u produktnoj topologiji (Teorem ulaganja 34.2);  
za ulaganje u uniformnoj topologiji dokazati neprekidnost  $F$ .

( $\Rightarrow$ ) Obrat.

## Lema (40.1)

Neka je  $X$  regularan prostor s bazom  $\mathcal{B}$  koja je prebrojivo lokalno konačna. Tada je  $X$  normalan. Svaki zatvoren skup u  $X$  je  $G_\delta$  skup u  $X$ .

Ideja dokaza: kao dokaz da je svaki regularan prostor s prebrojivom bazom normalan, ali nemamo prebrojivu bazu.

Pokazujemo: svaki otvoren skup  $W$  prikaziv kao prebrojiva unija otvorenih skupova takvih da  $W = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Cl}(U_n)$ . Koristimo  $\sigma$ -lokalnu konačnost.

## Lema (40.2)

Neka je  $X$  normalan i neka je  $A$  zatvoren  $G_\delta$  skup u  $X$ . Tada postoji neprekidna funkcija  $f : X \rightarrow [0, 1]$  takva da je  $f(x) = 0$  za  $x \in A$  i  $f(x) > 0$  za  $x \notin A$ .

Dokaz.

# Parakompaktnost

→ potrebno za Smirnovljev teorem metrizacije, cilj: uvjeti na prostor da bi lokalna merizabilnost povlačila metrizabilnost

## Definicija

Za prostor  $X$  kažemo da je **parakompaktan** ako svaki otvoreni pokrivač  $\mathcal{A}$  od  $X$  ima lokalno konačno otvoreno profinjenje  $\mathcal{B}$  koje pokriva  $X$ .

## Napomena

$X$  je kompaktan ako i samo ako svaki otvoreni pokrivač  $\mathcal{A}$  od  $X$  ima konačno otvoreno profinjenje  $\mathcal{B}$  koje pokriva  $X$ .

Primjer:  $\mathbb{R}^n$  je parakompaktan.

## Teorem (41.1)

Svaki parakompaktan Hausdorffov prostor  $X$  je normalan.

Dokaz: Pokazujemo regularnost pomoću Hausdorffovog svojstva, pa zatim iz regularnosti normalnost.

## Teorem (41.2)

Svaki zatvoreni potprostor parakompaktnog prostora je parakompaktan.

Primjer: Parakompaktan potprostor Hausdorffovog prostora ne mora biti zatvoren.

## Lema (41.3, Michaelova lema (za dokaz Stoneovog teorema))

Neka je  $X$  regularan. Tada su sljedeći uvjeti na  $X$  ekvivalentni:  
Svaki otvoreni pokrivač od  $X$  ima profinjenje koje je:

1. otvoreni pokrivač od  $X$  i prebrojivo lokalno konačan.
2. pokrivač od  $X$  i lokalno konačan.
3. zatvoreni pokrivač od  $X$  i lokalno konačan.
4. otvoreni pokrivač od  $X$  i lokalno konačan (parakompaktnost).

Bez dokaza.

## Teorem (41.4, Stoneov teorem)

**Svaki metrizable prostor je parakompaktan.**

Dokaz. Svaki otvoren pokrivač metrizable prostora ima prebrojivo lokalno konačno otvoreno profinjenje koje je pokrivač + Michaelova lema.

## Teorem (41.5)

Svaki regularan Lindelöfov prostor je parakompaktan.

Primjeri: Produkti parakompaktnih prostora.

# Postojanje particije jedinice u parakompaktnim Hausdorffovim prostorima

## Definicija

Neka je  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$  indeksirani otvoreni pokrivač prostora  $X$ .  
Indeksirana familija neprekidnih funkcija

$$\psi_\alpha : X \rightarrow [0, 1], \alpha \in J,$$

naziva se **particijom jedinice podređenom pokrivaču**  $\{U_\alpha\}$  ako:

1.  $\text{supp}(\psi_\alpha) \subseteq U_\alpha, \forall \alpha \in J,$
2. indeksirana familija  $\{\text{supp}(\psi_\alpha)\}_{\alpha \in J}$  je lokalno konačna,
3.  $\sum_{\alpha \in J} \psi_\alpha(x) = 1,$  za svaki  $x \in X$ .

---

<sup>2</sup> $\text{supp}(\psi_\alpha) = \text{Cl}(\{x \in X : \psi_\alpha(x) \neq 0\})$

## Teorem (41.7, Postojanje particije jedinice)

Neka je  $X$  parakompaktan Hausdorffov te neka je  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$  indeksiran otvoren pokrivač od  $X$ . Tada postoji particija jedinice na  $X$  podređena tom pokrivaču.

Dokaz: Lema o sažimanju dva puta, Urysohnova lema.

## Lema (41.6, Lema o sažimanju pokrivača)

Neka je  $X$  parakompaktan Hausdorffov te neka je  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$  indeksirani otvoreni pokrivač  $X$ . Tada postoji lokalno konačan indeksirani otvoreni pokrivač  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in J}$  koji **strogo profinjuje**  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ , tj.  $\text{Cl}(V_\alpha) \subseteq U_\alpha$ ,  $\alpha \in J$ .

Dokaz sami.

# Smirnovljevi teoremi metrizacije

## Definicija

Za prostor  $X$  kažemo da je **lokalno metrizabilan** ako svaka točka  $x$  od  $X$  ima okolinu  $U$  koja je metrizabilna u relativnoj topologiji.

## Teorem (42.1, Smirnovljevi teoremi metrizacije)

Prostor  $X$  je metrizabilan ako i samo ako je parakompaktan Hausdorffov i lokalno metrizabilan.

Dokaz: ( $\Leftarrow$ ) Pokazujemo postojanje prebrojivo lokalno konačne baze i primjena N-S teorema metrizacije.

## 6. Baireovi prostori i teorija dimenzije.

Prisjetimo se iz definicije interiora skupa:

Podskup  $A$  prostora  $X$  ima prazan interior ( $\text{Int } A = \emptyset$ ) ako i samo ako:

1.  $A$  ne sadrži niti jedan otvoreni podskup od  $X$  osim praznog skupa, ili
2. svaka točka od  $A$  gomilište je komplementa od  $A$ , tj. komplement od  $A$  je gust u  $X$  ( $\text{Cl}(X \setminus A) = X$ ).

## Definicija

Za prostor  $X$  kažemo da je **Baireov prostor** ako vrijedi sljedeći uvjet: Za svaku prebrojivu familiju  $\{A_n\}$  zatvorenih skupova od  $X$  koji imaju prazne interiore u  $X$ , unija  $\cup A_n$  također ima prazan interior u  $X$ .

*"Prebrojiva unija tankih skupova je tanka."*

Primjeri Baireovih prostora.

## Lema (48.1)

Prostor  $X$  je Baireov ako i samo ako za svaku prebrojivu familiju  $\{U_n\}$  otvorenih skupova od  $X$ , od kojih je svaki gust u  $X$ , njihov presjek  $\cap U_n$  je također gust u  $X$ .

Dokaz: prelazak na komplemente i definicija.

## Teorem (48.2, Baireov teorem o kategoriji)

Ako je  $X$  kompaktan Hausdorffov ili potpun metrički prostor, onda je  $X$  Baireov prostor.

Dokaz. Neka je  $\{A_n\}$  prebrojiva familija zatvorenih podskupova od  $X$  takvih da je  $\text{Int}(A_n) = \emptyset$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Pokazujemo:  $X \setminus \bigcup_n A_n$  je gust u  $X$ . Za proizvoljan otvoren skup  $U_0 \subseteq X$  tražimo  $x_0 \in U_0$  takav da je  $x_0 \in X \setminus \bigcup_n A_n$ . Formiramo jednu ugniježđenu familiju zatvorenih skupova u  $U_0$  i pokazujemo da je presjek neprazan. Tada  $x_0$  uzmemo iz nepraznog presjeka.

## Lema (48.3)

Neka je  $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots$  silazni niz nepraznih zatvorenih skupova potpunog metričkog prostora  $X$ . Ako  $\text{diam}(C_n) \rightarrow 0$ , onda  $\bigcap C_n \neq \emptyset$ .

Dokaz.

# Primjena Baireovog teorema – konstrukcija neprekidne, ali nigdje diferencijabilne funkcije

## Teorem (49.1)

Neka je  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna funkcija. Tada za svaki  $\varepsilon > 0$  postoji funkcija  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  koja je neprekidna, ali nigdje diferencijabilna takva da vrijedi

$$\max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Ideja dokaza.

- ▶ Promatramo prostor neprekidnih funkcija  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  s uniformnom metrikom

$$\rho(f, g) = \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|.$$

- ▶ Zatvoreni potprostor prostora funkcija  $\mathbb{R}^{[0, 1]}$  s uniformnom metrikom koji je potpun (zbog potpunosti  $\mathbb{R}$ ), pa je i sam *potpun*.
- ▶ Po Baireovom teoremu o kategoriji  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  s uniformnom metrikom je Baireov.

- ▶ Konstruiramo prebrojivu familiju  $\{U_n\}$  podskupova  $U_n \subseteq \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  otvorenih, gustih u  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  u uniformnoj metrici, te takvih da su funkcije u presjeku  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$  nigdje diferencijabilne.
- ▶ Tvrdnja tada slijedi jer je  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  s unif. metrikom Baireov, pa je  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$  gust u  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ .

### Konstrukcija skupova funkcija $U_n$ , $n \in \mathbb{N}$

- ▶ Za  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $0 < h \leq 1/2$  definiramo:

$$\Delta f(x, h) := \max \left\{ \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right|, \left| \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \right| \right\}$$

(maksimum apsolutne vrijednosti  $h$ -diferencija zdesna i slijeva u točki  $x$ ).

- ▶  $f$  diferencijabilna u  $x$  akko postoji  $\lim_{h \rightarrow 0} \Delta f(x, h)$ . Limes je tada jednak  $|f'(x)|$ .
- ▶  $\Delta_h f := \inf_{x \in [0, 1]} \Delta f(x, h)$
- ▶ Stavimo

$$U_n := \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) : \Delta_h f > n \text{ za neki } h < 1/n\}.$$

- ▶  $U_n$  neprazni: u  $U_n$  sigurno po dijelovima linearne funkcije s dovoljno velikim nagibima (po dijelovima *hat-funkcije*)
- ▶ pokazati gustoću  $U_n$  u  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  aproksimacijom funkcije s po dijelovima linearnom funkcijom dovoljno velikih nagiba (pogledajte sami detalje aproksimacije!)

# Teorija dimenzije. Topološka dimenzija prostora.

Pokazat ćemo:

- ▶ Svaki kompaktan podskup od  $\mathbb{R}^m$  ima topološku dimenziju najviše  $m$ .
- ▶ Kompaktna  $m$ -mnogostrukost ima topološku dimenziju najviše  $m$ .
- ▶ **Teorem o smještenju** (Menger, Nöbeling): Svaki kompaktan metrizabilan prostor topološke dimenzije  $m$  može se uložiti u  $\mathbb{R}^N$  za  $N = 2m + 1$ . (koristi se Baireov teorem o kategoriji)

## Definicija

Za familiju  $\mathcal{A}$  podskupova prostora  $X$  kažemo da ima **red**  $m + 1$  ako postoji točka od  $X$  koja leži u  $m + 1$  elemenata od  $\mathcal{A}$  i ne postoji točka od  $X$  koja leži u više od  $m + 1$  elemenata od  $\mathcal{A}$ .

## Definicija

Za prostor  $X$  kažemo da je **konačno-dimenzionalan** ako postoji  $m \in \mathbb{N}$  takav da za svaki otvoreni pokrivač  $\mathcal{A}$  od  $X$ , postoji otvoreni pokrivač  $\mathcal{B}$  od  $X$  koji profinjuje  $\mathcal{A}$  i ima red najviše  $m + 1$  (tj. ne postoji točka u  $X$  koja leži u više od  $m + 1$  elemenata od  $\mathcal{B}$ ).

**Topološka dimenzija** od  $X$  se definira kao najmanji  $m$  za koji vrijedi gornja tvrdnja i označava se sa  $\dim X$ .

Primjeri:

1. Topološka dimenzija kompaktnog podskupa od  $\mathbb{R}$  je najviše 1.
2. Topološka dimenzija kompaktnog podskupa od  $\mathbb{R}^2$  je najviše 2.
3. Interval  $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  ima topološku dimenziju točno 1.

## Teorem (50.6)

Svaki kompaktni potprostor od  $\mathbb{R}^N$  ima topološku dimenziju najviše  $N$ .

Dokaz. Generalizacija Primjera 2. na dimenziju  $N \geq 3$  (radi se u kvadratnoj metrici  $\rho$ ).

### Teorem (50.1)

Neka je  $X$  konačno-dimenzionalan prostor. Ako je  $Y$  zatvoreni potprostor od  $X$ , tada je  $Y$  konačno-dimenzionalan i vrijedi  $\dim Y \leq \dim X$ .

Dokaz.

### Teorem (50.2)

Neka je  $X = Y \cup Z$ , gdje su  $Y$  i  $Z$  zatvoreni konačno-dimenzionalni potprostori od  $X$ . Tada je  $\dim X = \max\{\dim Y, \dim Z\}$ .

Dokaz ne (tehnički).

### Korolar (50.3)

Neka je  $X = Y_1 \cup \dots \cup Y_k$ , gdje je svaki  $Y_i$  zatvoreni konačno-dimenzionalni potprostor od  $X$ . Tada je  $\dim X = \max\{\dim Y_1, \dots, \dim Y_k\}$ .

## Definicija

**$m$ -mnogostrukost** je Hausdorffov prostor  $X$  koji zadovoljava 2. aksiom prebrojivosti takav da svaka točka  $x$  od  $X$  ima okolinu homeomorfnu s otvorenim podskupom od  $\mathbb{R}^m$  (*lokalno euklidska*).

## Korolar (50.7)

Svaka kompaktna  $m$ -mnogostrukost ima topološku dimenziju najviše  $m$ .

Dokaz: Za  $f$  homeomorfizam je  $f(\text{Cl}(A)) = \text{Cl}(f(A))$ , neprekidna slika kompakta je kompakt + Korolar 50.3.

# Potrebno za dokaz Teorema o smještenju...

## Definicija

Za skup točaka  $\{x_0, \dots, x_k\}$  od  $\mathbb{R}^N$  kažemo da je **geometrijski nezavisan** ako jednadžbe

$$\sum_{i=0}^k a_i x_i = 0 \quad \text{i} \quad \sum_{i=0}^k a_i = 0$$

vrijede samo ako je svaki  $a_i = 0$ ,  $i = 0, \dots, k$ .

## Napomena

Skup točaka  $\{x_0, \dots, x_k\}$  u  $\mathbb{R}^N$  je geometrijski nezavisan ako i samo ako je skup vektora  $\{x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0\}$  linearno nezavisan u  $\mathbb{R}^N$ .

Skup geometrijski nezavisnih točaka u  $\mathbb{R}^N$  ima najviše  $N + 1$  element.

**Dokaz:** Izrazimo  $a_0 = -\sum_{i=1}^k a_i$  iz druge jednakosti i stavimo u prvu.

Primjer:  $\mathbb{R}^3$ . Dvije različite točke čine geometrijski nezavisan skup. Tri točke čine geometrijski nezavisan skup ako nisu kolinearne, četiri ako nisu komplanarne.

## Definicija

Za skup  $A$  točaka od  $\mathbb{R}^N$  kažemo da je u **općem položaju** u  $\mathbb{R}^N$  ako je svaki podskup od  $A$  koji sadrži  $N + 1$  ili manje točaka geometrijski nezavisan.

Primjer: Skup točaka  $A$  u prostoru  $\mathbb{R}^3$  je u općem položaju ako nikoje tri nisu kolinearne i nikoje četiri nisu komplanarne.

Svaki skup točaka **malim pomakom možemo dovesti u opći položaj**:

## Lema (50.4)

Za svaki konačan skup točaka  $\{x_1, \dots, x_n\}$  od  $\mathbb{R}^N$  i za svaki  $\delta > 0$  postoji skup točaka  $\{y_1, \dots, y_n\}$  od  $\mathbb{R}^N$  u općem položaju u  $\mathbb{R}^N$  takav da je  $|x_i - y_i| < \delta$  za svaki  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Dokaz: indukcijom,  $\mathbb{R}^N$  Baireov prostor.

## Teorem (50.5, Teorem o smještenju (Menger, Nöbeling))

**Svaki kompaktan metrizabilan prostor  $X$  topološke dimenzije  $m$  može se smjestiti u  $\mathbb{R}^{2m+1}$ .**

Ilustracija na primjeru: *konačan linearan graf* (=Hausdorffov prostor koji je unija konačno mnogo lukova (=homeomorfnih slika segmenta) od kojih se svaka dva sijeku eventualno u rubnoj točki), dimenzije 1, konstruiramo smještenje u  $\mathbb{R}^3$

### Korolar (50.8)

Svaka kompaktna  $m$ -mногоstrukost može se smjestiti u  $\mathbb{R}^{2m+1}$ .

Dokaz: metrizabilnost iz Smirnovljevog teorema metrizacije.

### Korolar (50.9)

Neka je  $X$  kompaktan metrizabilan prostor. Tada se  $X$  može smjestiti u euklidski prostor  $\mathbb{R}^N$  ako i samo ako je  $X$  konačno-dimenzionalan.

Dokaz: ( $\Rightarrow$ ) Teorem 50.6, ( $\Leftarrow$ ) Teorem 50.5.

---

Napomena: Moguće je tvrdnje dokazati i u nekompaktnom slučaju. Za dokaz da je dimenzija  $m$ -mногоstrukosti baš jednaka  $m$ , te da je  $\mathbb{R}^{2m+1}$  euklidski prostor najniže dimenzije u koji se ulaže  $m$ -mногоstrukost trebamo tehnike algebarske topologije!

## 7. Potpuni metrički prostori i metrike na funkcijskim prostorima.

(Sami, bez dokaza. Munkres, Poglavlje 7.)