Uvod u kompleksnu dinamiku, predavanja

M. Resman

14. lipnja 2023.

Ovi materijali prate predavanja na kolegiju Uvod u kompleksnu dinamiku. Neke od činjenica bit će zadane u obliku zadataka za vježbu i razmišljanje s uputama. Također, neki dokazi će biti dani samo idejno, kao skice dokaza. Njihovo rješavanje i razumijevanje je bitno za mogućnost kvalitetnog praćenja kolegija.

Odjeljci u tekstu označeni kao *Zanimljivost* predstavljaju naprednije teme koje mogu poslužiti i kao teme za seminarski rad.

Sadržaj

1 Uvod **4**

1.1 Pregled temeljnih rezultata iz kompleksne analize za kompleksne funkcije jedne kompleksne varijable. 4

1.1.1 Analitičnost i kompleksni redovi potencija 4

2 Osnovni koncepti diskretne dinamike **8**

2.1 Diskretni vs. kontinuirani dinamički sustavi. Međusobne veze i veze s diferencijskim i diferencijalnim jednadžbama. 8

2.5 Lokalna i globalna analiza diskretnih dinamičkih sustava 11

2.5.1 Lokalna analiza holomorfnih iteracija oko fiksnih točaka . 12

2.9.1 Globalna analiza iteracija holomorfnih funkcija na sferi . . 15

3 Uniformizacijski teorem za 1-povezane Riemannove plohe **17**

3.3 Konformalna preslikavanja 19

3.11 Teorem uniformizacije: biholomorfna klasifikacija 1-povezanih Riemannovih ploha 23

4 Holomorfne i meromorfne funkcije na sferi $\overline{\mathbb{C}}$ **25**

5 Konformalni automorfizmi $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ i $\mathbb{D}$ **29**

5.0.1 Konformalni automorfizmi sfere 29

5.7.1 Konformalni automorfizmi $\mathbb{C}$ 33

5.9.1 Konformalni automorfizmi diska 34

5.14.1 Fiksne točke konformalnih automorfizama $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ i $\mathbb{D}$ i komutatori grupa konformalnih automorfizama 36

6 Generalni teorem uniformizacije **42**

6.1 Prostori natkrivanja, univerzalno natkrivanje, deck transformacije 42

6.1.1 Prostori natkrivanja 42

6.4.1 Lema o podizanju 45

6.5.1 Univerzalna natkrivanja Riemannovih ploha. Egzistencija i jedinstvenost. 46

6.9.1 Deck transformacije 48

6.11.1 Normalna natkrivanja 48

6.17.1 Generalni uniformizacijski teorem za Riemannove plohe . 52

6.28.1 Posljedice biholomorfne klasifikacije Riemannovih ploha . 58

7 Standardne metrike konstantne zakrivljenosti na Riemannovim plohama 61
7.1 Riemannova metrika na holomorfnoj plohi 61
7.5.1 Udaljenost točaka na $\mathcal{S}$ u Riemannovoj metrici 63
7.19 Zakrivljenost krivulja i ploha 68
7.19.1 Lokalna zakrivljenost krivulja u $\mathbb{R}^2$. 69
7.20.1 Zakrivljenost Riemannovih ploha i plohe konstantne zakrivljenosti. 70
7.23 Hiperbolička ili Poincaréova metrika na disku/gornjoj poluravnini 71
7.34 Sferna metrika 75
7.37 Metrike na općenitim Riemannovim plohama 77

8 Globalna dinamika holomorfnih iteracija na $\overline{\mathbb{C}}$ 79
8.1 Normalne i ekvikontinuirane familije 79
8.5.1 Montelov teorem 80
8.11 Definicija Fatouovog i Julievog skupa 81
8.14.1 Fatouovi i Julievi skupovi na sferi $\overline{\mathbb{C}}$ 82
8.18 Svojstva i opis Fatouovih i Julievih skupova 84
8.21.1 "Lokalna dinamika": periodičke i fiksne točke holomorfnih preslikavanja 85
8.35.1 Juliev i Fatouov skup holomorfnih funkcija na $\overline{\mathbb{C}}$ 91
8.45.1 Kako nacrtati Juliev skup racionalne funkcije na sferi na računalu? 95

9 Lokalna dinamika u $\mathbb{C}$ oko fiksnih točaka 97
9.1 Jako hiperbolička fiksna točka 97
9.2 Hiperbolička fiksna točka 97
9.3 Parabolička fiksna točka i racionalno invarijantne fiksne točke . . 97
9.4 Iracionalno invarijantne fiksne točke 97

Poglavlje 1

Uvod

1.1 Pregled temeljnih rezultata iz kompleksne analize za kompleksne funkcije jedne kompleksne varijable.

U ovom poglavlju prisjetit ćemo se nama važnijih činjenica iz kompleksne analize, te nekih "‘iznenađujuće" rigidnih rezultata koji vrijede za kompleksne funkcije jedne kompleksne varijable.

1.1.1 Analitičnost i kompleksni redovi potencija

Definicija 1.2 (Analitička funkcija)**.** *Za funkciju* $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*,* $D \subseteq \mathbb{C}$ *otvoren, kažemo da je* analička u $z_0 \in D$ *ako postoje kompleksni red potencija oko točke* z_0*,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \; a_n \in \mathbb{C}, \tag{1.2.1}$$

te $r > 0$ *(proizvoljno mali) takvi da:*

1. *Za svaki* $z \in \mathbb{D}(z_0, r)$[1] $\subseteq D$ *red* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ *konvergira,*
2. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$*, za svaki* $z \in \mathbb{D}(z_0, r)$ *(na tom disku red konvergira upravo funkciji* f *po točkama).*

Kažemo da je f analitička na D *ako je analitička u svakoj točki* $z \in D$*.*

Rigidnost derivabilnosti kompleksnih funkcija kompleksne varijable (derivabilno u točki=neprekidno derivabilna svakog reda u točki=analitičko u točki) slijedi iz teorema koji govori da je svaka funkcija derivabilna na nekom disku potpuno određena vrijednostima na rubu diska. Preciznije, vrijedi:

[1] Otvoreni disk oko z_0 radijusa $r > 0$, $\mathbb{D}(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$.

Teorem 1.3 (Cauchyjeva integralna formula, e.g. [1, 13]). *Neka je $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ otvoreni disk, derivabilna na $\mathbb{D}$. Neka je $z_0 \in \mathbb{D}$ te neka je $S(z_0, r) \subseteq \mathbb{D}$, $r > 0$, bilo koja pozitivno orijentirana kružnica*[2]. *Tada sve derivacije u z_0 postoje, neprekidne su i vrijedi formula:*

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{S(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \; k \in \mathbb{N}_0.$$

Skica dokaza. Za $k = 0$ posljedica *Cauchyjevog teorema* o nul integralu derivabilne funkcije po jednostavno zatvorenoj krivulji u 1-povezanom području primijenjenog na $z \mapsto \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$. Zbog derivabilnosti je u z_0 uklonjiv singularitet. Zatim s derivacijom po z_0 smijemo "ući pod integral", radi teoretskih rezultata o neprekidnoj derivabilnosti i derivaciji krivuljnih integrala ovisnih o parametru, u slučaju kad podintegralna funkcija neprekidno ovisi o parametru na području integracije. Za više derivacije induktivno. □

Dakle, za razliku od realnog slučaja, postojanje 1. derivacije funkcije kompleksne varijable u točki povlači neprekidnu derivabilnost svakog reda te funkcije u toj točki. Sjetimo se da je postojanje kompleksne derivacije u točki puno jači uvjet nego postojanje parcijalnih derivacija te funkcije gledane kao vektorske funkcije dviju realnih varijabli.

U daljnjem ćemo funkcije derivabilne u točki (na otvorenom skupu) zvati *holomorfnim funkcijama*.

Sljedeći teorem je izuzetno važan u teoriji analitičkih funkcija i kompleksnih redova potencija:

Teorem 1.4 (Abelov teorem, [1]). *Za svaki kompleksni red potencija* (1.2.1) *oko $z_0 \in \mathbb{C}$ postoji $R \in [0, +\infty]$ takav da:*

1. *Red* apsolutno *konvergira za svaki $z \in \mathbb{D}(z_0, R)$ te* uniformno *konvergira*[3] *na $\overline{\mathbb{D}}(z_0, \rho)$, za svaki $0 \leq \rho < R$.*
2. *Za svaki $z \notin \overline{\mathbb{D}}(z_0, R)$ (tj. takav da je $|z - z_0| > R$) red* (1.2.1) divergira.
3. *Definirajmo funkciju $f : \mathbb{D}(z_0, R) \to \mathbb{C}$ s:*

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \; z \in \mathbb{D}(z_0, R).$$

[2]Misli se na krivulju koja obilazi kružnicu jednom u pozitivnom smjeru (=obratno od kazaljke). Krivulja u formuli ne mora biti kružnica, već bilo koja pozitivno orijentirana jednostavno zatvorena krivulja kojoj je z_0 u unutrašnjosti. Postoje i varijante formule sa zatvorenim krivuljama koje više puta obilaze točku, tada se u formulu dodaje *namotajni broj* krivulje oko točke, v. [1] za detalje.

[3]Prisjetimo se: red funkcija (ovdje: $z \mapsto a_n(z - z_0)^n$, $n \in \mathbb{N}$, su kompleksne funkcije kompleksne varijable koje zovemo *potencijama*) konvergira apsolutno, uniformno, po točkama na D ako mu niz parcijalnih suma kao kompleksnih funkcija kompleksne varijable konvergira apsolutno, uniformno, po točkama na D!

Tada je ta funkcija holomorfna na $\mathbb{D}(z_0, R)$, te se sve derivacije u svim točkama dobivaju deriviranjem reda član po član. *Drugim riječima,*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n(n-1)\cdots(n-k+1)(z-z_0)^{n-k}, \; z \in \mathbb{D}(z_0, R), \; k \in \mathbb{N}. \tag{1.4.1}$$

Taj R zovemo radijusom konvergencije *reda* (1.2.1).

Skica dokaza. Uz pretpostavku da red apsolutno konvergira za neki z, pokazuje se da apsolutno konvergira i za svaki w takav da $|w - z_0| < |z - z_0|$, te, ako divergira za neki z, pokazuje se da divergira i za svaki w takav da $|w-z_0| > |z-z_0|$. Uniformnost konvergencije niza parcijalnih suma se pokazuje uniformnom ocjenom ostatka reda na $\overline{\mathbb{D}}(z_0, \rho)$. Derivabilnost se pokazuje po definiciji. □

Zadatak 1.5. *Pokažite (induktivno po redu derivacije) da je mogućnost 'deriviranja reda član po član' točki 3. Teorema 1.4 posljedica uniformne konvergencije i Cauchyjeve integralne formule.*

Funkcija f definirana u točki 3. Teorema 1.4 je očito analitička u svakoj točki diska $\mathbb{D}(z_0, R)$, po Definiciji 1.2. Nadalje, po formuli (1.4.1) je

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Red potencija (1.2.1) zovemo *Taylorovim razvojem* analitičke funkcije f oko točke z_0.

Primijetimo: za redove potencija unutar radijusa konvergencije imamo apsolutnu i uniformnu konvergenciju, izvan radijusa divergenciju, dok na kružnici $S(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : \; |z - z_0| = R\}$ radijusa konvergencije teorem ništa ne govori o konvergenciji niti o divergenciji.

Ipak, u slučaju da u nekoj točki kružnice $S(z_0, R)$ red potencija (1.2.1) konvergira, vrijedi tzv. *granični Abelov teorem [1]*:

Teorem 1.6 (Granični Abelov teorem, [1])**.** *Neka je $w \in S(z_0, R)$ na kružnici radijusa konvergencije za red potencija* (1.2.1)*. Neka red $\sum_n a_n(w - z_0)^n$ konvergira. Tada $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $z \in \mathbb{D}(z_0, R)$, konvergira k njegovoj sumi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(w - z_0)^n$, kad $z \to w$ unutar nekog sektora*[4] *otvora strogo manjeg od π s vrhom u w i okomitog na vektor w.*

Zanimljivost (i moguća seminarska tema): Abelov teorem nam nudi način sumacije divergentnih redova, tzv. *Abelovu sumaciju divergentnih redova.* Neka je dan konvergentan red potencija $\sum_n a_n(z-z_0)^n$ na disku konvergencije $\mathbb{D}(z_0, R)$, te neka je $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $z \in \mathbb{D}(z_0, R)$, pridružena analitička funkcija. Neka je $w \in S(z_0, R)$. Ako postoji limes $\lim_{z\to w} f(z)$, taj limes zovemo

[4]Nije dozvoljena konvergencija prema w koja iznutra 'tangira' $S(z_0, R)$.

sumom reda $\sum_n a_n(w-z_0)^n$ *u Abelovom smislu.* Drugim riječima, moguće je da funkcija f, dana sumom reda $\sum_n a_n(z-z_0)^n$ na disku konvergencije, ima neprekidno ili analitičko proširenje u neko područje van diska konvergencije (iako njezin Taylorov red $\sum_n a_n(z-z_0)^n$ u tim točkama ne konvergira), pa u tim točkama ima smisla definirati "Abelovu sumu reda" kao vrijednost tog analitičkog proširenja. Red $\sum_n a_n z^n$ je asimptotski razvoj te analitičke funkcije, definirane na nekoj većoj domeni, u točki z_0.

Primijetimo, puni smisao ovakvog sumiranja postiže se ako red $\sum_n a_n(w-z_0)^n$ koji želimo sumirati *divergira.* U protivnom, ako taj red konvergira, prema graničnom Abelovom teoremu je njegova suma u Abelovom smislu zapravo standardna suma reda!

Tijekom kolegija spominjat ćemo i neke druge sumacije divergentnih redova potencija važne kod rješavanja diferencijskih i diferencijalnih jednadžbi pomoću formalnih redova potencija (Eulerova jednadžba, Airyjeva jednadžba), kao npr. *Gevreyevu sumaciju.* U većini problema iz prirode formalna rješenja takvih jednadžbi neće biti konvergentni redovi, iz jednostavnog razloga što rješenja nisu analitička na disku, već samo na otvorenim podsektorima. Kod takve sumacije suma divergentnog reda (za kojeg ne postoji analitička suma na disku) je *sektorijalno analitička* funkcija kojoj je taj red asimptotski razvoj. Uvodno o pojavi divergentnih redova u modelima iz prirode možete pročitati na linkovima [14], te detaljnije u npr. [2].

Zadatak 1.7. *Odredite sumu u Abelovom smislu (ako postoji) sljedećih divergentnih redova:*
(a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ *(Rješenje:* 1/2),
(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *(Rješenje:* $\log 2$*).*

Zadatak 1.8. *Za* realne funkcije jedne realne varijable, *povlači li činjenica da je funkcija C^∞ u nekoj točki (tj. postoji neka okolina I točke na kojoj je funkcija beskonačno puta derivabilna i sve derivacije su joj neprekidne) analitičnost funkcije u toj točki? A obratno? Navedite kontraprimjer, dokažite i razmislite koji rezultati u $\mathbb{C}$ (koji ne vrijede u $\mathbb{R}$) omogućuju ekvivalenciju analitičnosti i derivabilnosti u $\mathbb{C}$.*

Uputa: *Abelov teorem daje derivabilnost analitičke funkcije kompleksne varijable. Za drugi smjer, analitičnost derivabilne funkcije, treba pokazati da red* $\sum_n \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ *konvergira prema $f(z)$ na nekom disku oko z_0. Koristiti npr. Cauchyjevu integralnu formulu.*

Dakle, za kompleksne funkcije jedne kompleksne varijable, pojam *holomorfna (derivabilna) funkcija* (u točki, na otv. skupu) i pojam *analitička funkcija* (u točki, na otv. skupu) koristit ćemo kao sinonime!

Poglavlje 2

Osnovni koncepti diskretne dinamike

2.1 Diskretni vs. kontinuirani dinamički sustavi. Međusobne veze i veze s diferencijskim i diferencijalnim jednadžbama.

Diskretnim dinamičkim sustavom nazivamo par (X, f) skupa $X \neq 0$ i preslikavanja $f : X \to X$. Zanima nas dugoročno ponašanje iteracija neke početne točke $x_0 \in X$. Za n-tu iteraciju koristit ćemo oznaku:

$$x_n := f^{\circ n}(x_0) = f\big(f \cdots (x_0)\big),\ n \in \mathbb{N}_0.$$

(zapravo bi točnije bilo pisati $x_n^{x_0}$ jer iteracija ovisi o početnoj točki, ali to ćemo, jednostavnosti radi, prešutno izostavljati pamteći o kojoj početnoj točki se radi). S

$$\mathcal{O}^f(x_0) := \{f^{\circ n}(x_0) :\ n \in \mathbb{N}_0\}$$

označavat ćemo skup, odnosno s $(f^{\circ n}(x_0))_n \equiv (x_n)_n$ niz, koje, malo neprecizno[1], oboje nazivamo *orbitom (pozitivnom, u pozitivnom diskretnom vremenu) iz početne točke x_0*. Radi preciznosti, pod pojmom *orbita* podrazumijevat ćemo niz, a skup $\mathcal{O}^f(x_0)$ ćemo u kolegiju radije zvati *slikom orbite*.

Primijetimo da diskretni dinamički sustav, umjesto parom (X, f), ekvivalentno možemo zadati jednokoračnom diferencijskom jednadžbom (rekurzijom):

$$x_{n+1} = f(x_n),\ n \in \mathbb{N}_0,$$

[1] U slici niza gubimo informaciju o ponašanju niza u vremenu, tj. možemo imati dva niza s istom slikom koji su različiti. Npr. periodični niz točaka $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ i stacionarni niz $-1, 1, 1, 1, 1, \ldots$ imaju istu sliku, ali te dva niza imaju značajno rauzličito ponašanje u vremenu! Kad promatramo orbite koje su injektivne i usmjerene u vremenu (npr. skup X je totalno uređen i orbita monotona), tada ta dva pojma možemo 'izjednačiti' bez gubitka informacije.

s početnim uvjetom $x_0 \in X$.

Objasnimo intuitivno (bez ulaženja u detaljnu analizu i preveliku preciznost) razliku *diskretnih* i *kontinuiranih* dinamičkih sustava. *Kontinuirani dinamički sustav na* X je zapravo 1-parametarska familija[2] preslikavanja $\{f_t : X \to X : t \in \mathbb{R} \text{ (ili } \mathbb{C})\}$, koja je *tok*:

(1) $f_0 = \mathrm{id}$,

(2) $f_{t+s} = f_t \circ f_s, \ \forall t, s \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$.

Funkciju $f_t : X \to X$ nazivamo t*-tokom*, $t \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$.

Intuitivno, kontinuirani dinamički sustav je zadan u kontinuiranom vremenu, dok je diskretni zadan u diskretnom vremenu. Naime, ako za diskretni dinamički sustav (X, f) definiramo $f_n := f^{\circ n}$, $n \in \mathbb{N}_0$ (ili $\mathbb{Z}$ za invertibilne funkcije), dobivamo tok u diskretnom vremenu $\{f_n : X \to X : \ n \in \mathbb{N}_0 \text{ (ili } \mathbb{Z})\}$.

Zadatak 2.2. *Dokažite da tok* $\{f_t : X \to X : \ t \in \mathbb{R} \ (\mathbb{C})\}$ *čini komutativnu grupu obzirom na kompoziciju, a tok* $\{f_t : X \to X : \ t \geq 0\}$ *komutativnu polugrupu.*

Za kontinuirane i diskretne sustave možemo zahtijevati dodatna svojstva prostora X i funkcija f, f_t, kao npr. da je prostor X topološki, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$; da su $f, f_t, t \in \mathbb{R}$, neprekidne, diferencijabilne, klase C^k, analitičke na nekoj domeni... Također, ovisnost familije o vremenskoj varijabli (parametru t) se često traži da je neprekidna u nekoj funkcijskoj normi, diferencijabilna, klase C^k, analitička...

U ovom kolegiju, $X \subseteq \mathbb{C}$ (ili njegove jednotočkovne kompaktifikacije $\overline{\mathbb{C}}$, tj. Riemannove sfere), a f analitička. U slučaju kontinuiranog sustava $\{f_t\}_{t \in \mathbb{C}}$, tražit ćemo f_t analitičke po $x \in X$ (ili na nekom podskupu X koji može ovisiti o t, ovdje ostajemo malo neprecizni) i po parametru $t \in \mathbb{C}$. Takve sustave, diskretne ili kontinuirane, nazivat ćemo *analitičkim*.

Kao što je diskretni sustav dan jednokoračnom diferencijskom jednadžbom, tako je i kontinuirani sustav dovoljne glatkoće na mnogostrukosti (tok) zapravo ekvivalentno zadan autonomnom *diferencijalnom jednadžbom 1. reda*, tj. *vektorskim poljem.*

Neka je $X \subseteq \mathbb{R}$ radi jednostavnosti (ili $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$, ili $\overline{\mathbb{C}}$). Glatkoća po vremenskoj varijabli $t \in \mathbb{R}$ nam omogućuje zapisivanje toka $\{f_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ u obliku autonomne diferencijalne jednadžbe 1. reda, tj. vektorskog polja. Stavimo

$$x'(t) = \frac{d}{dt} f_t(x)|_{t=0}, \tag{2.2.1}$$

te time dobivamo jednu diferencijalnu jednadžbu 1. reda (tj. vektorsko polje) na X. Vrijedi $f_t(x_0) = x(t)$, gdje je $t \mapsto x(t)$ rješenje gornje diferencijalne jednadžbe kroz početnu točku $(0, x_0)$, $x_0 \in X$, $t \in \mathbb{R}$. Takvo rješenje postoji i jedinstveno je (po Picardovom teoremu, dovoljna glatkoća $f_t(x)$ u prostornoj varijabli x na X osigurava dovoljnu glatkoću desne strane jednadžbe). Kažemo i da je sustav $\{f_t : t \in \mathbb{C}\}$ *tok diferencijalne jednadžbe* (2.2.1).

[2] U praksi ćemo u 1-parametarsku familiju stavljati i npr. samo pozitivno vrijeme, $t \geq 0$.

Obratno, ako imamo autonomnu diferencijalnu jednadžbu 1. reda (tj. vektorsko polje) dovoljne glatkoće koja zadovoljava uvjete za postojanje i jedinstvenost rješenja na nekoj domeni X globalno[3] u vremenu $t \in \mathbb{R}$, tada je na toj domeni zadan kontinuirani sustav (tok) $\{f_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ formulom $f_t(x_0) := x(t)$, gdje je $t \mapsto x(t)$ rješenje diferencijalne jednadžbe kroz početnu točku $(0, x_0)$, $x_0 \in X,\ t \in \mathbb{R}$. Štoviše, desna strana jednadžbe je jednaka $\frac{d}{dt} f_t(x)|_{t=0}$.

Zadatak 2.3. *Provjerite gore navedene tvrdnje da je zadavanje autonomne diferencijalne jednadžbe 1. reda ekvivalentno zadavanju toka, tj. kontinuiranog sustava, uz pretpostavke dovoljne glatkoće.*

Uputa: Možete si pomoći nekom standardnom knjigom o diferencijalnim jednadžbama gdje je definiran tok diferencijalni jednadžbi, npr. [16, Poglavlje 2.5].

Zadatak 2.4. *Riješite diferencijalnu jednadžbu na $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$ ($\mathbb{D}$ je jedinični disk):*

$$z' = z^2,$$

gdje je derivacija po kompleksnom vremenu $t \in \mathbb{C}$. Izračunajte eksplicitno pridruženi kontinuirani dinamički sustav, tj. tok $\{f_t : t \in \mathbb{C}\}$[4], te odredite 1-tok i i-tok. Skicirajte nekoliko krivulja rješenja $t \mapsto z(t)$ jednadžbe u realnom vremenu, te diskretnu orbitu 1-toka i i-toka za nekoliko početnih točaka.

Rješenje. Napravimo separaciju varijabli i integriramo za t-tok po vremenu $\int_0^t$, $t \in \mathbb{C}$. Tako izračunamo $f_t(z) = \frac{z}{1-tz}$, $z \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{C}$. Slika 2.1 prikazuje krivulje rješenja $t \mapsto z(t)$, u realnom vremenu $t \in \mathbb{R}$, kroz nekoliko početnih točaka (inače krivulje kontinuirano ispunjavaju prostor). Crvene orbite prikazuju orbite 1-tokova, tj. jedan diskretni dinamički sustav generiran s $f(z) = \frac{z}{1-z}$. Vidimo da se trajektorije 1-tokova, ovisno o tome izaberemo li početnu točku u lijevoj ili desnoj poluravnini, približavaju/udaljavaju od ishodišta u dva tangencijalna smjera na x-osi (jedan je privlačni, drugi odbojni). Primijetimo da, dok orbite 1-toka, očekivano, prate krivulje rješenja $t \mapsto z(t)$ u realnom vremenu, orbite i-toka $z_n := f_i^{\circ n}(z_0)$, $n \in \mathbb{N}$, (zelene orbite) su 'transverzalne' na krivulje rješenja. Opet očekivano, kompleksnim vremenom smo dobili više 'slobode kretanja' u drugim smjerovima, te u kompleksnom vremenu s ne-nul imaginarnim dijelom zapravo prelazimo s jedne realne trajektorije na drugu.

Iz kontinuiranog (analitičkog) sustava uvijek možemo izdvojiti diskretni (analitički) tako da gledamo njegov 1-tok (tok u vremenu 1, engl. *time-one map*), stavljajući

$$f := f_1,$$

te je (X, f) diskretni (analitički) dinamički sustav. Jasno je da iz diskretnog dinamičkog sustava ne možemo nužno dobiti kontinuirani kojem je f 1-tok, jer ne znamo kako bismo definirali razlomljene iteracije funkcije, a da dobivena

[3] Radi jednostavnosti, ovdje smo neprecizni: vremenski interval može biti i neki ograničeni interval, a i prostor X može biti samo neka okolina ishodišta, dakle, tok i jednadžba mogu biti i samo lokalno analitički, vrijedi ista analiza.

[4] Tok će biti analitički na ograničenom vremenskom intervalu, tj. za $|t|$ dovoljno mali.

orbita.jpg

Slika 2.4.1: Slika izrađena u *Mathematici.* DODATI.

familija bude tok. Dodatno se zahtjev komplicira ako želimo zadržati *klasu* sustava, pa tako iz analitičkog diskretnog sustava želimo dobiti analitički kontinuirani sustav kojem je on 1-tok. Ukoliko je to moguće, kažemo da postoji *ulaganje* (engl.*embedding*) (analitičkog) diskretnog dinamičkog sustava u (analitički) kontinuirani. Svakako je to poželjno svojstvo jer nam ulaganje u tok omogućuje dodatni način procjene ponašanja iteracija u vremenu (npr. rješavanjem diferencijalne jednadžbe pridružene tom toku analitički, kvalitativnom analizom (crtanjem polja smjerova), numeričkim metodama). To ulaganje može postojati globalno, na čitavoj domeni X ili na čitavom disku oko neke točke, ili lokalno, npr. na otvorenom sektoru oko neke točke. Takve primjere vidjet ćemo u dijelu kolegija koji se bavi lokalnom analizom iteracija oko fiksne točke.

Napomena. Primijetimo da je u Zadatku 2.4 postojalo ulaganje diskretnog sustava $f(z) = \frac{z}{1-z}$ u globalni analitički kontinuirani sustav $z' = z^2$, tj. $\{f_t(z) = \frac{z}{1-tz}\}_t$ (svaka funkcija f_t je analitička po z na nekoj okolini ishodišta). To ulaganje postoji globalno, pa pogotovo na nekoj okolini ishodišta. Naravno, to je posljedica činjenice da smo zapravo krenuli od kontinuiranog sustava i onda za diskretni uzeli njegov 1-tok. Međutim, ako promotrimo analitičku funkciju $f(z) = \frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \dots$ na disku konvergencije radijusa 1 i umjesto nje uzmemo, recimo, njezinu aproksimaciju 3. Taylovim polinom, analitičku funkciju $f(z) = z + z^2 + z^3$, neće postojati analitički tok u kojeg se ona ulaže na proizvoljno maloj okolini ishodišta. Neće pomo ' ci niti ako uzmemo bolju aproksimaciju Taylorovim polinomom proizvoljnog reda. Postojat će, ipak, ulaganja u analitički tok, tj. u analitičko polje, na dva otvorena kompleksna sektora postavljena u privlačnom i odbojnom smjeru. To će, među ostalim, biti predmet lokalne analize u Poglavlju **??**.

2.5 Lokalna i globalna analiza diskretnih dinamičkih sustava

U kolegiju ćemo se baviti lokalnom i globalnom analizom orbita globalno holomorfnih funkcija na *Riemannovoj sferi*[5]. Pokazat ćemo da se nužno radi o

[5]Riemannova sfera je kompleksna Riemannova 1-mnogostrukost, dakle, topološki prostor opskrbljen diferencijabilnim atlasom, te sa skalarnim produktom na tangencijalnim prostorima koji je usklađen s diferencijabilnom struktorom. Topološki, radi se o 1-točkovnoj kompaktifikaciji euklidskog prostora $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ točkom ∞, $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. Topologija je dana s: skup $U \subset \mathbb{C}\cup\{\infty\}$

racionalnim kompleksnim funkcijama jedne kompleksne varijable. Dakle, naš sustav je holomorfni diskretni sustav $(\overline{\mathbb{C}}, f)$, gdje je f holomorfna.

2.5.1 Lokalna analiza holomorfnih iteracija oko fiksnih točaka

Zanimat će nas lokalno ponašanje orbita funkcije f koja je holomorfna na nekoj otvorenoj okolini[6] $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$ svoje fiksne točke.[7] Promatramo iteracije orbita s početnom točkom u blizini fiksne točke funkcije. Bez smanjenja općenitosti[8] možemo pretpostaviti da je ta točka ishodište, tj. da je $f(0) = 0$.

Zadatak 2.6. *Dokažite da fiksne točke holomorfne funkcije $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ moraju biti* izolirane, *tj. da ne može postojati gomilište skupa fiksnih točaka holomorfne funkcije.*

Uputa: Promatramo funkciju $g := \mathrm{id} - f$. Tada su fiksne točke f nultočke od g. Može li holomorfna kompleksna funkcija jedne kompleksne varijable imati gomilište nultočaka? Dokažite taj rezultat.

Zašto su nam zanimljive orbite oko fiksnih točaka? Orbita kojoj je početna točka fiksna točka je stacionarna orbita koja zauvijek ostaje u toj točki. Međutim, postoji neka okolina fiksne točke u kojoj nema fiksnih točaka (v. Zadatak 2.6). Stoga orbite oko fiksnih točaka pokazuju kvalitativno drugačije ponašanje od fiksne orbite u vremenu, tj. fiksne točke imaju svojstvo *osjetljivosti na početni uvjet*: malim odmakom od fiksne točke događa se promjena dugoročnog ponašanja.

Analizirat ćemo u Poglavlju **??** dugoročna ponašanja ponašanja orbita oko fiksne točke za razne tipove lokalno analitičkih funkcija f. Zbog $f(0) = 0$, Taylorov razvoj holomorfne funkcije f na okolini fiksne točke 0 dan je s:

$$f(z) = \lambda z + O(z^2),\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Broj $\lambda = f'(0) \in \mathbb{C}$ nazivamo *multiplikatorom fiksne točke* 0. Razlikovat ćemo nekoliko slučaja koji pokazuju različito ponašanje orbita oko ishodišta u vremenu:

- $0 < |\lambda| \neq 1$: *hiperbolička* fiksna točka,
- $\lambda = 0$: *jako hiperbolička* fiksna točka,

---

koji ne sadrži ∞ je otvoren ako i samo ako je bio otvoren u $\mathbb{C}$, a ako sadrži ∞ tada je otvoren ako i samo ako mu je komplement kompaktan u $\mathbb{C}$. Ekvivalentno, može se promatrati i kao kvocijentni prostor (s *kvocijentnom topologijom*) zatvorenog diska, gdje je kvocijentno preslikavanje identifikacija ruba u jednu točku. Topologija koju dobivamo je ujedno i relativna topologija euklidske topologije u $\mathbb{R}^3$ kad sferu promatramo kao 2-sferu u $\mathbb{R}^3$

[6] Možemo uzeti i baznu okolinu, tj. otvoreni disk oko točke.

[7] Prisjetimo se, fiksna točka funkcije je točka koja zadovoljava $f(z) = z$.

[8] Neka je $f(z_0) = z_0$, te f analitička na okolini z_0. Promatramo funkciju $g(z) := f(z + z_0) - z_0$. Fiksna točka z_0 funkcije f postaje fiksna točka 0 funkcije g. Funkcija g je analitička na okolini 0, jer je f bila analitička na okolini z_0.

- $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$: *racionalno invarijantna* fiksna točka, specijalno za $\lambda = 1$ *parabolička*,
- $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: iracionalno invarijantna fiksna točka.

Zadatak 2.7.

(a) *Za jednostavne primjere analitičkih funkcija svakog od navedenih tipova:* $f(z) = -\frac{1}{2}z$, $f(z) = (2i+3)z$, $f(z) = iz^2$, $f(z) = e^{\frac{2}{3}\pi i}z$, $f(z) = e^{i\sqrt{2}}z$, $f(z) = \frac{z}{1-z}$, $f(z) = \frac{z}{1+z}$, *opišite i skicirajte ponašanje trajektorija* $\mathcal{O}^f(z_0)$ *za sve točke* z_0 *iz neke male okoline ishodišta.*

(b) *Pokušajte u nekom računalnom programu (Mathematica, Mathlab, Octave...) skicirati ponašanje trajektorija u okolini ishodišta za 'komplicirанije' funkcije*[9]*:* $f(z) = z + (2i-1)z^2 + z^3$, $f(z) = e^{i\sqrt{2}}z + z^2$, $f(z) = e^{\frac{2\pi i}{7}}z - z^3 + z^4$, $f(z) = 2i \cdot z + z^2$.

Primijetit ćete u primjerima da u nekim slučajevima ne možemo biti sigurni da se ponašanje kvalitativno ne mijenja dodavanjem daljnjih asimptotskih članova. Kako smo već spomenuli u prethodnim poglavljima, cilj nam je matematički precizirati ponašanje analitičkih funkcija u okolini ishodišta za sve (i kompliciranije funkcije), u ovisnosti o tipu multiplikatora $\lambda \in \mathbb{C}$. Da bismo to uspjeli, voljeli bismo da možemo uložiti (tj. naći domene na kojima je to moguće, ovisno o tipu multiplikatora) našu funkciju u tok analitičke autonomne diferencijalne jednadžbe (vektorskog polja), koju je lakše kvalitativno analizirati. To nas dovodi do temeljnog pitanja u dinamičkim sustavima, a to je *normalizacija* funkcije (tj. DDS-a) na okolini fiksne točke, ili svođenje funkcije (DDS-a) na *normalnu formu.*

Definicija 2.8 (Normalna forma)**.** *Neka je* $f : X \to X$ *funkcija, te neka je* $f_0 : Y \to Y$ *neka druga funkcija. Ako postoji bijekcija* $\varphi : X \to Y$ *(tj.* zamjena varijabli[10]*) takva da*

$$f = h^{-1} \circ f_0 \circ h,$$

tada kažemo da h konjugira *funkcije* f *i* f_0 *i zovemo je* konjugacijom*.*

Ako je f_0 *u nekom smislu 'jednostavnija' od* f[11]*, tada* f_0 *nazivamo* normalnom formom *od* f *na* X*, a* φ normalizacijom*. Ako* φ *i* φ^{-1} *dodatno pripadaju nekoj klasi (naravno, na prostorima* X, Y *koji to dopuštaju: topološki, euklidski), kao npr. neprekidna,* C^k*, analitička, tada kažemo da je* f_0 *redom neprekidna,* C^k*, analitička normalna forma od* f *na* X*.*

Nama su zanimljive normalne forme koje su tok nekog analitičkog polja u okolini neke točke. Ako našu funkciju lokalno oko ishodišta analitički možemo

[9] Kompliciranije su u smislu da sadrže daljnje članove razvoja.

[10] Da bi nešto bila zamjena varijabli između dvije domene, tražimo da je barem *bijekcija*. Možemo zahtijevati i dodatna svojstva kako bi zamjena varijabli bila *jača* (čuvala topološka svojstva, oblike i sl.), pa tako možemo zahtijevati *homeomorfizam, difeomorfizam, analitički difeomorfizam, biholomorfizam itd.*

[11] npr. njezina linearizacija, ili se sastoji od prvih nekoliko članova Taylorovog razvoja f

konjugirati s takvom normalnom formom, znači da se i ona lokalno ulaže u tok analitičkog polja. A nakon što odredimo normalizaciju, možemo i eksplicitno napisati kojeg!
Zato su nam zanimljive normalne forme npr.:

- *translacija* $f_0(z) = z + 1$ (globalno se ulaže kao 1-tok u analitički tok $\{f_t(z) = z + t\}_{t\in\mathbb{C}}$, tj. jednadžbu $z'(t) = 1$, na čitavom $\mathbb{C}$)
- *linearno preslikavanje* $f_0(z) = \lambda z$ (globalno se ulaže kao 1-tok u analitički tok $\{f_t(z) = \lambda^t z\}_{t\in\mathbb{C}}$, tj. jednadžbu $z'(t) = \log\lambda \cdot z$, na čitavom $\mathbb{C}$)

Pridružene jednadžbe normalizacija koje želimo riješiti u nekoj klasi (po normalizacijskoj funkciji φ) su stoga redom:

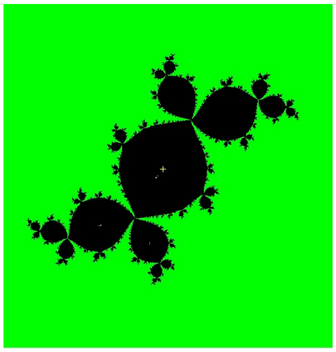
- tzv. Abelova jednadžba
$$\varphi \circ f = \varphi + 1 \;\leftrightarrow\; \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = z + 1$$
- tzv. Schröderova jednadžba
$$\varphi \circ f = \lambda\varphi \;\leftrightarrow\; \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = \lambda z$$

Poželjno bi bilo dobiti, ako je moguće, φ analitičku na nekoj otvorenoj okolini (disku oko) ishodišta, jer smo onda uložili f lokalno u analitički tok. Ako ne možemo na cijeloj okolini, barem ćemo pokušati na otvorenim sektorima!

Problem procjene ponašanja holomorfnih funkcija u okolini fiksnih točaka (normalizacija i opis lokalnog ponašanja orbita) počinje se razvijati početkom 20. stoljeća u radovima Birkhoffa, Leaua, Koenigsa, Boetchera. Opisuju se sva ponašanja osim ponašanja u okolini iracionalno invarijantnih fiksnih točaka. Pitanje nužnih uvjeta za analitičku linearizaciju takve funkcije je još uvijek otvoreno, ali je pokazano da ne ovisi samo o multiplikatoru λ. To se istraživanje nastavlja 50.-tih godina 20. stolje 'ca u radovima Yoccoza (koji daje dovoljne uvjete, te pokazuje da nisu nužni osim u uskoj klasi kvadratnih polinoma, i za rad u tom području dobiva Fieldsovu medalju), Perez-Marca, Siegela i drugih (v. npr. [8] and [**?**]).

Na kraju, u lokalnoj analizu zanimat će nas ponašanje funkcije na *proizvoljno maloj* otvorenoj okolini neke točke. Uglavnom nas veličina takve okoline neće zanimati, već će nam biti dovoljan *egzistencijalni rezultat*: da neka takva okolina (disk) postoji. Na tom tragu pojam analitičke funkcije u točki z zamijenjujemo s pojmom *analitičke klice* u točki z. Globalna definiranost i analitičnost funkcije nam u tom slučaju nije bitna, kao niti veličina diska analitičnosti.

Definicija 2.9 (Klica analitičke funkcije, engl. *analytic germ*)**.** Klica analitičke funkcije *ili* analitička klica *u $z_0 \in \mathbb{C}$ je klasa ekvivalencije obzirom na relaciju: dvije funkcije definirane na nekoj okolini z_0 su ekvivalentne ako se podudaraju na proizvoljno maloj okolini z_0.*



Slika 2.10.1: Fraktalni Julia skup za $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}},\ f(z) = z^2 + (-0.12 - 0.7i)$ je rub crnog područja. Program *Mandel* za crtanje Julia skupova za racionalne funkcije dostupan je na *http://www.mndynamics.com/indexp.html.*

2.9.1 Globalna analiza iteracija holomorfnih funkcija na sferi

U Poglavlju **??** pokazat ćemo da su holomorfne funkcije $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ na Riemannovoj sferi $\overline{\mathbb{C}}$ nužno *racionalne*, za razliku od holomorfnih iteracija na ostalim Riemannovim plohama. To nam olakšava njihovo promatranje na sferi.

U Poglavlju **??** bavit ćemo se svojstvima tzv. *Julievih* (od: Gaston Julia, franc. matematičar sa početka 20. stoljeća) i njima komplementarnih *Fatouovih* skupova za holomorfna preslikavanja na Riemannovoj sferi. Juliev skup čine *točke koje pokazuju osjetljivost kvalitativnog ponašanja iteracija na početni uvjet.* Malo neprecizno (formalne definicije ćemo obraditi u kasnijim poglavljima), Fatouov skup funkcije f sastoji se od točaka čiji 'susjedi' se ponašaju slično pod iteracijama f, a Julijev skup sastoji se od toaka kod kojih proizvoljno mala perturbacija početne točke uzrokuje drastične promjene u ponašanju njihove orbite. Tako je ponašanje funkcije na Fatouovom skupu 'pravilno', dok je na Julijevom skupu njezino ponašanje 'kaotično'. Analizu i opis takvih skupova započeli su Julia i Fatou početkom 20. stoljeća, a analiza se nastavila 80.-tih godina kad su se, razvojem računalne grafike, pojavili računalni programi za crtanje takvih skupova, s radovima Hubbarda, Douadyja, Sullivana itd. [8].

Zadatak 2.10. *Analizirajte ponašanje orbita holomorfne funkcije $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ za funkciju $f(z) = z^2$. Što bi po Vašem mišljenju bio Juliev skup?*

Uputa: Iteracije početnih točaka izvan sfere $S(0, 1)$ pod iteracijama odlaze u ∞, unutar sfere u 0, a točke na sferi rotiraju na sferi. Detaljno dokažite i analizirajte! Juliev skup $\mathcal{J}(f) = S(0, 1)$, i to je rijedak primjer kad taj skup nije geometrijski 'kompliciran', tj. fraktalan.

Zanimljivost: Fautouv, Juliev i s njima povezan Mandelbrotov skup su u dinamici jedan od najljepših i najraznovrsnijih primjera tzv. *fraktalnih skupova* - skupova beskonačne duljine koji imaju svojstvo *samosličnosti* (kad zoomiramo oko bilo koje točke skupa, skup izgleda isto ili slično kao cjelina, tj. na svakom nivou se javljaju novi detalji). Time se takvi skupovi nalaze između krivulja i ravnine po svojoj 'gustoći ispunjavanja prostora'. Mjere 'fraktalnosti' (gustoće ispunjavanja prostora unutar nekog kompakta) su tzv. *fraktalne dimenzije*, od kojih su najpoznatije *Hausdorffova* i *box dimenzija* (engl. box counting dimension) koje su necjelobrojne dimenzije koje poprimaju vrijednosti između 0 i dimenzije ambijentnog prostora. Ne postoji karakterizacija (precizna definicija) fraktala, no nekad fraktalnim nazivamo skupove s netrivijalnom i necjelobrojnom fraktalnom dimenzijom. Primjeri fraktalnog samosličnog skupa su Kochova krivulja i poznati Cantorov skup. Oboje imaju necjelobrojnu Hausdorffovu i box dimenziju. Dobar uvod u fraktalne dimenzije su knjige [11], [4], [15].

Poglavlje 3

Uniformizacijski teorem za 1-povezane Riemannove plohe

Prisjetimo se:

Definicija 3.1 (Riemannova ploha, [7])**.** Riemannova ploha*, u oznaci* $\mathcal{S}$*, jest povezana holomorfna (analitička) kompleksna Riemannova mnogostrukost*[1] *kompleksne dimenzije* 1*, što znači da je:*

1. *povezan Hausdorffov topološki*[2] *prostor;*

2. *kompleksna mnogostrukost (kompleksne) dimenzije* 1*: lokalno homeomorfna jediničnom*[3] *otvorenom disku* $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ *u* $\mathbb{C}$*, tj. za svaku točku* $p \in \mathcal{S}$ *postoji otvorena (u topologiji) okolina* U *oko* p *te homeomorfizam* $\varphi_U : U \to \mathbb{D}$ *(tzv.* koordinatna karta oko p*);*

3. *karte su* holomorfno usklađene*: za dvije koordinatne karte* U, $V \subseteq \mathcal{S}$ *takve da* $U \cap V \neq \emptyset$ *vrijedi da su* prijelazi karata *holomorfne funkcije, tj.* $\varphi_U \circ \varphi_V^{-1} : \varphi_V(U \cap V) \subseteq \mathbb{D} \to \varphi_U(U \cap V) \subseteq D$ *je biholomorfizam*[4]*;*

4. *zadana je* Riemannova struktura[5]*nje udaljenosti (metrike) i mjerenje kutova i zakrivljenosti na mnogostrukosti na mnogostrukosti: na tangencijalnim prostorima* T_p*,* $p \in \mathcal{S}$*, definiran je skalarni produkt* $(X_p|Y_p)$*,* X_p*,* $Y_p \in T_p$*, te je* usklađen s holomorfnom strukturom mnogostrukosti*: funkcija* $p \mapsto (X_p|Y_p)$ *je holomorfna*[6] *funkcija s plohe* $\mathcal{S}$ *u* $\mathbb{C}$*.*

(Za detalje definicije vidjeti npr. [7]).

---

[1] Riječ *ploha* upućuje na kompleksnu mnogostrukosti kompleksne dimenzije 1.

[2] Na mnogostrukosti, dakle, znamo što su otvoreni skupovi! Opis topologije dan je u fusnoti 5. na stranici 10.

[3] Možemo tražiti jedinični disk $\mathbb{D}_1$ ili bilo koji otvoreni disk $\mathbb{D}_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, $r > 0$, jer su oni biholomorfni homotetijom $f(z) = az$, $a > 0$.

[4] Primijetimo da su $\varphi_U(U \cap V)$ i $\varphi_V(U \cap V)$ otvoreni u otvorenom disku $\mathbb{D}$, a time i u $\mathbb{C}$,

ploha.jpg

Slika 3.1.1: Karte i prijelazi karata kompleksne 1-mnogostrukosti (plohe)

Homeomorfizme $\varphi_U : U \to \mathbb{D}$ iz definicije zovemo *koordinatnim kartama*. *Holomorfni atlas* je familija holomorfno usklađenih koordinatnih karata $\{\varphi_U\}$ takvih da njihove domene U pokrivaju čitavu mnogostrukost $\mathcal{S}$. Maksimalnim atlasom smatramo familiju koordinatnih karata oko svake točke iz definicije. Atlas nije jedinstven, ali možemo odabrati bilo koji atlas radi holomorfne usklađenosti karata mnogostrukosti. Zadavanjem holomorfnog atlasa je jednoznačno zadana holomorfna struktura na mnogostrukosti.

Zadatak 3.2. *Neka je $\mathcal{S}$ Riemannova ploha. Pokažite da, ako $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$ gledamo kao Riemannovu plohu s globalnom kartom id, tada su sve karte plohe $\mathcal{S}$ ne samo homeomorfizmi, već i lokalni biholomorfizmi ploha $\mathcal{S}$ i $\mathbb{D}$.*

Uputa: Neka je $z \in \mathcal{S}$. Svaka karta φ_U je u paru karata (φ_U, id) za $\mathcal{S}$ i $\mathbb{D}$ redom jednaka $\mathrm{id}_{\mathbb{D}}$, dakle, biholomorfizam. Za ostale parove karata lokalna biholomorfnost slijedi zato što su za Riemannove mnogostrukosti zamjene karata lokalni biholomorfizmi.

Primjer 1 (Neki primjeri Riemannovih ploha)**.**

1. *Kompleksna ravnina* $\mathbb{C}$ s Euklidskom topologijom, karte $\varphi_U \equiv \mathrm{id}$.

2. *Disk* $\mathbb{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < r\} \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, s naslijeđenom Euklidskom topologijom, atlas $\varphi : \mathbb{D}(z_0, r) \to \mathbb{D}$, $\varphi = \frac{1}{r}\mathrm{id} - z_0$.

3. *Riemannova sfera* $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (topološki: 1-točkovna kompaktifikacija $\mathbb{C}$ u kompaktan Hausdorffov prostor, za opis topologije v. fusnotu 5. na str. 11.). Karte su restrikcije na otvorene podskupove sljedećih preslikavanja:

   - $\varphi_1 : \ \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} \equiv \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ \varphi_1(z) = z,$
   - $\varphi_2 : \ \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \ \varphi_2(z) = \frac{1}{z},$

jer je $U \cap V$ otvoren u U, odnosno V, a φ_U i φ_V su homeomorfizmi!

[5] Omogućuje definira

[6] Sjetimo se: Funkcija $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}_1$, gdje su $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}_1$ holomorfne plohe, kažemo da je holomorfna u $p \in \mathcal{S}$ ako je, nakon pred- i postkompozicije s kartama φ_U^{-1} resp. ψ_V koje sadrže p resp. $F(p)$ u svojim domenama U resp. V, holomorfna u $\varphi_U(p) \in \mathbb{D}$ kao kompleksna funkcija jedne kompleksne varijable. Dovoljno je gledati u *bilo kojim kartama*, radi holomorfne usklađenosti karata. $\mathbb{C}$ je trivijalno holomorfna ploha s globalnom kartom id.

gdje dodefiniramo $\varphi_2(\infty) := 0$. Prijelazi karata su funkcije z i $1/z$ na otvorenim podskupovima od $\mathbb{C}$ koji ne sadrže 0 niti ∞, dakle, holomorfne na svojim domanama.

4. *Cilindar* $\mathcal{C} := \mathbb{C}\big/_{\mathbb{Z}}$, topološki kvocijentni prostor (s kvocijentnom topologijom) Euklidske ravnine $\mathbb{C}$ s kvocijentnim preslikavanjem $p(z) = e^{2\pi i z}$. Klase, tj. točke koje poistovjećujemo dane su s $[z] := \{w \in \mathbb{C} : \; p(w) = p(z)\} = \{z + k, \; k \in \mathbb{Z}\}$, $z \in \mathbb{C}$. Kvocijentni prostor (prostor klasa) je vertikalna pruga
$$C := [0, 1) \times \mathbb{R}$$
s kvocijentnom topologijom (što je homeomorfno cilindru $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^3$ s naslijeđenom euklidskom topologijom iz $\mathbb{R}^3$).

   Primijetimo još: pruga C je eksponencijalnim preslikavanjem $h(z) = e^{2\pi i z}$ *biholomorfna punktiranoj ravnini* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

5. Torus $\mathbb{T} = \mathbb{C}\big/_{\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}}$, topološki kvocijentni prostor (s kvocijentnom topologijom) Euklidske ravnine $\mathbb{C}$, gdje su klase $[z] := \{w \in \mathbb{C} : \; w = z+m+in : m, n \in \mathbb{Z}\}$, $z \in \mathbb{C}$. Prostor klasa je poluotvoreni kvadrat
$$[0, 1) \times [0, 1)$$
s kvocijentnom topologijom, koji je homeomorfan (standardnim lijepljenjem stranica) torusu $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}^3$ s naslijeđenom Euklidskom topologijom iz $\mathbb{R}^3$.

Primijetimo da su prve tri Riemannove plohe 1-povezane, dok 4. i 5. nisu 1-povezane. Riemannova sfera se topološki (homeomorfno) može poistovjetiti s 2-sferom $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ s naslijeđenom euklidskom topologijom iz $\mathbb{R}^3$, a to je 1-povezan prostor s trivijalnom fundamentalnom grupom. Cilindar je biholomorfan, time pogotovo homeomorfan, *punktiranoj ravnini* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ koja nije 1-povezana (sfera $\mathbb{S}^1$ je deformacijski retrakt $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, pa su im fundamentalne grupe izomorfne, i to je Abelova grupa $\mathbb{Z}$), a torus također nije 1-povezan (fundamentalna grupa mu je Abelova $\mathbb{Z}^2$ s dva generatora).

3.3 Konformalna preslikavanja

Definicija 3.4 (Konformalno preslikavanje na $\mathbb{C}$). *Neka $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, Ω otvoren. Kažemo da je funkcija f* konformalna *u $z_0 \in \Omega$ ako je holomorfna u točki*[7] *z_0 i ako je $f'(z_0) \neq 0$. Analogno, funkcija f je* konformalna na Ω *ako je holomorfna na Ω i $f'(z) \neq 0$, $z \in \Omega$.*

Korištenjem karata se definicija lako prenosi na Riemannovu plohu:

[7] *Holomorfnost u točki* znači da postoji neka mala otvorena okolina točke u kojoj je funkcija holomorfna, tj. analitička.

Definicija 3.5 (Holomorfna i konformalna preslikavanja na Riemannovim plohama)**.** *Kažemo da je $f : \Omega \subseteq \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$, gdje su $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}'$ Riemannove plohe i $\Omega \subseteq \mathcal{S}$ otvoren*[8]*, holomorfna (respektivno konformalna) u točki $z_0 \in \Omega$ ako je $\varphi_V \circ f \circ \varphi_U^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfna (respektivno konformalna) u $\varphi_U^{-1}(z_0) \in \mathbb{D}$ za neki par karata (φ_U, φ_V) u čijim domenama leži z_0, $z_0 \in U \cap V$.*

Iskaz gornje definicije s riječju *neki* je dobar jer:

Zadatak 3.6. *Ako je gornje istina za neki par karata koje sadrže z_0, onda je istina za svaki par karata atlasa te Riemannove plohe koje sadrže z_0. Dokažite.*

Uputa: Prijelazi karata imaju ne-nul derivacije jer su biholomorfizmi, korištenjem lančanog pravila (dokažite!).

Sjetimo se otprije da je pojam *konformalnosti* preslikavanja bio geometrijski vezan uz *čuvanje kutova* (dok se duljine ne čuvaju nužno kao kod npr. izometrije). Definirajmo prvo precizno pojam *čuvanja kutova.*

Definicija 3.7 ([12])**.** *Kažemo da funkcija $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$* čuva kuteve u točki *$z_0 \in \Omega$ ako limes*

$$\lim_{r \to 0+} e^{-i\theta} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)}{|f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)|}$$

postoji u $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, te ne ovisi o kutu $\theta \in [0, 2\pi)$.

Gornja definicija kaže da f može rotirati i translatirati radijvektore u z_0, te ih savijati u krivulje, ali pritom ne može promijeniti kut među krivuljama u točki z_0. Dakle, zapravo se čuvaju kutovi među krivuljama u z_0.

Teorem 3.8. *[12] Neka je $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, Ω otvoren, holomorfna u točki $z_0 \in \Omega$. Tada je ona konformalna u točki z_0 (tj. $f'(z_0) \neq 0$) ako i samo ako čuva kuteve u z_0. Nadalje, f holomorfna na Ω je konformalna na Ω ako i samo ako čuva kuteve u svakoj točki skupa Ω.*

Dokaz. Najprije, bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da je $z_0 = 0$, te da je $f(0) = 0$ (vidjeti fusnotu 8. na stranici 12.)

($\Rightarrow$) Pretpostavimo da f čuva kutove u 0, te pokažimo da je $f'(0) \neq 0$. Pretpostavimo suprotno, tj. $f'(0) = 0$. Kako je funkcija f analitička i ne-nul funkcija na okolini 0, te zbog $f(0) = 0$ i $f'(0) = 0$, po Taylorovom teoremu postoje $k \geq 2$ i $\delta > 0$ takvi da vrijedi:

$$f(z) = a_k \cdot z^k + O(z^{k+1}),\ a_k \neq 0,\ z \in {}^9\mathbb{D}_\delta.$$

Sada za svaki $\theta \in [0, 2\pi)$ vrijedi:

$$\begin{aligned}\lim_{r \to 0+} e^{-i\theta} \frac{f(re^{i\theta})}{|f(re^{i\theta})|} &= \lim_{r \to 0+} \frac{a_k r^k e^{i(k-1)\theta} + O(r^{k+1})}{|a_k| r^k \cdot |1 + O(r)|} \\ &= \lim_{r \to 0+} \frac{a_k}{|a_k|} e^{i(k-1)\theta}(1 + O(r)) = \frac{a_k}{|a_k|} e^{i(k-1)\theta}.\end{aligned}$$

[8] Ploha je topološki prostor!

[9] Oznaka $f(z) = O(g(z))$ na $\mathbb{D}_\delta$ znači da postoji $C > 0$ takva da $|f(z)| \leq C|g(z)|$, za $z \in \mathbb{D}_\delta$.

Zato za $k > 1$ limes ovisi o kutu $\theta \in [0, 2\pi)$, što je kontradikcija s čuvanjem kutova u 0. Dakle, $f'(0) \neq 0$.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da je $f'(0) \neq 0$, te pokažimo čuvanje kutova u 0. Stavimo $a := f'(0)$, $a \neq 0$. Tada je, po definiciji derivacije u 0,

$$a = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z}.$$

Specijalno, gornji limes možemo gledati samo u smjeru polupravca $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, za neki $\theta \in [0, 2\pi)$. Tada on postaje:

$$a = \lim_{r \to 0+} \frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}}, \ \theta \in [0, 2\pi).$$

Stoga,

$$\lim_{r \to 0+} e^{-i\theta} \frac{f(re^{i\theta})}{|f(re^{i\theta})|} = \lim_{r \to 0+} \frac{\frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}}}{\frac{|f(re^{i\theta})|}{|re^{i\theta}|}} = \frac{a}{|a|},$$

što nije nula i ne ovisi o kutu θ, pa f čuva kutove u 0. $\square$

Propozicija 3.9. *Neka je $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, Ω otvoren, holomorfno i injektivno na Ω. Tada je f konformalno na Ω.*

Preciznije, dokazat ćemo sljedeću *lokalnu* tvrdnju: *Neka je f holomorfno u točki $z_0 \in \Omega$. Tada je f injekcija lokalno oko z_0 (tj. postoji otvorena okolina z_0 na kojoj je f injekcija) ako i samo ako je f konformalno u z_0 ($f'(z_0) \neq 0$).*

Dokaz. Ako je f holomorfno i konformalno u z_0, lokalna injektivnost oko z_0 slijedi direktno po teoremu o inverznoj funkciji.

Dokažimo drugi smjer. Neka je f injekcija na nekoj otvorenoj okolini z_0, tj. postoji neki disk $\mathbb{D}_\delta$ oko z_0 na kojem je f injektivna. Pretpostavimo suprotno, da f nije konformalna u z_0, tj. da je $f'(z_0) = 0$. Kako je f analitička u z_0, po Taylorovom razvoju postoji $k \geq 2$ takav da vrijedi:

$$f(z) - f(z_0) = a(z - z_0)^k + G(z), \ a \neq 0, \ z \approx z_0{}^{10},$$

gdje je $G(z) = (z - z_0)^{k+1} H(z)$, te H analitička funkcija u z_0. Tada za svaki $w \in \mathbb{C}$ vrijedi:

$$f(z) - f(z_0) - w = \big(a(z - z_0)^k - w\big) + G(z) = F_w(z) + G(z), \ z \approx z_0, \quad (3.9.1)$$

gdje stavljamo $F_w(z) := a(z - z_0)^k - w, \ z \approx z_0$, te je F trivijalno analitička u z_0.

Pokažimo: za svaki $r > 0$ dovoljno mali, postoji w_r takav da je $|G(z)| < |F_{w_r}(z)|$, na kružnici $z \in S(z_0, r) = \partial\mathbb{D}(z_0, r)$. Naime, postoji $C > 0$ (uniforman po $r > 0$ za r dovoljno mali) takav da

$$|G(z)| = |z - z_0|^{k+1} |H(z)| \leq C r^{k+1}, \ z \in S(z_0, r), \quad (3.9.2)$$

[10]Znači: na nekom malom disku oko z_0; namjerno nismo jako precizni.

jer je funkcija $z \mapsto H(z)$ analitička (specijalno, neprekidna) u z_0, pa je omeđena na kompaktnom zatvorenom disku oko z_0. S druge strane, za 'dovoljno male' $w_r \in \mathbb{C}$ takve da $|w_r| < \frac{|a|r^k}{2}$ vrijedi:

$$|F_{w_r}(z)| = |a(z-z_0)^k - w_r| \geq ||a|r^k - |w_r|| \geq \frac{|a|r^k}{2},\ z \in S(z_0,r). \tag{3.9.3}$$

Odabirom radijusa $r > 0$ dovoljno malog tako da vrijedi $\frac{|a|r^k}{2} > Cr^{k+1}$, tj. $0 < r < \frac{|a|}{2C}$ (sjetimo se da je C uniforman po r!), dobivamo:

$$|G(z)| < |F_{w_r}(z)|,\ z \in S(z_0,r).$$

Rouchéov teorem[11] sad povlači da je

$$N_{S(z_0,r)}(F_{w_r} + G) = N_{S(z_0,r)}(F_{w_r}),$$

gdje $N_{S(z_0,r)}(H)$ označava broj nultočaka (računajući njihove kratnosti) analitičke funkcije H u unutrašnjosti kružnice $S(z_0,r)$, dakle, u otvorenom disku $\mathbb{D}(z_0,r)$. Direktnim računom lako se provjeri da, za $|w_r| < \frac{|a|r^k}{2}$ kao prije, funkcija F_{w_r} u $\mathbb{D}(z_0,r)$ ima točno $k \geq 2$ *različitih* nultočaka (to su $(z_0 + \sqrt[k]{\frac{w_r}{a}})$. No tada isti broj nultočaka s *kratnostima* ima u disku $\mathbb{D}(z_0,r)$ i funkcija $G + F_{w_r}$, tj. po (3.9.1), funkcija $z \mapsto f(z) - f(z_0) - w_r$.

Očito, ako su $z_1,\ z_2 \in \mathbb{D}(z_0,r)$ dvije nultočke gornje funkcije, vrijedi da je $f(z_1) = f(z_2)$. Stoga, ako pokažemo da je $z_1 \neq z_2$ za neke dvije nultočke u disku $\mathbb{D}(z_0,r)$, tada funkcija f nije injektivna na tom disku. Kako u tijeku gornjeg dokaza disk možemo odabrati proizvoljno malog radijusa $r > 0$, imamo kontradikciju i tvrdnja teorema slijedi. Pokažimo, dakle, da za dovoljno male $r > 0$ postoje *barem dvije različite* nultočke funkcije $z \mapsto f(z) - f(z_0) - w_r$ u $\mathbb{D}(z_0,r)$. Pretpostavimo suprotno, neka je $z_1 \in \mathbb{D}(z_0,r)$ nultočka te funkcije kratnosti 2 ili više. Tada vrijedi

$$f(z) - f(z_0) - w_r = (z-z_1)^2 h(z),\ z \approx z_1,\ z \in \mathbb{D}(z_0,r),$$

gdje je h analitička u z_1. Deriviranjem sad dobivamo da je $f'(z_1) = 0$. Zbog $w_r \neq 0$ je očito $z_1 \neq z_0$. Sada, smanjivanjem radijusa $r \to 0$ možemo konstruirati niz točaka $(z_1^n)_n,\ z_1^n \in \mathbb{D}(z_0, 1/n),\ z_1^n \neq z_0,\ f'(z_1^n) = 0,\ n \in \mathbb{N}$. Kako $z_1^n \to z_0$ kad $n \to \infty$, f' ima akumulaciju nultočaka unutar svog diska analitičnosti oko z_0, pa je $f' \equiv 0$ oko z_0, tj. f je lokalno konstantna oko z_0, što je kontradikcija s injektivnošću.

Stoga, za dovoljno male radijuse $r > 0$, funkcija $z \mapsto f(z) - f(z_0) - w_r$ ima u $D(z_0,r)$ $k \geq 2$ *različitih* nultočaka. Time dobivamo kontradikciju s lokalnom injektivnošću f oko z_0 te je dokaz završen. $\square$

[11] *Rouchéov teorem* [1] je posljedica *Principa argumenta* u kompleksnoj analizi, koji je direktna posljedica *Teorema o reziduumima* primijenjenog na funkciju $z \mapsto \frac{f'(z)}{f(z)}$. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, te neka kontura γ (slika pozitivno orijentiranog zatvorenog puta bez samopresjeka) i njezina unutrašnjost leže u Ω. Neka su f i g holomorfne na Ω. Ako je $|g(z)| < |f(z)|$, $z \in \gamma$, tada je $N_\gamma(f) = N_\gamma(f+g)$, gdje $N_\gamma(.)$ označava broj nultočaka funkcije *strogo unutar* konture γ.

Korolar 3.10 (Biholomorfizam $\leftrightarrow$ konformalna ekvivalencija)**.** *Neka su $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ Riemannove plohe, te neka $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$. Tada je f biholomorfizam*[12] *ako i samo ako je f konformalna bijekcija*[13]*.*

Dokaz. Prvo, dokaz za $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \Omega' \subseteq \mathbb{C}$, Ω, Ω' otvoreni, je u jednom smjeru posljedica Propozicije 3.9, a u drugom smjeru slijedi korištenjem bijektivnosti i lokalnog teorema o inverznom preslikavanju. Nadalje, dokaz za plohe se prevodi na dokaz za kompleksnu ravninu $\mathbb{C}$ korištenjem atlasa. □

3.11 Teorem uniformizacije: biholomorfna klasifikacija 1-povezanih Riemannovih ploha

Prisjetimo se *Teorema o Riemannovom preslikavanju* (engl. *Riemann mapping theorem*).

Teorem 3.12 (Teorem o Riemannovom preslikavanju, [1, 6])**.** *Neka je $U \subseteq \mathbb{C}$ otvoren, 1-povezan, te neka je $U \neq \emptyset, \mathbb{C}$. Tada je U biholomorfan jediničnom disku $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.*

Ideja dokaza. Dokaz je *konstruktivan* i može se naći u [6, Poglavlje 10] ili [1]. Istaknimo jednu točku $z_0 \in U$. Pokazuje se da postoji, do na rotaciju (množenje s $e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$), jedinstveni biholomorfizam $h : U \to \mathbb{D}$ takav da $h(z_0) = 0$. Ako zadamo dodatno vrijednost $h'(z_0) > 0$, tada je taj biholomorfizam h jedinstveno određen. Dokaz tog teorema može biti projektni seminar. □

Teorem se generalizira kroz tzv. *uniformizacijski teorem* [1] (Poincaré, Koebe), koji daje biholomorfnu klasifikaciju svih 1-povezanih Riemannovih ploha i koji nećemo dokazivati. Biholomorfnu klasifikaciju Riemannovih ploha koje nisu nužno 1-povezane napravit ćemo kasnije u Poglavlju **??**.

Teorem 3.13 (Uniformizacijski teorem, [1])**.** *Svaka 1-povezana Riemannova ploha $\mathcal{S}$ biholomorfna je točno jednoj od sljedećih Riemannovih ploha:*

1. $\mathbb{C}$ *(Euklidska kompleksna ravnina),*
2. $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ *(otvoreni jedinični disk),*
3. $\overline{\mathbb{C}}$ *(Riemannova sfera).*

Napomena 3.14. Primijetimo da je Riemannova sfera jedina kompaktna ploha među u gornje tri navedene, pa je stoga *svaka kompaktna 1-povezana Riemannova mnogostrukost biholomorfna Riemannovoj sferi.*

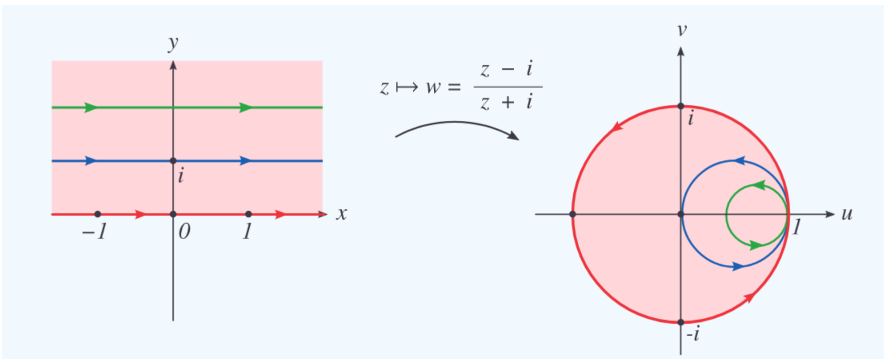
[12] Bijekcija i holomorfno preslikavanje u oba smjera.

[13] Iz Korolara 3.10 direktno slijedi da je i inverz konformalne bijekcije također konformalno preslikavanje!

Zadatak 3.15. *Dokažite da je jedan biholomorfizam gornje otvorene poluravnine* $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ *i jediničnog diska* $\mathbb{D}$ *dan eksplicitno preslikavanjem (v. Sliku 3.11):*

$$F : \mathbb{H} \to \mathbb{D},\ F(z) = \frac{i - z}{i + z}.$$

Odredite slike $F(\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) = r\})$ *za* $r > 0$.



Slika 3.15.1: Vizualizacija bijekcije F iz Zadatka 7.18, preuzeto s *https://math.libretexts.org/Bookshelves/Analysis/Complex_ Variables_ with_ Applications.*

Zbog toga ćemo često kao model za 2. umjesto diska $\mathbb{D}$ uzimati poluravninu $\mathbb{H}$ (ili bilo koju drugu poluravninu).

Poglavlje 4

Holomorfne i meromorfne funkcije na sferi $\overline{\mathbb{C}}$

U Teoremu 4.3 ispod (iz [3]) iznosimo karakterizaciju holomorfne funkcije $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ (v. Definiciju 3.5 holomorfne funkcije s Riemannove plohe na Riemannovu plohu) koja će nam biti operativnija. Navedenu karakterizaciju koristit ćemo npr. u dokazu važnog Teorema 4.4 koji govori da su sve holomorfne funkcije Riemannove sfere racionalne.

Uvedimo oznaku za *inverziju*

$$\sigma(z) := \frac{1}{z}.$$

Neka je $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *meromorfna*[1]. Jasno, f nije definirana u svojim polovima. Korištenjem Laurentovih i Taylorovih razvoja vidimo: f u z_0 ima izolirani pol ako i samo ako $\sigma \circ f$ ima u z_0 uklonjivi singularitet (kojeg uklonimo tako da dodefiniramo $\sigma \circ f(z_0) := 0$). Zato kodomenu funkcije proširimo na Riemannovu sferu $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, te f u izoliranim polovima $z_0 \in \Omega$ dodefiniramo

[1] Kažemo da je funkcija $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *meromorfna* ako je u okolini svake točke $z \in \Omega$ ili holomorfna (analitička) ili u njoj ima izolirani uklonjivi singularitet ili izolirani pol. Prisjetimo se, kažemo da f u $z_0 \in \Omega$ ima izolirani *uklonjivi singularitet* ako je definirana na nekoj otvorenoj okolini $U \setminus \{z_0\}$, te postoji limes $K := \lim_{z \to z_0} f(z)$. Ako dodefiniramo f s $f(z_0) := K$, tada po *Riemannovom teoremu o uklonjivim singularitetima* f postaje holomorfna (analitička) u z_0. Nadalje, kažemo da f holomorfna na nekoj otvorenoj okolini $U \setminus \{z_0\}$ u $z_0 \in \Omega$ ima *pol reda* $k \in \mathbb{N}$ ako postoji $k \in \mathbb{N}$ (uzmemo najmanji takav!) tako da $(z - z_0)^k f(z)$ ima u z_0 uklonjivi singularitet.

Drugim riječima, f ima u z_0 pol reda $k \in \mathbb{N}$ ako i samo ako postoji disk $\mathbb{D}$ oko z_0 na kojem f ima razvoj u tzv. *Laurentov red* (tj. za $z \in \mathbb{D}$ navedeni red potencija konvergira i suma mu je jednaka $f(z)$):

$$f(z) = (z - z_0)^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \ z \in \mathbb{D},$$

gdje je k *najmanji takav*, tj. takav da je $b_0 \neq 0$.

neprekidno[2] s

$$\tilde{f}(z_0) := \infty,$$

gdje se $\tilde{f}$ podudara s f u svim ostalim točkama iz Ω.

Tako dodefiniranu funkciju $\tilde{f} : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ nazivamo *meromorfnom*. Dakle, kažemo da je $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ meromorfna ako je $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ meromorfna u standardnom smislu i ako je u polovima dodefinirana s ∞. Direktno slijedi:

Propozicija 4.1. *Funkcija $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ je meromorfna ako i samo ako je f holomorfna u točkama $z_0 \in \Omega$ t.d. $f(z_0) \neq \infty$, a $\sigma \circ f$ analitička u točkama $z_0 \in \Omega$ t.d. $f(z_0) \neq 0$*[3].

Definicija 4.2 (Meromorfnost u $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$)**.** *Kažemo da je $f : \Omega \subseteq \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, $\Omega \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ otvoren t.d. $\infty \in \Omega$,* meromorfna u ∞*, ako postoji otvorena okolina $U \subseteq \mathbb{C}$ točke 0 takva da je $f \circ \sigma : U \subseteq \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ meromorfna u 0.*

Teorem 4.3 (Karakterizacija holomorfne funkcije Riemannove sfere, [3])**.** *Funkcija $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ je holomorfna (u smislu Definicije 3.5 kao funkcija među Riemannovim plohama) ako i samo ako je:*

- *$f : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ meromorfna,*
- *f meromorfna u ∞ (u smislu Definicije 4.2).*

Dokaz. Dokaz je direktan, korištenjem odgovarajućih karata i gornje definicije meromorfnosti u ∞. □

Sljedeći teorem nam znatno pojednostavljuje globalnu analizu holomorfnih funkcija na Riemannovoj sferi, u odnosu na holomorfne funkcije na $\mathbb{C}$ ili na disku $\mathbb{D}$.

Teorem 4.4 (Holomorfne funkcije Riemannove sfere su racionalne, [3])**.** *Funkcija $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ je holomorfna ako i samo ako je racionalna, tj. postoje polinomi (do kraja skraćeni nad $\mathbb{C}$) p, $q \in \mathbb{C}[z]$ (polinomi s kompleksnim koeficijentima) takvi da vrijedi:*

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Za holomorfnu funkciju f Riemannove sfere definiramo *stupanj holomorfne funkcije* kao

$$\deg(f) := \max\{\deg(p), \deg(q)\},$$

gdje je $f = p/q$, a p i q su do kraja skraćeni nad $\mathbb{C}$. Sjetimo se da je stupanj konstantnog ne-nul polinoma 0, a stupanj nul-polinoma dogovorno stavimo da je jednak -1.

[2]Primijetimo da takvo neprekidno proširenje nije moguće napraviti za *bitne* izolirane singularitete, kakav npr. ima funkcija $e^{-1/z}$ u 0, radi *Casorati-Weierstrass-Sohockij* teorema koji kaže da skup vrijednosti koje funkcija poprima na *svakoj* (proizvoljno maloj) okolini bitnog izoliranog singulariteta čini gust podskup od $\mathbb{C}$.

[3]što uključuje i točke u kojima je $f(z_0) = \infty$, tj. polove od f!

Zadatak 4.5. *Dokažite da za holomorfnu funkciju $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ i za neki $w \in \overline{\mathbb{C}}$ jednadžba*

$$f(z) = w$$

ima najviše $\deg(f)$ *rješenja u* $\overline{\mathbb{C}}$.

Dokaz Teorema 4.4.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da je $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, za p, q kompleksne polinome, do kraja skraćene. Faktorizacijom polinoma vidimo da je $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ meromorfna. No $f \circ \sigma(z) = \frac{p(1/z)}{q(1/z)}$ je također racionalna, pa je i $f \circ \sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ meromorfna. Po Teoremu 4.3 slijedi da je $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ holomorfna.

($\Rightarrow$) Neka je $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ holomorfna funkcija. Tada je po Teoremu 4.3 f meromorfna na $\mathbb{C}$ i u ∞. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da f ima samo konačno mnogo polova u $\overline{\mathbb{C}}$ (specijalno, u $\mathbb{C}$). Naime, u protivnom bi $\sigma \circ f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ imala beskonačno mnogo različitih nultočaka. Zbog kompaktnosti $\overline{\mathbb{C}}$ bi tada postojalo gomilište skupa nultočaka od $\sigma \circ f$ u $\overline{\mathbb{C}}$, pa bi slijedilo da je $\sigma \circ f \equiv 0$ na $\overline{\mathbb{C}}$, tj. $f \equiv \infty$. No konstantna funkcija $\infty = \frac{1}{0}$ je očito omjer konstantnih polinoma, pa tvrdnja teorema vrijedi.

Pretpostavimo sad da f ima konačno polova na $\mathbb{C}$. Neka su to polovi $\beta_1, \dots \beta_s$, redova redom $n_1, \dots, n_s$, $s \in \mathbb{N}$. Definirajmo funkciju $g : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ s:

$$g(z) := (z - \beta_1)^{n_1} \cdots (z - \beta_s)^{n_s} \cdot f(z), \ z \in \overline{\mathbb{C}}. \tag{4.5.1}$$

Očito je g holomorfna na $\mathbb{C}$ (uklonili smo sve polove od f na $\mathbb{C}$). Dakle, g je cijela[4], pa postoje $a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0$, takvi da vrijedi Taylorov razvoj na cijeloj domeni:

$$g(w) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k, \ w \in \mathbb{C}. \tag{4.5.2}$$

No, f je i meromorfna u ∞, pa je po definiciji meromorfnosti u ∞ i formuli (4.5.1) i g meromorfna u ∞. Dakle, $z \mapsto g(\frac{1}{z})$ je meromorfna u $z = 0$, pa za $z \approx 0$ (na nekoj okolini 0) vrijedi Laurentov razvoj, tj. postoji $r \in \mathbb{N}_0$ takav da je

$$g(\frac{1}{z}) = z^{-r} \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k, \ z \approx 0, \ b_k \in \mathbb{C}, \ k \in \mathbb{N}_0, \ b_0 \neq 0.$$

Stavimo $w = \frac{1}{z}$, pa za $w \approx \infty$ (na nekoj okolini ∞, tj. za $w \in \mathbb{C}$ dovoljno velikog modula $|w| > M$, za neki $M > 0$) vrijedi:

$$g(w) = w^r \sum_{k=0}^{\infty} b_k w^{-k}. \tag{4.5.3}$$

No zbog jedinstvenosti Laurentovog reda oko 0 za $w \in \mathbb{C}$, $|w| > M$, usporedbom (4.5.2) i (4.5.3) slijedi da je samo konačno mnogo koeficijenata b_k, odnosno a_k,

[4] Holomorfna, odnosno analitička na čitavom $\mathbb{C}$. Drugim riječima, njezin Taylorov razvoj oko bilo koje točke ima beskonačan radijus konvergencije i konvergira k toj funkciji u svakoj točki $z \in \mathbb{C}$. Specijalno, za cijelu funkciju g vrijedi $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $z \in \mathbb{C}$, $a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0$.

različito od 0. Stoga je g polinom nad $\mathbb{C}$, pa je po formuli (4.5.1) funkcija f racionalna.

$\square$

Poglavlje 5

Konformalni automorfizmi $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ i $\mathbb{D}$

Ovdje karakteriziramo globalne biholomorfne (tj. bikonformalne) zamjene varijabli triju jednostavno povezanih Riemannovih ploha.

Karakterizacija konformalnih automorfizama triju tipova jednostavno povezanih Riemannovih ploha (sfera, disk i ravnina) i analiza njihovih fiksnih točaka trebat će nam u Poglavlju **??** u kojem se iznosi biholomorfna klasifikacija povezanih Riemannovih ploha koje nisu nužno 1-povezane, preko njihovih univerzalnih natkrivanja.

Primijetimo, po Korolaru 3.10 je $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ je *konformalni automorfizam* (globalna bijekcija) ako i samo ako je f *biholomorfizam*, pa ćemo u nastavku koristiti ta dva pojma naizmjence.

Označimo s

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{S})$$

grupu konformalnih automorfizama Riemannove plohe $\mathcal{S}$, obzirom na kompoziciju. Lako se provjeri da konformalni automorfizmi Riemannove plohe čine grupu, koja nije nužno komutativna.

5.0.1 Konformalni automorfizmi sfere

Teorem 5.1 (Aut($\overline{\mathbb{C}}$), [3, 8])**.** *Grupa konformalnih automorfizama Riemannove sfere je grupa nekonstantnih* Möbiusovih transformacija*:*

$$\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) = \mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}}),$$

gdje je

$$\mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}}) = \left\{ f(z) = \frac{az+b}{cz+d} : \ a, b, c, d \in \mathbb{C}, \ ad \neq bc \right\}.$$

Napomena 5.2.

1. U definiciji grupe $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$ umjesto $ad - bc \neq 0$ možemo zahtijevati i $ad - bc = 1$, poistovjećivanjem M. transformacija koje su funkcijski jednake (dopustimo dijeljenje brojnika i nazivika istim kompleksnim brojem).

2. Lako se provjeri da je uvjet *nekonstantnosti* (konstanta može biti i ∞) zapravo uvjet *bijektivnosti, tj. invertibilnosti* Möbiusove transformacije. Ako je $ad \neq bc$, lako se provjeri da je inverz $f^{-1} : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ dan s:
$$f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

Dokaz. Pokažimo prvo $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}}) \subseteq \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$. Direktno se provjerava da je uz uvjet $ad \neq bc$ funkcija $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ bijekcija na $\overline{\mathbb{C}}$. Također, to je racionalna funkcija sfere, a i inverz joj je racionalna funkcija sfere, pa je po Teoremu 4.4 biholomorfna.

Ostaje pokazati $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) \subseteq \mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$. Neka je f konformalni automorfizam sfere. Tada je po Teoremu 4.4 f racionalna, tj. postoje $p, q \in \mathbb{C}[z]$ takvi da je:
$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

No, f je bijekcija s $\overline{\mathbb{C}}$ na $\overline{\mathbb{C}}$, pa za svaki $w \in \overline{\mathbb{C}}$ polinomijalna jednadžba
$$f(z) = w, \text{ tj. } p(z) - wq(z) = 0$$
ima jedinstveno rješenje. Kako je w proizvoljan, slijedi da je $\deg(f) = 1$, te $ad \neq bc$. $\square$

Napomena 5.3.

1. (veza $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$ s $PSL(2, \mathbb{C})$) Postoji izomorfizam grupa $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$ i kvocijentne grupe $PSL(2, \mathbb{C})$, obzirom na množenje matrica, definirane s:
$$PSL(2,\mathbb{C}) := GL(2, \mathbb{C}) \big/_{\{\lambda I:\ \lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\}} = SL(2, \mathbb{C}) \big/_{\{\pm I\}},$$
$$SL(2, \mathbb{C}) := \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} :\ a, b, c, d \in \mathbb{C},\ \det A = 1 \right\} \subseteq GL(2, \mathbb{C}),$$
s očitom identifikacijom:
$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \leftrightarrow [A] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \lambda I,\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$
gdje je f jedan reprezentant klase svih M. transformacija koje su funkcijski jednake (dakle, zadan do na dijeljenje brojnika i nazivnika istim kompleksnim brojem). Ako odaberemo $M \in \mathbb{C}$ takav da je $M^2 = ad - bc$ te podijelimo njime brojnik i nazivnik od f, za novu transformaciju (koja je funkcijski jednaka f) vrijedi $ad - bc = 1$. Dva su takva moguća kompleksna broja, $\pm M$. Zbog toga reprezentant M. transformacija takav da je

$ad - bc = 1$ nije jednoznačno određen, nego su dvije takve transformacije, koje poistovjećujemo daljnjim cijepanjem grupe $SL(2,\mathbb{C})$ s $\{\pm I\}$.

Primijetimo da je $PSL(2,\mathbb{C})$ *Liejeva grupa*[1]. Naime, $GL(2,\mathbb{C})$ je otvoreni podskup od $\mathbb{C}^4$ (gledano po komponentama), s euklidskom metrikom, dakle, diferencijabilna mnogostrukost dimenzije 4. Grupa $SL(2,\mathbb{C}) \subseteq GL(2,\mathbb{C})$ s naslijeđenom euklidskom metrikom je 3-dimenzionalna diferencijabilna kompleksna mnogostrukost (tj. realne dimenzije 6), radi jednog dodatnog uvjeta $ad - bc = 1$. Njezin kvocijentni prostor $PSL(2,\mathbb{C})$ s kvocijentnom topologijom je mnogostrukost kompleksne dimenzije 3.

2. (veza $\overline{\mathbb{C}}$ s kompleksnim projektivnim pravcem $\mathbb{CP}^1$, v. npr. [3]) Kompleksni projektivni pravac $\mathbb{CP}^1$ definiran je kao kvocijentni prostor

$$\mathbb{CP}^1 := \mathbb{C}^2 \setminus (0,0) \Big/ _{\sim},$$

gdje je relacija ekvivalencije $\sim$ na $\mathbb{C}^2 \setminus (0,0)$ dana s:

$$(z,w) \sim (\lambda z, \lambda w),\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ (z,w) \in \mathbb{C}^2 \setminus (0,0).$$

Klase ekvivalencije možemo poistovjetiti sa sljedećim reprezentantima:

$$[z,w] = \begin{cases} (z/w, 1), & w \neq 0, \\ (1, w/z), & z \neq 0, \end{cases}$$

gdje u slučaju kad je $z, w \neq 0$ očito imamo nejednoznačnost prikaza (dakle, dvije karte). Dakle, karta za $\mathbb{C}^2 \setminus \{z\text{-os}\}/_{\sim}$ je čitav $\mathbb{C}$, s preslikavanjem $\varphi_1([z,w]) = (\frac{z}{w}, 1)$, a za $\mathbb{C}^2 \setminus \{w\text{-os}\}/_{\sim}$ opet čitav $\mathbb{C}$, s preslikavanjem $\varphi_2([z,w]) = (1, \frac{w}{z})$. Prijelazi karata dani su sa $z \mapsto 1/z$. Drugim riječima, $\mathbb{CP}^1$ možemo identificirati sa sferom $\overline{\mathbb{C}}$ bijekcijom:

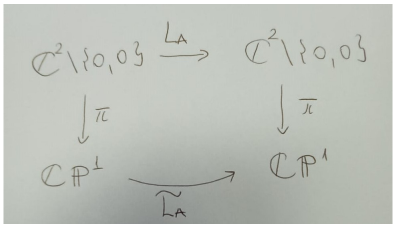
$$[z,w] \leftrightarrow \begin{cases} \frac{z}{w} \in \mathbb{C}, & w \neq 0, \\ \infty, & w = 0. \end{cases} \tag{5.3.1}$$

Grupu konformalnih automorfizama sfere možemo promatrati i kao automorfizme projektivnog pravca $\mathbb{CP}^1$. Svaka matrica $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$ definira invertibilni linearni operator $L_A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ s

$$L_A \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} := A \cdot \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} az + bw \\ cz + dw \end{bmatrix},$$

koji inducira invertibilno preslikavanje $\tilde{L}_A$ na kvocijentnom prostoru $\mathbb{CP}^1$ takvo da je $\tilde{L}_A \circ \pi = \pi \circ L_A$, gdje je π kvocijentno preslikavanje (v. komutativni dijagram na Slici 2):

[1] *Topološka grupa* grupa $(G,\cdot)$ je grupa koja je ujedno i topološki prostor (G,τ) takav da su binarna operacija $\cdot$ i invertiranje u grupi neprekidne funkcije u topologiji τ. *Liejeva grupa* je topološka grupa $(G,\cdot)$ koja je ujedno i konačnodimenzionalna diferencijabilna mnogostrukost takva da su binarna operacija $\cdot$ i invertiranje glatke funkcije.



Slika 5.3.1: Komutativni dijagram.

Tada je $\tilde{L}_A : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$, uz identifikacije (5.3.1), dano s:

$$\tilde{L}_A(\frac{z}{w}, 1) = \frac{a\frac{z}{w} + b}{c\frac{z}{w} + d}.$$

Po prethodnoj diskusiji, za $w = 0$ interpretiramo $\frac{z}{w} = \infty$, te $\frac{a\infty+b}{c\infty+d} = \frac{a+\frac{b}{\infty}}{c+\frac{d}{\infty}} = \frac{a}{c}$.

Propozicija 5.4 (Zadavanje Möbiusove transformacije s tri točke, [3])**.** *Neka su $z_0, v_0, w_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ tri različite točke Riemannove sfere. Tada postoji jedinstvena Möbiusova transformacija f takva da je*[2] $f(z_0) = 0,\ f(v_0) = 1,\ f(w_0) = \infty$. *Dana je formulom:*

$$f(z) = \frac{(v_0 - w_0)(z - z_0)}{(v_0 - z_0)(z - w_0)}.$$

Ideja dokaza. Za jedinstvenost, prvo dokažemo da je jedina Möbiusova transformacija kojoj su $0,\ 1,\ \infty$ (ili bilo koja točka $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ umjesto 1) fiksne točke identiteta. □

Napomena 5.5. Zbog Propozicije 5.4, za $f \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ bez smanjenja općenitosti u računima možemo pretpostaviti da je $f(0) = 0,\ f(\infty) = \infty$. U protivnom, postoji $h \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ takav da je $h(f(0)) = 0,\ h(f(\infty)) = \infty$, pa je $h \circ f \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ takav da vrijedi $h \circ f(0) = 0$ i $h \circ f(\infty) = \infty$.

Zadatak 5.6. *Korištenjem Propozicije 5.4, odredite kako smo došli do formule za biholomorfizam F poluravnine i diska iz Zadatka 7.18 i sa Slike 3.11.*

Uputa. Fiksirajte željene slike triju istaknutih točaka.

Vidjeli smo u Teoremu 3.8 da konformalna preslikavanja lokalno čuvaju 'oblike', tj. kutove među krivuljama. Sljedeća propozicija pokazuje da konformalni automorfizmi sfere čuvaju kružnice i globalno.

Propozicija 5.7. *[3]* DODATI!

[2] Ovdje 1 može biti bilo koja točka $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, pa 1 uzimamo radi jednostavnosti.

5.7.1 Konformalni automorfizmi $\mathbb{C}$

Teorem 5.8 (Aut($\mathbb{C}$), [3, 8])**.** *Grupa konformalnih automorfizama kompleksne ravnine* $\mathbb{C}$ *je grupa invertibilnih* afinih transformacija *ravnine,*

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{f(z) = \lambda z + c,\ \lambda,\, c \in \mathbb{C},\ \lambda \neq 0\}.$$

Dokaz. Svako preslikavanje $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ oblika $f(z) = \lambda z + c$, za $\lambda \neq 0$, je konformalno jer je $f'(z) = \lambda \neq 0$ za svaki $z \in \mathbb{C}$. Očito je za $\lambda \neq 0$ i bijekcija $\mathbb{C}$.

Pokažimo sad da je svaki $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ oblika $f(z) = \lambda z + c$, za $\lambda \neq 0$. Pokažimo da je $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = +\infty$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji neki $M > 0$ te niz $(z_n)_n$ takav da je $|z_n| > n$ i $f(z_n) \in \mathbb{D}_M$, $n \in \mathbb{N}$. Niz $f(z_n)$ leži u kompaktu $\mathrm{Cl}(\mathbb{D}_M)$, pa ima konvergentan podniz $f(z_{n_k}) \to z_0$, kad $k \to \infty$, gdje je $z_0 \in \mathbb{C}$, $|z_0| \leq M$. No f je difeomorfizam na $\mathbb{C}$, pa mu je inverz neprekidna funkcija, što povlači da $z_{n_k} \to f^{-1}(z_0) \in \mathbb{C}$, kad $k \to \infty$. To je kontradikcija s $|z_{n_k}| > n_k \geq k$ za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Definirajmo funkciju $\tilde{f} : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ takvu da je $\tilde{f}|_{\mathbb{C}} \equiv f$ i $\tilde{f}(\infty) = \infty$. Po gornjoj diskusiji je $\tilde{f}$ neprekidna u ∞. No f je holomorfna na $\mathbb{C}$, pa je po *Riemannovom teoremu o uklonjivim singularitetima* (primijenjenom u karti oko ∞) $\tilde{f}$ holomorfna u ∞, a time i holomorfna na čitavom $\overline{\mathbb{C}}$. No $\tilde{f}$ je očito i automorfizam $\overline{\mathbb{C}}$, pa je po Korolaru 3.10 element $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$. Stoga postoje $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad \neq bc$, takvi da je

$$\tilde{f}(z) = \frac{az + b}{cz + d},\ z \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Iz $\tilde{f}(\infty) = \infty$ slijedi da je $\frac{a}{c} = \infty$, tj. $c = 0$ i $a \neq 0$. Stoga je $\tilde{f}(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$, gdje $\frac{a}{d} \neq 0$. Kako je $f = \tilde{f}\Big|_{\mathbb{C}}$, tvrdnja slijedi. □

Napomena 5.9 (Aut($\mathbb{C}$) kao Liejeva podgrupa grupe $PSL(2, \mathbb{C})$)**.** Primijetimo da je Aut($\mathbb{C}$) Liejeva podgrupa grupe $PSL(2, \mathbb{C})$ kompleksne dimenzije 2. Naime, afine transformacije su Möbiusove transformacije specijalnog oblika:

$$\lambda z + c = \frac{\lambda z + c}{0 \cdot z + 1} = \frac{a\lambda \cdot z + ac}{0 \cdot z + a},\ a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Pronađimo sad $a \neq 0$ takav da je $a\lambda \cdot a = 1$. Takva dva kompleksna broja su $a = \pm\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, gdje je $\sqrt{\lambda}$ (jedan, bilo koji) kompleksni korijen iz $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dakle, identificiramo:

$$f(z) = \lambda z + c \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) \ \longleftrightarrow\ \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda} & \frac{c}{\sqrt{\lambda}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{bmatrix} \cdot (\pm I)\ \in PSL(2, \mathbb{C}).$$

Kompleksna dimenzija 2 dolazi od slobodnog izbora 2 kompleksna parametra u matrici, $\lambda \neq 0$ i c.

5.9.1 Konformalni automorfizmi diska

Teorem 5.10 (Aut($\mathbb{D}$)). *Konformalni automorfizmi diska su grupa (obzirom na kompoziciju) oblika:*

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \Big\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{D},\ f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\overline{a}z} :\ \theta \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{D} \Big\}. \tag{5.10.1}$$

Primijetimo:

- podgrupa grupe Möbiusovih transformacija;
- $|e^{i\theta}| = 1$, pa je $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$;
- $1 - \overline{a}z \neq 0$ jer $z \in \mathbb{D}$, pa je $|z| < 1$, a $|a| < 1$;
- Lako se provjeri računski: $|f(z)| < 1$ akko $|z| < 1$, pa $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$.

U dokazu Teorema 5.10 koristit ćemo *Schwarzovu lemu za disk*:

Lema 5.11 (Schwarzova lema za disk, [1]). *Neka je $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfna, te neka je* 0 *fiksna točka*[3] *od f. Tada je $|f'(0)| \leq 1$. Nadalje,*

1. *Ako je $|f'(0)| = 1$, tada je f oblika $f(z) = e^{i\theta} z$, $z \in \mathbb{D}$, za neki $\theta \in \mathbb{R}$ (tj. f je* rotacija oko ishodišta za kut *θ);*
2. *Ako je $|f'(0)| < 1$, tada je $|f(z)| < |z|$, $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ (tj. f je* kontrakcija *blizu* 0*).*

Napomena: U dinamici, fiksnu točku u kojoj je derivacija po modulu jednaka 1 (kao pod 1.) nazivat ćemo *dinamički neutralnom fiksnom točkom*, a onu u kojoj je derivacija po modulu strogo manja ili veća od 1 (kao pod 2.) nazivat ćemo *hiperboličkom fiksnom točkom.* U Poglavlju **??** pokazat ćemo da je lokalno ponašanje orbita s početnom točkom u nekoj maloj okolini fiksne točke kvalitativno različito za navedena dva slučaja. Hiperboličke fiksne točke su privlačne ili odbojne točke za *sve orbite* u nekom malom disku, dok oko dinamički neutralne fiksne točke lokalne orbite pokazuju kvalitativno različita ponašanja.

Dokaz Leme 5.11. U dokazu koristimo *Princip maksimuma*[4]. Definirajmo $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ s:

$$g(z) = \frac{f(z)}{z},\ z \in \mathbb{D}.$$

Kako je $f(0) = 0$, razvojem fu Taylorov red oko 0, vidimo da g ima u 0 uklonjiv singularitet, te njegovim uklanjanjem dobivamo holomorfnu funkciju $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$. Neka je $r < 1$. Tada

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} < \frac{1}{r},\ z \in \partial\mathbb{D}_r. \tag{5.11.1}$$

[3] $f(0) = 0$

[4] Modul nekonstantne holomorfne funkcije ne može poprimati lokalni maksimum strogo unutar područja (povezanog, otvorenog skupa). Preciznije, neka je $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfna. Ako je $z_0 \in D$ točka lokalnog maksimuma od f (tj. postoji otvorena okolina $U \subseteq D$ oko z_0 takva da je $f(z) \leq f(z_0)$, $z \in U$), tada je f konstantna na D.

Zbog kompaktnosti $\overline{\mathbb{D}_r} \subset \mathbb{D}$ neprekidna funkcija $z \mapsto |g(z)|$ mora na tom zatvorenom disku poprimati maksimum. Po principu maksimuma postoje dvije mogućnosti:

1. ili se točka maksimuma nalazi u unutrašnjosti diska (u $\mathbb{D}_r$), no tada je on sigurno i lokalni maksimum, pa je g je konstantna funkcija na $\mathbb{D}_r$;

2. ili se maksimum na $\overline{\mathbb{D}_r}$ poprima na rubu diska $\partial\mathbb{D}_r$. Tada zbog (5.11.1) slijedi $|g(z)| < \frac{1}{r}$ za $z \in \overline{\mathbb{D}_r}$.

Analizirajmo redom oba slučaja. U slučaju da postoji $r < 1$ takav da vrijedi slučaj 1., tada je točka lokalnog maksimuma od $|g|$ specijalno i u unutrašnjosti područja $\mathbb{D}$ na kojem je funkcija holomorfna (jer je $\mathbb{D}_r \subset \mathbb{D}$), pa je po principu maksimuma g konstantna na čitavom $\mathbb{D}$. Zato postoji $C \in \mathbb{C}$ takav da je

$$f(z) = C \cdot z, \ z \in \mathbb{D}.$$

Na svakom rubu diska $\partial D_r \subset \mathbb{D}$, za sve $r < 1$, vrijedi da je $|C| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r}$, pa puštanjem limesa $r \to 1$ dobivamo da je $|C| \leq 1$, no onda je $|f'(0)| = |C| \leq 1$ i $|f(z)| \leq |z|, \ z \in \mathbb{D}$.

U drugom slučaju, u kojem za sve $r < 1$ vrijedi slučaj 2., vrijedi $|g(z)| < \frac{1}{r}$ za $z \in \overline{\mathbb{D}_r}$. No g je definirana na $\mathbb{D}$, pa puštanjem limesa kad $r \to 1$ dobivamo:

$$|g(z)| \leq 1 \text{ tj. } |f(z)| \leq |z|, \ z \in \mathbb{D}.$$

No $f'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z\to 0} g(z) = g(0)$ (g neprekidna u 0), pa je $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$. Dakle, u oba slučaja dobivamo zaključak $|f'(0)| \leq 1$, te $|f(z)| \leq |z|$, tj. $|g(z)| \leq 1$, za $z \in \mathbb{D}$.

Konačno, ukoliko postoji $z_0 \in \mathbb{D}$ takav da je $|g(z_0)| = 1$, po principu maksimuma zbog $|g(z)| \leq 1$, $z \in \mathbb{D}$, je g konstantna na $\mathbb{D}$. Zbog $|g(z_0)| = 1$, postoji $\theta \in \mathbb{R}$ takav da je $g(z) = e^{i\theta}$, $z \in \mathbb{D}$, tj. $f(z) = e^{i\theta} z$, $z \in \mathbb{D}$. U tom slučaju je $|f'(0)| = |e^{i\theta}| = 1$. U protivnom, vrijedi da je $|g(z)| < 1$, $z \in \mathbb{D}$, tj. $|f(z)| < |z|$, $z \in \mathbb{D}$. Kako je $f'(0) = g(0)$, slijedi da je u tom slučaju $|f'(0)| < 1$. Time je lema dokazana. □

Dokaz Teorema 5.10. Ako je $f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$, gdje je $\theta \in \mathbb{R}$ i $a \in \mathbb{D}$, tada je $f \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$. Naime, $e^{i\theta}(1 - |a|^2) \neq 0$, jer je $|a| < 1$, pa M. transformacija nije konstantna. Za pokazati $f|_{\mathbb{D}} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, dovoljno je još samo pokazati (računski, lako) da je $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ (vidjeti napomenu gore).

Pokažimo sad suprotnu inkluziju. Pretpostavimo da je $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, te pokažimo da postoje $\theta \in \mathbb{R}$ i $a \in \mathbb{D}$ takvi da je $f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$, $z \in \mathbb{D}$.

Neka je $a \in \mathbb{D}$ jedinstveno rješenje $f(a) = 0$ (f je bijekcija diska). Definirajmo funkciju

$$g(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}.$$

Kao gore, $g \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ te $g(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$, te je stoga $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Nadalje, $g(a) = 0$. Tada je i $g \circ f^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ i $g \circ f^{-1}(0) = 0$. Po Schwarzovoj lemi 5.11 sad vrijedi:

ili postoji $\theta \in \mathbb{R}$ takav da je $g \circ f^{-1}(z) = e^{i\theta}$, $z \in \mathbb{D}$, ili je $|(g \circ f^{-1})'(0)| < 1$. No u drugom slučaju $g \circ f^{-1}$ nije konformalni automorfizam diska (v. Zadatak 5.12 iza), pa je moguć samo prvi slučaj. $\square$

Zadatak 5.12. *Neka je $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfna funkcija s fiksnom točkom* 0*, te neka je $|f'(0)| < 1$. Tada f nije automorfizam diska.*

Uputa. Pod pretpostavkom da je f automorfizam diska, Schwarzova lema primijenjena na f^{-1} vodi na kontradikciju.

Napomena 5.13. Opet se može pokazati da je $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ 3-dimenzionalna Liejeva podgrupa od $PSL(2, \mathbb{C}) \simeq \mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$. Mnogostrukost je realne dimenzije 3 jer slobodno biramo parametre $(a, e^{i\theta}) \in \mathbb{D} \times \partial\mathbb{D}$ unutar ispunjenog torusa.

Prisjetimo se *Riemann mapping teorema* i Zadatka 7.18 u kojem smo dokazali da je *gornja otvorena poluravnina* $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ biholomorfna disku $\mathbb{D}$. Zbog toga se rezultat o konformalnim automorfizmima diska iz Teorema 5.10 direktno prenosi na poluravninu $\mathbb{H}$:

Zadatak 5.14 ($\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$)**.** *Dokažite da je grupa konformalnih automorfizama gornje otvorene poluravnine $\mathbb{H}$ dana je s:*

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = \{f(z) = \frac{az + b}{cz + d} : \ a, \ b, \ c, \ d \in \mathbb{R}, \ ad - bc > 0\}.$$

Uputa. Uzmimo biholomorfizam diska i ravnine $F : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$, $F(w) = \frac{i-w}{i+w}$ iz Zadatka 7.18. Lako se pokaže da je $\Im(w) > 0$ ako i samo ako je $|F(w)| < 1$ pa, kako je F Möbiusova transformacija $\overline{\mathbb{C}}$, slijedi da je njezina restrikcija na poluravninu biholomorfizam poluravnine i diska. Stoga automorfizme ravnine možemo dobiti na sljedeći način (dokazati!):

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = \{F^{-1} \circ f \circ F : \ f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})\} \ldots$$

5.14.1 Fiksne točke konformalnih automorfizama $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ i $\mathbb{D}$ i komutatori grupa konformalnih automorfizama

Primijetimo da grupe konformalnih automorfizama 1-povezanih Riemannovih ploha iz prethodnih poglavlja nisu nužno komutativne. U ovom poglavlju bavit ćemo se *nužnim i dovoljnim uvjetima pod kojima dva konformalna automorfizma neke plohe komutiraju.* To je u uskoj vezi s opisom *skupa mogućih fiksnih točaka* automorfizama za svaku pojedinu plohu. Navedeno će nam trebati u Poglavlju **??** za biholomorfnu klasifikaciju općenitih Riemannovih ploha bez pretpostavke 1-povezanosti.

Definicija 5.15 (Fiksna točka)**.** *Neka je $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, gdje je $\mathcal{S}$ Riemannova ploha. Kažemo da je $z_0 \in \mathcal{S}$* fiksna točka *preslikavanja f na $\mathcal{S}$ ako je $f(z_0) = z_0$.*

Skup svih fiksnih točaka preslikavanja f na $\mathcal{S}$ označavat ćemo s

$$\mathrm{Fix}(f) \subseteq \mathcal{S}.$$

Dinamički, primijetimo da je orbita unaprijed fiksne točke *konstantan niz* $z_n := f^{\circ n}(z_0) = z_0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Ako je f bijekcija, tada je očito i orbita unazad fiksne točke konstantna, jer je $z_{-n} := f^{\circ(-n)}(z_0) = z_0$, $n \in \mathbb{N}$.

Fiksne točke i komutatori u grupi $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$

Teorem 5.16. *[8]*

1. *Za* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ *je skup* $\mathrm{Fix}(f)$ *ili* $\emptyset$*, ili* 1*-član skup, ili čitav* $\mathbb{C}$.
2. *Za* $f, g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$*,* $f, g \neq \mathrm{id}$[5]*, vrijedi:* $f \circ g = g \circ f$ *ako i samo ako je, skupovno,* $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Fix}(g)$.

Dokaz. 1. Rješavanjem jednadžbe $f(z) = z$, $z \in \mathbb{C}$, za $f(z) = \lambda z + c \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, $\lambda \neq 0$, $c \in \mathbb{C}$, vidimo da je:

- $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$ ako i samo ako je f translacija, tj. $\lambda = 1$ i $c \neq 0$;
- $\mathrm{Fix}(f) = \mathbb{C}$ ako i samo ako je $f = \mathrm{id}$;
- $\mathrm{card}(\mathrm{Fix}(f)) = 1$ (jedinstvena fiksna točka), u svim ostalim slučajevima.

Dokažimo sad 2.
($\Rightarrow$) Pretpostavimo da je $f \circ g = g \circ f$ i $f, g \neq \mathrm{id}$. Tada su $\mathrm{Fix}(f)$ i $\mathrm{Fix}(g)$ prazni ili 1-člani. Razlikujemo dva slučaja:

- $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$. Ako je i $\mathrm{Fix}(g) = \emptyset$, tada je $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Fix}(g)$. U protivnom, postoji jedinstveni $z \in \mathrm{Fix}(g)$, tj. takav da je $g(z) = z$. No $f(z) = f \circ g(z) = g \circ f(z)$, pa je i $f(z)$ fiksna točka of g. Zbog jedinstvenosti fiksne točke od g je $f(z) = z$, pa je $z \in \mathrm{Fix}(f)$, što je kontradikcija s pretpostavkom da je $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$.
- $\mathrm{Fix}(f)$ ima točno jedan element z. No $f(z) = z$ ako i samo ako je $g(f(z)) = g(z)$ zbog injektivnosti g, a to vrijedi ako i samo ako je $f(g(z)) = g(z)$. Stoga je i $g(z) \in \mathrm{Fix}(f)$, pa je zbog jedinstvenosti $g(z) = z$. No tada je $z \in \mathrm{Fix}(g)$, i to je jedina fiksna točka jer $g \neq \mathrm{id}$. Stoga je $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Fix}(g)$.

($\Leftarrow$) Trivijalno se vidi da f i g komutiraju ako je $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Fix}(g) = \emptyset$ ili $\mathbb{C}$ jer su tada f, g obje translacije resp. identitete, pa komutiraju. Pretpostavimo da je $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Fix}(g) = \{w\}$, $w \in \mathbb{C}$. Stavimo $f(z) = \lambda_1 z + c_1$ i $g(z) = \lambda_2 z + c_2$, λ_1, $\lambda_2 \neq 0$. Jasno je da je tada λ_1, $\lambda_2 \neq 1$ jer bi inače f ili g bila translacija ili identiteta s trivijalnim skupom fiksnih točaka $\emptyset$ ili $\mathbb{C}$. Tada vrijedi

$$\lambda_1 w + c_1 = w,\ \lambda_2 w + c_2 = w,$$

iz čega zbog $\lambda_1, \lambda_2 \neq 1$, slijedi da je $c_2 = \frac{1-\lambda_2}{1-\lambda_1} c_1$. Uvrštavanjem u g specijalnog oblika c_2, lako se računski provjeri da takvi f i g komutiraju.

□

[5] Primijetimo, $\mathrm{id} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ komutira sa svim $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, a $\mathrm{Fix}(\mathrm{id}) = \mathbb{C}$.

Fiksne točke i komutatori u grupi $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$

Teorem 5.17. *[8]*

1. *Za* $f \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$, $f \neq \mathrm{id}$, *skup* $\mathrm{Fix}(f)$ *je ili* 1*-član ili* 2*-član podskup od* $\overline{\mathbb{C}}$. *U slučaju* $f = \mathrm{id}$, $\mathrm{Fix}(f) = \overline{\mathbb{C}}$.

2. *Za* $f, g \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$, $f, g \neq \mathrm{id}$ *vrijedi da* $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Fix}(g)$ *povlači da* $f \circ g = g \circ f$ *na* $\overline{\mathbb{C}}$. *S druge strane, ako vrijedi* $f \circ g = g \circ f$, $f, g \neq \mathrm{id}$, *tada je ili* $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Fix}(g)$ *ili* f *i* g *imaju svaka dvije različite fiksne točke, takve da jedna funkcija šalje fiksne točke druge funkcije jednu u drugu*[6]. *U tom slučaju su i* f *i* g involucije[7].

Korolar 5.18. *Ako* $f \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ *fiksira* 3 *ili više točaka na sferi, tada je* $f = \mathrm{id}$.

Dokaz. Tvrdnja 1. se provjeri direktnim računom. Dokažimo 2.

($\Rightarrow$) Pretpostavimo da je $f \circ g = g \circ f$, te da niti f niti g nije identiteta. Razlikujemo dva slučaja:

(a) g ima dvije različite fiksne točke $z_1, z_2 \in \mathrm{Fix}(g)$, $z_1 \neq z_2$. No tada je $\mathrm{Fix}(f)$ točno 2-član po 1. Zbog komutiranja, kao u dokazu prethodnog teorema, $z \in \mathrm{Fix}(g) \Leftrightarrow f(z) \in \mathrm{Fix}(g)$. Stoga vrijedi $f(z_1)$, $f(z_2) \in \mathrm{Fix}(g)$. Očito je, zbog injektivnosti f i $z_1 \neq z_2$, $f(z_1) \neq f(z_2)$. Kako je $\mathrm{Fix}(g)$ 2-član, vrijedi jedan od dva slučaja:

- $z_1 = f(z_1)$, $z_2 = f(z_2)$. Dakle, $f \neq \mathrm{id}$ ima dvije fiksne točke $z_1 \neq z_2$, pa je $\mathrm{Fix}(f)$ po 1. 2-član. No tada je $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Fix}(g) = \{z_1, z_2\}$.
- $z_1 = f(z_2)$, $z_2 = f(z_1)$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $z_1 = 0$, $z_2 = \infty$. U protivnom, po Propoziciji 5.4, postoji $\alpha \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ takav da je $\alpha(0) = z_1$, $\alpha(\infty) = z_2$, pa promatramo umjesto f i g automorfizme $\tilde{f}$, $\tilde{g} \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ dane s:

$$\tilde{f} := \alpha^{-1} \circ f \circ \alpha, \; \tilde{g} = \alpha^{-1} \circ g \circ \alpha.$$

  Sada je $\tilde{f}(0) = \infty$, $\tilde{f}(\infty) = 0$. Kako su z_1, z_2 fiksne točke od g, slijedi i da je $\tilde{g}(0) = 0$ i $\tilde{g}(\infty) = \infty$. Kako su $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ Möbiusove transformacije, dobivamo da moraju biti sljedećih oblika:

$$\tilde{f}(z) = \frac{\lambda}{z}, \; \tilde{g}(z) = \eta z, \quad \lambda, \eta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

  Stoga je $\tilde{f}$ involucija, jer je $\tilde{f}^{\circ 2} = \mathrm{id}$. Kako $\tilde{f}$ i $\tilde{g}$ komutiraju (jer f i g komutiraju), uvrštavanjem gornjih oblika $\tilde{f}$ i $\tilde{g}$ u relaciju komutiranja dobivamo da je $\eta^2 = 1$, pa je i $\tilde{g}^{\circ 2} = \mathrm{id}$ i $\tilde{g}$ je involucija. No tada su i f i g involucije.

---

[6] Neka je $\mathrm{Fix}(f) = \{z_1^f, z_2^f\}$ te $\mathrm{Fix}(g) = \{z_1^g, z_2^g\}$. Tada je $g(z_{1,2}^f) = z_{2,1}^f$ i $f(z_{1,2}^g) = z_{2,1}^g$.

[7] Za preslikavanje $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{S})$, gdje je $\mathcal{S}$ Riemannova ploha, kažemo da je *involucija* ako je $f \neq \mathrm{id}$, no $f^{\circ 2} = \mathrm{id}$.

(b) g ima jedinstvenu fiksnu točku z_1. Bez smanjenja općenitosti (tj. konjugiranjem f i g Möbiusovom transformacijom $\alpha \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ kao pod (a)) možemo pretpostaviti da je $\mathrm{Fix}(\tilde{g}) = \{\infty\}$. Kako $\tilde{f}$ i $\tilde{g}$ komutiraju, slijedi da je i $\tilde{f}(\infty) \in \mathrm{Fix}(\tilde{g})$, pa je $\tilde{f}(\infty) = \infty$, tj. $\infty \in \mathrm{Fix}(\tilde{f})$. Pokažimo da je to jedina fiksna točka od $\tilde{f}$.

Kako je $\tilde{g}(\infty) = \infty$ i $\tilde{g}$ konformalni automorfizam sfere, slijedi da je $g = \tilde{g}|_{\mathbb{C}} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ bez fiksnih točaka (∞ je jedina fiksna točka od $\tilde{g}$). Također, zbog $\tilde{f}(\infty) = \infty$, je i $f = \tilde{f}|_{\mathbb{C}} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$. Dakle, f i g su konformalni automorfizmi ravnine koji komutiraju, pa je po Teoremu 5.16 njihov skup fiksnih točaka isti. Stoga niti f nema na $\mathbb{C}$ fiksnih točaka, te je $\mathrm{Fix}(\tilde{f}) = \{\infty\}$.

($\Leftarrow$) Pod pretpostavkom da f i g imaju isti skup fiksnih točaka (radi jednostavnosti ih pošaljemo u ∞ ili $0, \infty$ i prijeđemo na $\tilde{f}, \tilde{g}$ kao i gore), dokažemo da $\tilde{f}$ i $\tilde{g}$ moraju biti specijalnih oblika te da kao takvi komutiraju.

□

Fiksne točke i komutatori u grupi $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$

Prisjetimo se da za kompleksne funkcije vrijedi jaki rezultat:

Teorem 5.19 (Teorem o otvorenom prelikavanju, [6]). *Neka je* $f : U \to \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ *otvoren i povezan, nekonstantna holomorfna funkcija. Tada je* f *otvoreno*[8] *preslikavanje.*

Dokaz. Koristi se Rouchéov teorem. □

Zadatak 5.20. *Pokažite da za* $f \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{D}})$ *vrijedi* $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, *a* $f(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$ (*unutrašnjost diska preslikava se u unutrašnjost, a rub u rub*).

Uputa: Primjenom *Teorema o otvorenom preslikavanju* na restrikcije $f|_{\mathbb{D}}, f^{-1}|_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$.

Napomena 5.21 ("$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \equiv \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{D}})$"). Svaki $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ može se jednoznačno proširiti na zatvarač, do $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{D}})$. Primijetimo da je egzistencija proširenja dana formulom (5.10.1) za automorfizme diska

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z},\ e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D},\ a \in \mathbb{D}, \tag{5.21.1}$$

koja se proširuje do preslikavanja s $\overline{\mathbb{D}}$ opet na $\overline{\mathbb{D}}$ (provjerite!), a jedinstvenost proširenja slijedi zbog jedinstvenosti neprekidnog proširenja na zatvarač. S druge strane, po Zadatku 5.20, restrikcija svakog automorfizma $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{D}})$ na disk $\mathbb{D}$ pripada $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, pa je oblika (5.21.1). U tom smislu poistovjećujemo:

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \equiv \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{D}}).$$

[8]Slike otvorenih podskupova od U su otvorene u $\mathbb{C}$.

Teorem 5.22. *[8]*

1. *Za* $f \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{D}})$, $f \neq \mathrm{id}$, *skup* $\mathrm{Fix}(f) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$ *sastoji se ili od jedne točke u disku* $\mathbb{D}$, *ili od jedne točke na rubu* $\partial\mathbb{D}$, *ili od dvije točke na rubu* $\partial\mathbb{D}$.
2. *Za* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, $f \neq \mathrm{id}$, *je* $\mathrm{Fix}(f) \subseteq \mathbb{D}$ *ili* 1*-član ili prazan.*
3. f, $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, f, $g \neq \mathrm{id}$, *komutiraju ako i samo ako njihova jedinstvena proširenja do automorfizama* $\overline{\mathbb{D}}$ *imaju iste skupove fiksnih točaka u* $\overline{\mathbb{D}}$.

Dokaz.

1. Primijetimo da iz Teorema uniformizacije 3.13 slijedi da je (radi kompaktnosti) $\overline{\mathbb{D}}$ biholomorfan sferi, pa njihovi automorfizmi imaju isti broj fiksnih točaka (1 ili 2). Međutim, ovdje trebamo precizniji rezultat o njihovom položaju na $\overline{\mathbb{D}}$.

Po Napomeni 5.21, $f \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{D}})$ je nekonstantna Möbiusova transformacija (dana formulom (5.21.1)), pa se može jednoznačno proširiti do $F \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$, tako da je $F\Big|_{\overline{\mathbb{D}}} = f$.

Neka je $\alpha : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ *inverzija*,

$$\alpha(z) := \frac{1}{\overline{z}}.$$

Očito je α bijekcija, te $\alpha(\mathbb{D}) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, $\alpha(\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}) = \mathbb{D}$ i $\alpha\Big|_{\partial\mathbb{D}} = \mathrm{id}$.

Kako je $F \in \mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$, slijedi da je $\alpha^{-1} \circ F \circ \alpha \in \mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$, dakle, $\alpha^{-1} \circ F \circ \alpha \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$. Također, $F \equiv \alpha^{-1} \circ F \circ \alpha$ na rubu $\partial\mathbb{D}$. Kako se holomorfne funkcije F i $\alpha^{-1} \circ F \circ \alpha$ podudaraju na skupu koji u $\mathbb{C}$ ima gomilište, slijedi

$$F \equiv \alpha^{-1} \circ F \circ \alpha \text{ na } \overline{\mathbb{C}}.$$

Iz toga lako vidimo da F ima fiksnu točku $z \in \mathbb{D}$ ako i samo ako F ima fiksnu točku $\alpha(z) \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. No $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, po Teoremu 5.17 F ima jednu ili dvije fiksne točke na $\overline{\mathbb{C}}$. Kombinacijom te dvije tvrdnje, dobivamo 3 mogućnosti:

- jedna fiksna točka od F je unutar $\mathbb{D}$, a druga u $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$,
- obje fiksne točke od F su na rubu $\partial\mathbb{D}$,
- F ima točno jednu fiksnu točku na $\overline{\mathbb{C}}$ i ona se nalazi na rubu $\partial\mathbb{D}$.

Tvrdnja 2. slijedi direktno iz 1. i Napomene 5.21.

Dokažimo tvrdnju 3. Za $f, g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ definirajmo pripadna proširenja F, $G \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ kao i gore. Vrijedi $f \circ g = g \circ f$ na $\mathbb{D}$ ako i samo ako $F \circ G = G \circ F$ na $\overline{\mathbb{C}}$ (zbog jedinstvenosti analitičkog proširenja sa skupa $\mathbb{D}$ koji u $\mathbb{C}$ ima gomilište). Po Teoremu 5.17, ako je $\mathrm{Fix}(F) = \mathrm{Fix}(G)$ na $\overline{\mathbb{C}}$, tada je $F \circ G = G \circ F$. S druge strane, $F \circ G = G \circ F$ povlači ili $\mathrm{Fix}(F) = \mathrm{Fix}(G)$, ili su F i G involucije, te svaka ima dvije različite fiksne točke koje druga funkcija obrće. Konačno, zbog gore dokazane tvrdnje da F i G imaju fiksnu točku $z \in \mathbb{D}$ ako i samo ako imaju fiksnu točku $\alpha(z) \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, tvrdnja $\mathrm{Fix}(F) = \mathrm{Fix}(G)$ je ekvivalentna tvrdnji $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Fix}(g)$ na $\mathbb{D}$.

Dakle, za dokaz tvrdnje 3. ostaje samo odbaciti slučaj involucija koje obrću fiksne točke. Pretpostavimo suprotno, F involucija, $\mathrm{Fix}(F) = \{z_1, z_2\}$, $z_1 \neq z_2$, te $G(z_1) = z_2$ i $G(z_2) = z_1$. Bez smanjenja općenitosti (nakon konjugacije F s nekim automorfizmom sfere, $\tilde{F} = \beta^{-1} \circ F \circ \beta \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$), možemo pretpostaviti da je $z_0 = 0$, $z_1 = \infty$. No tada je $\tilde{F}(z) = \lambda z$, gdje je $\lambda \neq 0$ i, zbog $\tilde{F}^{\circ 2} = \mathrm{id}$ te $\tilde{F} \neq \mathrm{id}$, slijedi $\lambda = -1$. Stoga je $\tilde{F}'(0) = -1$, pa se lako dobije po lančanom pravilu da je i $F'(z_0) = -1$. Analogno se pokaže i $\tilde{F}'(\infty) = -1$, pa je i $F'(z_1) = -1$. Zbog $f = F|_{\mathbb{D}} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ je $F(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, pa se po Zadatku 5.23 niti z_0 niti z_1 ne nalaze na rubu $\partial\mathbb{D}$. Pretpostavimo stoga $z_0 \in \mathbb{D}$ i $z_1 \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$. No sad $G(z_0) = z_1$ i $G(z_1) = z_0$ vodi na kontradikciju s $G(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ (zbog $g = G|_{\mathbb{D}} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$). □

Zadatak 5.23. *Neka je $F : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, U otvoren takav da $\mathbb{D} \subseteq U$, holomorfna. Neka je $F(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ te neka je z_0 fiksna točka od F takva da je $F'(z_0) = -1$. Dokažite da tada $z_0 \notin \partial\mathbb{D}$.*

Uputa. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $F(z_0) = z_0$, $F'(z_0) = -1$ te $|z_0| = 1$. Taylorov razvoj oko z_0 vodi na kontradikciju s $F(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$.

Poglavlje 6

Generalni teorem uniformizacije (biholomorfna klasifikacija povezanih Riemannovih ploha)

6.1 Prostori natkrivanja, univerzalno natkrivanje, deck transformacije

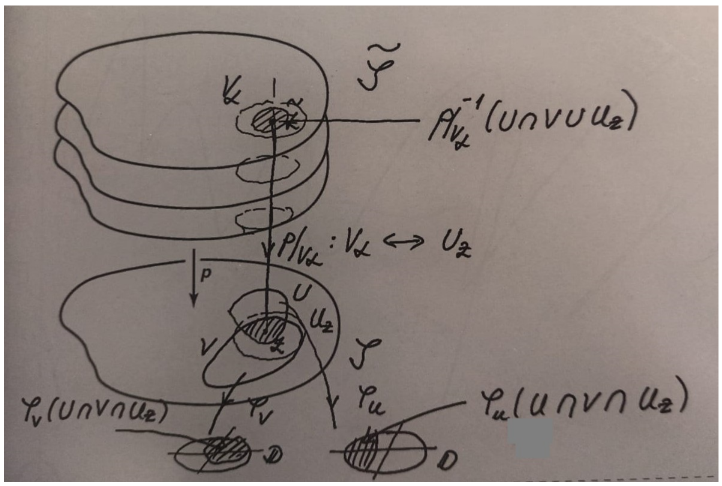
6.1.1 Prostori natkrivanja

Prisjetimo se najvažnijih pojmova o prostorima natkrivanja iz npr. [10]. To će nam biti potrebno za iskaz općenitog teorema o klasifikaciji Riemannovih ploha, u kojem se klasifikacija dobiva preko njihovih univerzalnih natkrivanja. Ukratko, prostori natkrivanja su kod univerzalnog natkrivanja 1-povezane Riemannove plohe, pa njih znamo klasificirati po Teoremu uniformizacije 3.13.

Definicija 6.2 (Prostori natkrivanja, [10])**.** *Neka je S topološki prostor.* Natkrivanjem *$\tilde{S}$ nazivamo par $(\tilde{S}, p)$ topološkog* prostora natkrivanja *$\tilde{S}$ i* natkrivajućeg preslikavanja *$p : \tilde{S} \to S$ takvog da je:*

- *u danom paru topologija je p* neprekidna surjekcija*,*
- *za svaku točku $z \in S$ postoji otvorena okolina $z \in U_z$ koja je* jednoliko natkrivena*:*
$$p^{\leftarrow}(U_z) = \quad \dot{\bigcup}_{\alpha \in J} V_\alpha,$$
gdje je unija disjunktna, J neki indeksni skup (općenito proizvoljnog kardinaliteta), $V_\alpha \subseteq \tilde{S}$, $\alpha \in J$, otvoreni, te $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U_z$ homeomorfizam, za svaki $\alpha \in J$.

Standardno, $p^{\leftarrow}(U_z)$ označava prasliku otvorenog skupa $U_z \subseteq S$, koju još zovemo i *vlaknom nad* U_z, te zadnji zahtjev zapravo znači da se vlakno nad U_z u prostoru natkrivanja $\tilde{S}$ raslojava na disjunktnu uniju (homeomorfnih) kopija od U_z. Zato možemo (barem lokalno oko svake točke) zamišljati da se prostor natkrivanja $\tilde{S}$ sastoji od više "listova" koji se projiciraju po preslikavanju p na prostor S.



Slika 6.2.1: Prenošenje diferencijabilne strukture Riemannove plohe sa plohe $\mathcal{S}$ na prostor natkrivanja $\tilde{\mathcal{S}}$, uz Napomenu 6.3.

Napomena 6.3 (Prostori natkrivanja Riemannovih ploha)**.** Ako je $S = \mathcal{S}$ dodatno Riemannova ploha, diferencijabilna struktura Riemannove plohe prenosi se na prirodan način (lokalno preko homeomorfizama $p|_{V_\alpha}$) sa $\mathcal{S}$ na prostor natkrivanja $\tilde{\mathcal{S}}$, te $\tilde{\mathcal{S}}$ postaje *Riemannova ploha*, a p postaje *lokalni biholomorfizam* ploha $\mathcal{S}$ i $\tilde{\mathcal{S}}$.

Naime, neka je $\tilde{z} \in \tilde{\mathcal{S}}$. Tada je $z := p(\tilde{z}) \in \mathcal{S}$, te postoji otvorena okolina U_z od z koja je *jednoliko natkrivena* ($p^{\leftarrow}(U_z) = \cup_{\alpha \in J} V_\alpha$). Stoga postoji *jedinstveni* $\alpha \in J$ takav da je $\tilde{z} \in V_\alpha$, te je $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U_z$ homeomorfizam.

Dodatno, $\mathcal{S}$ je Riemannova ploha. Neka je $(U, \varphi_U : U \to \mathbb{D})$ neka karta oko z, $z \in U$. Tada je i $\varphi_U\Big|_{U \cap U_z} : U \cap U_z \to \mathbb{D}$ karta[1]. No tada je $\varphi_U\Big|_{U \cap U_z} \circ p|_{V_\alpha} : p|_{V_\alpha}^{-1}(U \cap U_z) \to \mathbb{D}$ lokalna karta (homeomorfizam) oko $\tilde{z}$.

Nadalje, promotrimo prijelaze tako konstruiranih karata natkrivajuće mnogostrukosti $\tilde{S}$ oko $\tilde{z}$, $\varphi_U\Big|_{U \cap U_z} \circ p|_{V_\alpha} : p|_{V_\alpha}^{-1}(U \cap U_z) \to \mathbb{D}$ i $\varphi_V\Big|_{V \cap U_z} \circ p|_{V_\alpha} : p|_{V_\alpha}^{-1}(V \cap U_z) \to \mathbb{D}$, takve da je $z \in U \cap V$ (i time $\tilde{z} \in p|_{V_\alpha}^{-1}(U \cap V \cap U_z)$).

[1] Malo preciznije, postkompozicijom φ_U s biholomorfizmom otvorenog skupa $\varphi_U(U \cap U_z) \subseteq \mathbb{C}$ i diska $\mathbb{D}$, koji postoji po Riemann mapping teoremu, osiguramo da je 'novi' $\varphi_U\Big|_{U \cap U_z}$ homeomorfizam na $\mathbb{D}$, time i karta!

Prijelazi karata na odgovarajućim presjecima domena dani su s:

$$\begin{aligned}\varphi_V\Big|_{V\cap U_z} \circ p|_{V_\alpha} \circ \left(\varphi_U\Big|_{U\cap U_z} \circ p|_{V_\alpha}\right)^{-1} &= \varphi_V\Big|_{V\cap U_z} \circ p|_{V_\alpha} \circ p|_{V_\alpha}^{-1} \circ \varphi_U\Big|_{U\cap U_z}^{-1} \\ &= \varphi_V\Big|_{V\cap U_z} \circ \varphi_U\Big|_{U\cap U_z}^{-1},\end{aligned}$$

a to je biholomorfizam jer je $\mathcal{S}$ diferencijabilna mnogostrukost. Stoga su i prijelazi karata na $\tilde{\mathcal{S}}$ biholomorfizmi, i diferencijabilna struktura se prenosi sa $\mathcal{S}$ na $\tilde{\mathcal{S}}$.

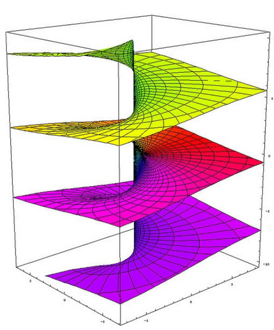
Zadatak 6.4. *Pokažite da je za Riemannovu plohu $\mathcal{S}$ i njezin prostor natkrivanja, Riemannovu plohu $\tilde{\mathcal{S}}$ (gdje je Riemannova diferencijabilna struktura prenesena s $\mathcal{S}$ na $\tilde{\mathcal{S}}$ kao u Napomeni 6.3), natkrivajuće preslikavanje $p : \tilde{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$ lokalni biholomorfizam (tj. da za svaku točku $\tilde{z} \in \tilde{\mathcal{S}}$ postoji otvorena okolina $U \subseteq \tilde{\mathcal{S}}$, $\tilde{z} \in U$, takva da je $p|_U : U \to p(U) \subseteq \mathcal{S}$ biholomorfizam ploha).*

Uputa: Koristite konstrukciju iz gornje napomene i definicije holomorfne funkcije između dviju ploha. Pokazuje se da, u odgovarajućim parovima karata $\mathcal{S}$ i $\tilde{\mathcal{S}}$ oko svake točke, preslikavanje p postaje $\mathrm{id}_{\mathbb{D}}$.

Primjer 2 (Primjer natkrivajućeg prostora: Riemannova ploha logaritma)**.**

1. $\mathcal{S} = \mathbb{C}\setminus\{0\}, \tilde{\mathcal{S}} = \mathbb{C}$, s natkrivajućim preslikavanjem $p : \tilde{\mathcal{S}} \to \mathcal{S},\ p(z) = e^{-z}$;
2. $\mathcal{S} = \mathbb{D} \setminus \{0\}$, $\tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{H}_{\Re>0} := \{z \in \mathbb{C} :\ \Re(z) > 0\}$ (desna otvorena poluravnina), s istim natkrivajućim preslikavanjem.

U oba slučaja na obje plohe gledamo standardnu euklidsku topologiju. Primijetimo da preslikavanje p nije injektivno. Jasno, $p(z + 2k\pi \cdot i) = p(z)$, za svaki $k \in \mathbb{Z}$. Pritom se horizontalni pravci $\{\Im(z) = a\}$, $a \in \mathbb{R}$, projiciraju u zrake re^{ia}, $r > 0$. Stoga p horizontalne poluotvorene pruge širine 2π preslikava homeomorfno i biholomorfno u $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.



Slika 6.4.1: Riemannova ploha logaritma kao prostor natkrivanja $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Preuzeto s https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Riemann_surface_log.jpg.

Vizualizirajmo sad na drugi način Riemannovu plohu natkrivanja plohe $\mathcal{S}$, koju zovemo *Riemannova ploha logaritma*, v. Sliku 2. Možemo zamisliti da se naš prostor $\tilde{\mathcal{S}} = \dot\cup_{k\in\mathbb{Z}}\tilde{\mathcal{S}}_k$ sastoji od prebrojivo kopija $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ (tzv. *listova, engl. sheets*) danih s

$$\tilde{\mathcal{S}}_k := \{z \in \mathbb{C}:\ z = re^{i\varphi},\ r > 0,\ \varphi \in [k, k+2\pi),\ k \in \mathbb{Z},$$

gdje razlikujemo točke $re^{i\varphi} \in \tilde{\mathcal{S}}_\ell$ i $re^{i(\varphi+2k\pi)} \in \tilde{\mathcal{S}}_{\ell+k}$, ℓ, $k \in \mathbb{Z}$, koje pripadaju različitim listovima. Listovi su povezani u *povezanu mnogostrukost* duž *logaritamskih prereza* $\{re^{2k\pi i},\ r \geq 0\},\ k \in \mathbb{Z}$. Očito je projekcija $p : \tilde{\mathcal{S}} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $p(re^{i\varphi}) := re^{i(\varphi \mod 2\pi)}$, lokalni biholomorfizam.

Globalna karta za taj prostor natkrivanja $\tilde{\mathcal{S}}$ dana je s

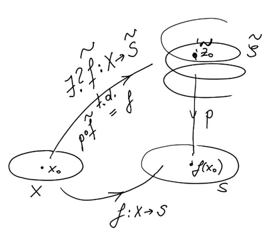
$$\varphi : \mathbb{C} \to \tilde{\mathcal{S}},\ \varphi(x+iy) = e^{-z} = e^{-x}e^{-iy},$$

gdje *ne* poistovjećujemo z i $ze^{2k\pi i}$, $k \in \mathbb{Z}$ (tj. smatramo da je $e^{-iy} \neq e^{-i(y+2k\pi)}$, jer pripadaju vlaknu iste točke, ali u različitim listovima $\tilde{\mathcal{S}}_k$). Očito je $\varphi^{-1}(re^{i\varphi}) = -\mathrm{Log}(re^{i\varphi}) = -\log r - i\varphi$. Očito je φ homeomorfizam, a ako $\mathbb{C}$ gledamo kao Riemannovu plohu postaje biholomorfizam (v. Zadatak 3.2) $\mathbb{C}$ i $\tilde{\mathcal{S}}$.

6.4.1 Lema o podizanju

U nastavku trebat ćemo sljedeću *Lemu o podizanju.* Mi je iskazujemo samo za 1-povezane domene, no postoji i njezina generalizacija na općenitije domene koja se može naći u npr. [10, Lema 74.1, *The general lifting lemma*]. Specijalni slučaj te leme jest topološki rezultat o jedinstvenosti podizanja puteva (neprekidnih funkcija $f : [0,1] \to S$) i homotopija puteva (neprekidnih funkcija $f : [0,1]^2 \to S$) u prostor natkrivanja, nakon što fiksiramo početnu točku vlakna u koju podižemo.

Lema 6.5 (Lema o podizanju, [10])**.** *Neka su X, S topološki prostori, X 1-povezan i lokalno putevima povezan, te neka je $f : X \to S$ neprekidna. Neka je $p : \tilde{S} \to S$ natkrivanje. Neka je $x_0 \in X$ i $\tilde{z}_0 \in p^{\leftarrow}(f(x_0))$. Tada postoji jedinstveno neprekidno podizanje $\tilde{f} : X \to \tilde{S}$ takvo da je $\tilde{f}(x_0) = \tilde{z}_0$ i $p \circ \tilde{f} = f$.*



Slika 6.5.1: Komutativni dijagram za podizanje u prostor natkrivanja.

Skica dokaza. Pretpostavljamo da smo već dokazali jedinstvenost podizanja puteva i homotopija puteva u prostor natkrivanja (v. [10] za jednostavni dokaz, radi se u sklopu Topologije), te da ovdje dokazujemo samo za generalnije funkcije. Neka je $x \in X$. Uzmemo bilo koji put γ_x od x_0 do x u prostoru X. Tada je $f \circ \gamma_x$ put u prostoru S od $f(x_0)$ do $f(x)$. On ima jedinstveno podizanje do puta $\tilde{\gamma}_x$ u $\tilde{S}$ takvog da je $\tilde{\gamma}_x(0) = \tilde{z}_0$. Stavimo

$$\tilde{f}(x) := \tilde{\gamma}_x(1).$$

Primijetimo da definicija ne ovisi o izboru puta γ_x od x_0 do x jer je X 1-povezan, pa su svi takvi putevi putevima homotopni. No onda su i njihove slike $f \circ \gamma_x$ homotopne u prostoru S, pa, zbog jedinstvenosti podizanja homotopija puteva u prostor natkrivanja, njihova podizanja imaju istu završnu točku $\tilde{\gamma}_x(1)$. Ostaje pokazati neprekidnost (nećemo). □

6.5.1 Univerzalna natkrivanja Riemannovih ploha. Egzistencija i jedinstvenost.

Definicija 6.6 (Univerzalno natkrivanje, [10]). *Natkrivanje $(\tilde{U}, p)$ topološkog prostora S nazivamo* univerzalnim *ako je prostor $\tilde{U}$ 1-povezan*[2].

Pod relativno blagim uvjetima na bazni prostor, univerzalno natkrivanje postoji. Također, ako postoji, ono je jedinstveno u smislu da, čak homeomorfno, natkriva svako drugo 1-povezano natkrivanje tog prostora.

Propozicija 6.7 (Egzistencija univerzalnog natkrivanja, [10]). *Svaki topološki prostor koji je povezan, lokalno*[3] *1-povezan i lokalno putevima povezan ima univerzalno natkrivanje.*

Skica dokaza. Dokaz egzistencije univerzalnog natkrivanja provodi se konstruktivno. Prostor univerzalnog natkrivanja čine klase homotopija puteva u baznom prostoru s odgovarajućom topologijom. Dokaz se radi u okviru topoloških kolegija, pa ga izostavljamo. Može se naći npr. u [10, Chapter 12]. Ovdje navodimo samo osnovne korake konstrukcije koji će nam biti potrebni za daljnje razumijevanje.

Kako je topološki prostor S lokalno povezan putevima i povezan, slijedi da je S globalno povezan putevima (zašto?[4]). Fiksirajmo neku početnu točku $z_0 \in S$. Za svaku točku $z \in S$, promatramo sve klase homotopija puteva u S s početnom točkom z_0 i završnom točkom z. Prostor tih klasa čini prostor $\tilde{S}$ univerzalnog natkrivanja, s natkrivajućim preslikavanjem $p([\gamma]) = \gamma(1) = z \in S$ (završna točka puteva iz te klase). Topologija na prostoru klasa puteva $\tilde{S}$ je kvocijentna

[2] Za topološki prostor kažemo da je 1-povezan ako je povezan putevima i ako "nema rupa" (svaka petlja je u tom prostoru homotopna (neprekidno se deformira u) konstantnoj petlji).

[3] *Lokalno*, kao i obično, znači da oko svake točke tog prostora postoji otvorena okolina koja je 1-povezana i putevima povezana.

[4] Ako je t.p. S lokalno povezan putevima, komponente povezanosti putevima i komponente povezanosti se podudaraju (inače su komponente povezanosti putevima *sadržane* u komponentama povezanosti, jer povezanost putevima povlači povezanost) [10].

topologija obzirom na *kompaktno-otvorenu* (engl. *compact open*) topologiju[5] na prostoru $\mathcal{C}([0,1], S)$ puteva u S. $\square$

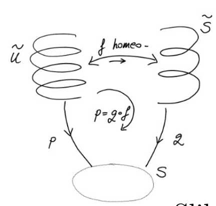
Primjer 3 (Primjer 2 revisited)**.** Primijetimo da su natkrivanja u Primjeru 2 univerzalna, jer su $\mathbb{C}$ i $\mathcal{H}_{\Re>0}$ 1-povezani topološki prostori. Ta natkrivanja bila su dana lijepom formulom.

Provedimo sad apstraktnu konstrukciju univerzalnog natkrivanja prostora $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ iz dokaza Teorema 6.7. Istaknimo npr. točku $1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ koji je putevima povezan, kao fiksiranu početnu točku iz koje gledamo puteve. Neka je $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Klase homotopija puteva iz točke 1 u danu točku z mogu se, ugrubo, predstaviti s *namotajnim brojem puta oko* 0: koliko puta put obilazi točku 0 koja nije u domeni. S kvocijentom topologijom iz dokaza Teorema 6.7 taj prostor je homeomorfan Riemannovoj plohi logaritma, tj. $\mathbb{C}$. Ugrubo, u list $\mathcal{S}_k$ stavimo one klase puteva iz točke 1 koje npr. $k \in \mathbb{Z}$ puta obilaze 0.

Zanimljivost (i tema za seminarski rad): Koga zanima, može pokušati formalizirati konstrukciju u slučaju univerzalnog natkrivanja $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, povezati preko namotajnog broja s logaritamskim preslikavanjem i napisati formulu za homeomorfizam apstraktnog prostora natkrivanja kao klasa homotopija puteva i Riemannove plohe logaritma. Detalji se mogu naći u npr. [9, Subsection 6.7].

Propozicija 6.8 ("Jedinstvenost" univerzalnog natkrivanja do na homeomorfizam)**.** *Neka je S topološki prostor i $(\tilde{U}, p)$ njegovo univerzalno natkrivanje. Neka je $(\tilde{S}, q)$ neko drugo 1-povezano natkrivanje prostora S. Tada postoji homeomorfizam $f : \tilde{U} \to \tilde{S}$ takav da je $p = q \circ f$.*

Primijetimo da je $(\tilde{U}, f)$ zapravo homeomorfno natkrivanje prostora $\tilde{S}$ (gdje je f čak homeomorfizam). Dakle, možemo reći da univerzalno natkrivanje *homeomorfno natkriva* svaki drugi 1-povezani prostor natkrivanja nekog prostora. U tom smislu ga zovemo *univerzalnim*.



Slika 6.8.1: Jedinstvenost univerzalnog natkrivanja.

Napomena 6.9 (Egzistencija i jedinstvenost (do na biholomorfizam!) univerzalnog natkrivanja *Riemannovih ploha*)**.**

1. (egzistencija) Po definiciji, Riemannova ploha je povezana. Također, ona je lokalno homeomorfna disku $\mathbb{D}$ koji je 1-povezan i povezan putevima, pa je

[5] Podbazu *kompaktno otvorene topologije* na $\mathcal{C}(X, Y)$, X, Y t.p., čine skupovi $V(K, U) := \{f \in \mathcal{C}(X, Y) : f(K) \subseteq U\}$, K kompaktan u X, U otvoren u Y. Ako je prostor Y dodatno metrizabilan, ta topologija se podudara s *topologijom uniformne konvergencije na kompaktima*.

Riemannova ploha lokalno 1-povezana i lokalno povezana putevima. Stoga za Riemannovu plohu uvijek postoji univerzalno natkrivanje, koje je, po Napomeni 6.3, opet Riemannova ploha.

2. (jedinstvenost do na biholomorfizam) Homeomorfizam f iz Propozicije 6.8 između Riemannove plohe univerzalnog natkrivanja i Riemannove plohe nekog drugog natkrivanja je čak *biholomorfizam* tih ploha. Dokažite! (*Uputa:* po Napomeni 6.3 je f kao natkrivajuće preslikavanje Riemannove plohe lokalni biholomorfizam, pa je zbog bijektivnosti (homeomorfizam je) i globalni biholomorfizam).

6.9.1 Deck transformacije

Definicija 6.10 (Deck transformacija, [10]). *Neka je S topološki prostor te $(\tilde{S}, p)$ neko natkrivanje tog prostora. Homeomorfizam $\gamma : \tilde{S} \to \tilde{S}$ takvo da vrijedi $p \circ \gamma = p$ nazivamo* deck transformacijom *za natkrivanje p.*

Možemo zamišljati da deck transformacija γ "permutira listove" natkrivajućeg prostora, pritom ne narušavajući vlakna (radi na neki način samo horizontalne permutacije, a ostaje invarijantna na vlaknima). Drugim riječima, $\tilde{z} \in p^{\leftarrow}(z)$ ako i samo ako je $\gamma(\tilde{z}) \in p^{\leftarrow}(z)$, $z \in S$.

Skup svih deck transformacija nekog natkrivanja čini *grupu* obzirom na kompoziciju, koju zovemo *grupom deck transformacija* natkrivanja $(\tilde{S}, p)$, i označavamo s $(\Gamma, \circ)$. Jasno je da je $\mathrm{id}|_{\tilde{S}}$ deck transformacija i neutralni element grupe.

Zadatak 6.11 (Deck transformacije natkrivanja Riemannovih ploha). *Neka je $\mathcal{S}$ Riemannova ploha i neka je $(\tilde{\mathcal{S}}, p)$ neko njezino natkrivanje (s diferencijabilnom strukturom Riemannove plohe naslijeđenom iz $\mathcal{S}$ kao u Napomeni 6.3). Dokažite da su tada deck transformacije biholomorfizmi, tj. konformalni automorfizmi natkrivajuće plohe $\tilde{\mathcal{S}}$.*

Uputa: Korištenjem relacije $p \circ \gamma = p$ lokalno oko svake točke $\tilde{z} \in \tilde{\mathcal{S}}$, dokaže se da je γ *lokalni* biholomorfizam ($\gamma|_{V_\beta} = p|_{V_\alpha}^{-1} \circ p|_{V_\beta}$, gdje su V_α i V_β dvije homeomorfne kopije otvorene okoline $U \in \mathcal{S}$ koja sadrži točku $p(\tilde{z})$, takve da je $\tilde{z} \in V_\beta$). Zbog globalne homeomorfnosti je γ i *globalni* biholomorfizam.

Primjer 4 (Deck transformacije u Primjeru 2). Funkcije $\gamma_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (resp. $\mathcal{H}_{\Re>0} \to \mathcal{H}_{\Re>0}$) dane s:

$$\gamma_k(z) = z + 2k\pi \cdot i,\ k \in \mathbb{Z},$$

su deck transformacije danih natkrivanja. Međutim, dokaz da su to sve deck transformacije tog univerzalnog natkrivanja, tj. potpuni opis grupe deck transformacija dobit ćemo tek u Primjeru 5 pomoću Propozicije 6.15.

6.11.1 Normalna natkrivanja

Definicija 6.12 (Normalno natkrivanje, [10]). *Kažemo da je natkrivanje $p : \tilde{S} \to S$* normalno *ako je za svake dvije točke $\tilde{z}, \tilde{z}' \in \tilde{S}$ ekvivalentno:*

1. *$\tilde{z}$ i $\tilde{z}'$ pripadaju istom vlaknu (tj. $p(\tilde{z}) = p(\tilde{z}')$),*

2. *postoji jedinstvena deck transformacija $\gamma \in$ [6]Γ takva da je $\gamma(\tilde{z}) = \tilde{z}'$.*

U definiciji normalnosti natkrivanja se zapravo zahtijeva smjer (1. $\Rightarrow$ 2.), jer (2. $\Rightarrow$ 1.) trivijalno vrijedi za deck transformacije bilo kojeg natkrivanja.

Napomena 6.13. U slučaju *normalnog* natkrivanja postoji, za fiksiranu točku z_0 i fiksiranu točku iz vlakna $\tilde{z}_0 \in p^{\leftarrow}(z_0)$, izomorfizam grupe deck transformacija $(\Gamma, \circ)$ i grupe $(p^{\leftarrow}(z_0), \star)$, s operacijom $\star : p^{\leftarrow}(z_0) \times p^{\leftarrow}(z_0) \to p^{\leftarrow}(z_0)$ definiranom s:

$$\tilde{z} \star \tilde{z}' := (\gamma_1 \circ \gamma_2)(\tilde{z}_0), \quad \tilde{z},\ \tilde{z}' \in p^{\leftarrow}(z_0), \tag{6.13.1}$$

gdje su $\gamma_{1,2} \in \Gamma$ jedinstvene deck transformacije (u definiciji normalnog natkrivanja) takve da vrijedi $\gamma_1(\tilde{z}_0) = \tilde{z}$ i $\gamma_2(\tilde{z}_0) = \tilde{z}'$. Neutralni element grupe $(p^{\leftarrow}(z_0), \star)$ je $\tilde{z}_0$. Jedan izomorfizam grupa $F_{\tilde{z}_0} : \Gamma \to p^{\leftarrow}(z_0)$ dan je formulom:

$$F_{\tilde{z}_0}(\gamma) := \gamma(\tilde{z}_0),\ \gamma \in \Gamma.$$

Naravno, izomorfizam ovisi o izboru z_0 i $\tilde{z}_0$, i ne postoji neki kanonski izbor. Zato smo stavili $\tilde{z}_0$ u donji indeks od F. Radi jednostavnosti često ispuštamo u notaciji tu ovisnost.

Zadatak 6.14. *Dokažite da je u Napomeni 6.13 $(p^{\leftarrow}(z_0), \star)$ doista grupa i da je $F_{\tilde{z}_0} : (\Gamma, \circ) \to (p^{\leftarrow}(z_0), \star)$ izomorfizam grupa (bijekcija + homomorfizam grupa).*

Propozicija 6.15 (Opis grupe deck transformacija univerzalnog natkrivanja)**.** *Neka je S povezan, te lokalno 1-povezan i lokalno povezan putevima. Univerzalno natkrivanje prostora S je normalno, a grupa deck transformacija je izomorfna njegovoj fundamentalnoj grupi*[7] *$\pi_1(S)$ (s operacijom produkta klasa petlji).*

Dokaz. Normalnost. Neka je $\tilde{S}$ univerzalno natkrivanje i neka su $\tilde{z}_1,\ \tilde{z}_2 \in p^{\leftarrow}(z)$, $z \in \mathcal{S}$. Podizanjem klasa puteva iz točke z u prostor natkrivanja[8] u točku $\tilde{z}_1$ dobro je definirano preslikavanje

$$\phi_{\tilde{z}_1}([f]) := \tilde{f}(1),$$

gdje je $\tilde{f}$ jedinstveno podizanje puta f u $\tilde{z}_1$. Zbog 1-povezanosti prostora $\tilde{S}$ je to preslikavanje bijekcija i homeomorfizam (zadatak: pokažite bijektivnost!). Analogno se definira i $\phi_{\tilde{z}_2}$ podizanjem puteva u prostor natkrivanja u $\tilde{z}_2$. Očito, preko klase konstantne petlje $[z]$ u S, vrijedi $\phi_{\tilde{z}_2} \circ \phi_{\tilde{z}_1}^{-1}(\tilde{z}_1) = z_2$, a kompozicija

[6] Γ je grupa deck transformacija za natkrivanje p

[7] Fundamentalna grupa prostora S u točki z_0, u oznaci $\pi_1(S, z_0)$, je skup klasa homotopija petlji iz točke z_0, s operacijom $*$ produkta klasa koja se definira kao klasa produkta (konkatenacije) bilo kojih reprezentanata klasa. Ako je S povezan putevima, tada su fundamentalne grupe u svim točkama $z_0 \in S$ izomorfne, pa pišemo samo $\pi_1(S)$ [10]. Primijetimo da je S putevima povezan jer je povezan i lokalno putevima povezan.

[8] Rezultate o jedinstvenosti podizanja puteva i homotopija puteva u prostor natkrivanja možete naći u [10, Section 53].

$\phi_{\tilde{z}_2} \circ \phi_{\tilde{z}_1}^{-1}$ je automorfizam $\tilde{S}$. Time smo dokazali da postoji deck transformacija koja preslikava točku $\tilde{z}_1$ u $\tilde{z}_2$.

Ostaje još pokazati *jedinstvenost* deck transformacije γ takve da je $\gamma(\tilde{z}_1) = \tilde{z}_2$. Dovoljno je pokazati: ako postoji deck transformacija $\gamma : \tilde{S} \to \tilde{S}$ univerzalnog natkrivanja koja fiksira neku točku $\tilde{z} \in \tilde{S}$ ($\gamma(\tilde{z}) = \tilde{z}$), tada je $\gamma = \mathrm{id}$. No i γ (jer je $\gamma \circ p = p$) i id su neprekidna podizanja $\tilde{p} : \tilde{S} \to \tilde{S}$ natkrivanja $p : \tilde{S} \to S$ takva da je $\tilde{p}(\tilde{z}) = \tilde{z}$. Kako je S lokalno povezan putevima, takav je i $\tilde{S}$ koji je lokalno homeomorfan S. Nadalje je $\tilde{S}$ 1-povezan jer je natkrivanje univerzalno. Stoga po Lemi 6.5 o podizanju slijedi da je podizanje $\tilde{p}$ od p jedinstveno, te je $\gamma = \mathrm{id}$.

Grupa deck transformacija. Neka je $z_0 \in S$ i neka je $\tilde{z}_0 \in p^{\leftarrow}(z_0)$. Definirajmo preslikavanje (engl. *lifting correspondence*):

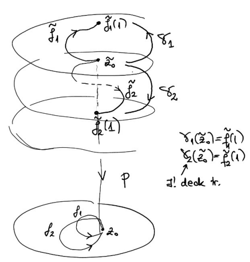
$$g_{\tilde{z}_0} : \pi_1(S, z_0) \to p^{\leftarrow}(z_0), \;\; g_{\tilde{z}_0}([f]) := \tilde{f}(1) \in p^{\leftarrow}(z_0),$$

gdje je $[\tilde{f}]$ klasa homotopije puteva (ne nužno petlji) koja je jedinstveno podizanje[9] klase $[f]$ u točku $\tilde{z}_0 \in \tilde{S}$. Prostor natkrivanja $(\tilde{S}, p)$ je univerzalan, dakle 1-povezan, pa je $g_{\tilde{z}_0}$ bijekcija (rezultati iz [10]).

Provjeri se (zadatak ispod) da je $g_{\tilde{z}_0}$ i homomorfizam grupa $(\pi_1(S, z_0), *)$ i $(p^{\leftarrow}(z_0), \star)$, s operacijom $\star$ definiranom u Napomeni 6.13. No, po Napomeni 6.13 je $F_{\tilde{z}_0}$ izomorfizam grupa $(p^{\leftarrow}(z_0), \star)$ i grupe deck transformacija, pa je njihova kompozicija $g_{\tilde{z}_0}^{-1} \circ F_{\tilde{z}_0}$ jedan traženi izomorfizam. □

Zadatak 6.16. *Dokažite da je $g_{\tilde{z}_0}$ u gornjem dokazu doista izomorfizam grupa $(\pi_1(S, z_0), *)$ i $(p^{\leftarrow}(z_0), \star)$.*

Rješenje:



Neka su $f_1,\, f_2 \in \pi_1(S, z_0)$ te neka je $\tilde{z}_0 \in p^{\leftarrow}(z_0)$. Pokazuje se redom:

$$\begin{aligned} g_{\tilde{z}_0}([f_1] * [f_2]) =& \widetilde{f_1 * f_2}(1) = \left(\tilde{f}_1 * (\gamma_1 \circ \tilde{f}_2)\right)(1) = \\ &= \gamma_1(\gamma_2(\tilde{z}_0)) = \gamma_1(z_0) \star \gamma_2(z_0) = g_{\tilde{z}_0}(f_1) \star g_{\tilde{z}_0}(f_2). \end{aligned}$$

Ovdje je $\widetilde{f_1 * f_2}$ jedinstveno podizanje petlje $f_1 * f_2 \in \pi_1(S, z_0)$ u $\tilde{z}_0$. Nadalje je $\tilde{f}_1$ jedinstveno podizanje petlje f_1 u $\tilde{z}_0$ ($p \circ \tilde{f}_1 = f_1$ te $\tilde{f}_1(0) = \tilde{z}_0$), a $\tilde{f}_2$ jedinstveno podizanje petlje f_2 u $\tilde{z}_0$ ($p \circ \tilde{f}_2 = f_2$ te $\tilde{f}_2(0) = \tilde{z}_0$). No putevi $\tilde{f}_1$ i $\tilde{f}_2$ nisu ulančani

[9] tj. $p \circ \tilde{f} = f$ za bilo koje reprezentante klase puteva, gdje je $\tilde{f}(0) = \tilde{z}_0$.

u gornjem prostoru $\tilde{S}$, pa ih ne možemo množiti. Zato nađimo podizanja tih puteva u gornji prostor koja su ulančana. Neka su $\gamma_{1,2}$ jedinstvene deck transformacije takve da je $\gamma_1(\tilde{z}_0) = \tilde{f}_1(1)$ te $\gamma_2(\tilde{z}_0) = \tilde{f}_2(1)$. Sad je $\gamma_1 \circ \tilde{f}_2$ jedinstveno podizanje puta f_2 u točku $\tilde{f}_1(1)$ (zbog $p \circ \gamma_1 \circ \tilde{f}_2 = p \circ \tilde{f}_2 = f_2$). Putevi $\tilde{f}_1$ i $\gamma_1 \circ \tilde{f}_2$ sad predstavljaju ulančana podizanja puteva f_1 i f_2, te je $p(\tilde{f}_1 * (\gamma_1 \circ \tilde{f}_2)) = f_1 * f_2$. Zato je $\tilde{f}_1 * (\gamma_1 \circ \tilde{f}_2)$ jedinstveno podizanje petlje $f_1 * f_2$ u $\tilde{z}_0$. Krajnja točka tog podizanja je krajnja točka od $\gamma_1 \circ \tilde{f}_2$, tj. $\gamma_1(\tilde{f}_2(1)) = \gamma_1(\gamma_2(\tilde{z}_0))$. $\square$

Primjer 5 (Primjer 4 revisited, opis čitave grupe deck transformacija)**.** Pokazat ćemo da su u Primjeru 2 grupom

$$\Gamma := \{\gamma_k(z) = z + 2k\pi i : \ k \in \mathbb{Z}\}$$

zapravo dane *sve* deck transformacije za univerzalno natkrivanje $(\mathbb{C}, p(z) = e^{-z})$ punktiranog prostora $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Primijetimo, $p^{\leftarrow}(1) = 2\pi i\mathbb{Z}$. Po Propoziciji 6.15 je grupa deck transformacija tog natkrivanja izomorfna Abelovoj grupi

$$(\Gamma, \circ) \simeq \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1) = (\mathbb{Z}, +).$$

Preciznije, odredimo jedan izomorfizam grupa. Uzmemo $z_0 = 1$ i $\tilde{z}_0 = 0 \in p^{\leftarrow}(1)$. Operacija $\star$ definirana u (6.13.1) zapravo je operacija $+$ u grupi $2\pi i\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$. Po Napomeni 6.13 je jedan izomorfizam grupa $F_0 : (\Gamma, \circ) \to (2\pi i\mathbb{Z}, +) \simeq (\mathbb{Z}, +)$ dan s:

$$F_0(\gamma_k) = \gamma_k(0) = 0 + 2\pi ik = 2\pi ik, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Za prostore natkrivanja koji nisu nužno univerzalni (1-povezani) vrijedi općenitija tvrdnja, koju iznosimo bez dokaza, koji je generalizacija dokaza Propozicije 6.15 (v. [10]). Ona opravdava ime *normalno* natkrivanje. Propozicija 6.15 za univerzalna natkrivanja je samo njezin specijalni slučaj:

Propozicija 6.17 (Karakterizacija normalnog natkrivanja, [10])**.** *Neka je $(\tilde{S}, p)$ natkrivanje topološkog prostora S, te $\tilde{S}$ putevima povezan. Podgrupa*

$$N := p_*(\pi_1(\tilde{S})) := \{[p \circ \tilde{f}] : [\tilde{f}] \in \pi_1(\tilde{S})\}$$

je normalna podgrupa[10] *od $\pi_1(S)$ ako i samo ako je p normalno natkrivanje. Dodatno, tada je grupa Γ deck transformacija za to natkrivanje izomorfna* kvocijentnoj grupi

$$\Gamma \simeq {}^{11}\pi_1(S)/N.$$

[10] *Normalna ili invarijantna podgrupa* $(N, \cdot)$ grupe $(G, \cdot)$ je podgrupa takva da je $g \cdot n \cdot g^{-1} \in N$ za sve $n \in N$ i $g \in G$ (tj. invarijantna je na konjugacije u grupi G). Pišemo često i: $G^{-1} \cdot N \cdot G \subseteq G$. Najmanja normalna podgrupa sadrži samo neutralni element grupe.

[11] Za grupu $(G, \cdot)$ i normalnu podgrupu $(N, \cdot)$ definiramo relaciju ekvivalencije $\sim_N$ na G:

$$g_1, \, g_2 \in G, \ g_1 \sim_N g_2,$$

ako postoji $n \in N$ takav da je $g_2 = g_1 \cdot n$. Skup klasa ekvivalencije označavamo s G/N i zovemo *kvocijentnom grupom* od G. Klase ekvivalencije su lijevi (ili desni, jer su za normalne podgrupe oni jednaki, $g \cdot N = N \cdot g$) *ko-skupovi* grupe N u G:

$$g \cdot N = \{g \cdot n : n \in N\}, \ g \in G.$$

Grupovna operacija $\cdot$ se nasljeđuje na kvocijentnu grupu preko reprezentanata, $[g_1] \cdot [g_2] := [g_1 \cdot g_2]$ (provjerite neovisnost tako naslijeđene operacije o reprezentantima klase).

6.17.1 Generalni uniformizacijski teorem za Riemannove plohe

Neka je $(\tilde{S}, p)$ prostor natkrivanja od S i neka je Γ grupa deck transformacija tog natkrivanja. Definiramo na $\tilde{S}$ relaciju ekvivalencije $\sim_\Gamma$ s:

$$\tilde{z}_1,\, \tilde{z}_2 \in \tilde{S},\;\; \tilde{z}_1 \sim_\Gamma \tilde{z}_2,\;\; \text{ako postoji } \gamma \in \Gamma \text{ t.d. } \tilde{z}_2 = \gamma(\tilde{z}_1).$$

Zatim definiramo *kvocijentni topološki prostor* od $\tilde{S}$ (s kvocijentnom topologijom)

$$\tilde{S}\,/_\Gamma,$$

kao skup klasa ekvivalencije obzirom na relaciju $\sim_\Gamma$.

Napomena 6.18. Primijetimo da su za normalna natkrivanja klase ekvivalencije zapravo *vlakna natkrivajućeg preslikavanja p*,

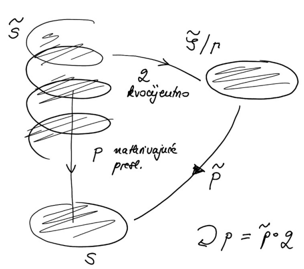
$$[\tilde{z}] = p^{\leftarrow}(p(\tilde{z})),$$

po definiciji normalnih preslikavanja.

Zbog toga slijedi:

Propozicija 6.19. *Neka je $p : \tilde{S} \to S$ normalno natkrivanje prostora S, te Γ grupa deck transformacija za to natkrivanje. Tada je podizanje $\tilde{p} : \tilde{S}\,/_\Gamma \to S$ preslikavanja p, dobro definirano s $\tilde{p}([\tilde{z}]) := p(\tilde{z})$,* homeomorfizam *prostora*

$$\tilde{S}\,/_\Gamma \quad i \quad S.$$



Slika 6.19.1: Komutativni dijagram uz Propoziciju 6.19.

Skica dokaza. Sa $q : \tilde{S} \to \tilde{S}\,/_\Gamma$ označimo *kvocijentno preslikavanje*[12],

$$q(\tilde{z}) := [\tilde{z}].$$

[12] Prisjetimo se: u kvocijentnoj topologiji na $\tilde{S}/_\Gamma$ je kvocijentno preslikavanje neprekidno. Naime, skup smatramo otvorenim u kvocijentnoj topologiji kvocijentnog prostora ako i samo ako mu je praslika po kvocijentnom preslikavanju otvoren skup u originalnom prostoru. Stoga je jasno da je kvocijentno preslikavanje koje je bijekcija, zbog otvorenosti, homeomorfizam (vrijedi i lokalno).

Za neprekidnu surjekciju $p : \tilde{S} \to S$ i kvocijentno preslikavanje $q : \tilde{S} \to \tilde{S}/_{\Gamma}$ čija vlakna se po Napomeni 6.18 podudaraju s vlaknima od p je podizanje $\tilde{p}$ t.d. $p = \tilde{p} \circ q$ dobro definirano i bijekcija (eventualna ne-injektivnost od p se pokrpa kvocijentiranjem). Zato je dovoljno pokazati da je $\tilde{p}$ lokalni homeomorfizam. Naime, p je lokalni homeomorfizam jer je natkrivajuće preslikavanje, a q je kvocijentno i lokalna injekcija, pa je lokalni homeomorfizam (vidi fusnotu 12.) Lokalna injektivnost q slijedi jer je natkrivanje normalno, zbog čega su klase ekvivalencije vlakna od p, a oko svake točke prostora natkrivanja $\tilde{S}$ postoji otvorena okolina V_α koja ne sadrži dvije različite točke istog vlakna – na njoj je $p|_{V_\alpha}$ bijekcija. Zaključimo, lokalno vrijedi $\tilde{p} = p \circ q^{-1}$, gdje su i p i q^{-1} lokalni homeomorfizmi, pa lokalna homeomorfnost $\tilde{p}$ slijedi. □

Napomena 6.20. Ako je $\mathcal{S}$ Riemannova ploha, diferencijabilna struktura se lokalno (na prirodan način) prenosi s plohe normalnog natkrivanja $\tilde{\mathcal{S}}$ na kvocijentni prostor $\tilde{\mathcal{S}}/_{\Gamma}$, koji tako postaje Riemannova ploha. Zbog Napomene 6.18, karta oko svake klase $[\tilde{z}]$ se lokalno 'podudara' (preko lokalnog homeomorfizma q) s kartom oko bilo kojeg $\tilde{z} \in \tilde{\mathcal{S}}$ (koja čitava leži u nekom sloju). Homeomorfizam $\tilde{p} : \tilde{\mathcal{S}}\Big/_{\Gamma} \to \mathcal{S}$ tada postaje *biholomorfizam Riemannovih ploha.*

Time smo dokazali:

Teorem 6.21 (Uniformizacijski teorem za Riemannove plohe, [8])**.** *Neka je $\mathcal{S}$ Riemannova ploha, $(\tilde{\mathcal{S}}, p)$ njezino univerzalno natkrivanje te Γ grupa deck transformacija za to natkrivanje. Tada je $\mathcal{S}$ biholomorfna (konformalno ekvivalentna) kvocijentnoj plohi*

$$\tilde{\mathcal{S}}/_{\Gamma}.$$

Ako je $\mathcal{S}$ već sama 1-povezana, tada je sama svoje univerzalno natkrivanje s identičkim natkrivajućim preslikavanjem, pa je $\Gamma = \{\mathrm{id}\}$ i Teorem 6.21 nam ne daje ništa novo. Sjetimo se da u tom slučaju koristimo Uniformizacijski teorem 3.13 koji biholomorfno klasificira 1-povezane plohe kao $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{C}}$ ili $\mathbb{D}$.

U slučaju da $\mathcal{S}$ nije 1-povezana, njezino univerzalno natkrivanje $\tilde{\mathcal{S}}$ u Teoremu 6.21 je 1-povezano, te je po Uniformizacijskom teoremu 3.13 biholomorfno ili $\mathbb{C}$, ili $\overline{\mathbb{C}}$ ili $\mathbb{D}$. Analiza grupe deck transformacija univerzalnog natkrivanja i Teorem 6.21 nas vode do sljedećeg teorema:

Teorem 6.22 (Biholomorfna klasifikacija općenitih Riemannovih ploha, [8])**.** *Svaka Riemannova ploha je točno jednog od sljedećih tipova:*

- sferna ploha ⇔ *univerzalno natkrivanje je*[13] $\overline{\mathbb{C}}$. *Biholomorfna je*
  - sferi $\overline{\mathbb{C}}$

  (*kompaktna ploha*)
- Euklidska ploha ⇔ *univerzalno natkrivanje je* $\mathbb{C}$. *Biholomorfna je:*

[13]naravno, do na biholomorfizam

  – *ili* ravnini $\mathbb{C}$ (*nekompaktna ploha*),
  – *ili* cilindru $\mathbb{C}/_{\mathbb{Z}}$ (*tj.* punktiranoj ravnini[14] $\mathbb{C} \setminus \{0\}$) (*nekompaktna ploha*),
  – *ili* torusu $\mathbb{C}/_{\mathbb{Z}\oplus i\mathbb{Z}}$ (*kompaktna ploha*);

- hiperbolička ploha $\Leftrightarrow$ *univerzalno natkrivanje je* $\mathbb{D}$ (*može biti i kompaktna i nekompaktna*).

Po Teoremu 6.21, da bismo opisali biholomorfnu klasu plohe, trebamo odrediti grupu deck transformacija natkrivajućih ploha $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathbb{D}$. Znamo da vrijedi:

$$\Gamma \leq \mathrm{Aut}(\mathbb{C},\ \overline{\mathbb{C}},\ \mathbb{D}),$$

a grupe automorfizama smo opisali u Poglavlju 5. Međutim, grupa deck transformacija Γ je samo podgrupa grupe automorfizama, koju moramo pobliže odrediti. Zato nam u dokazu Teorema 6.22 trebaju sljedeće tri leme koje navodimo prije dokaza teorema.

Lema 6.23 ([8])**.** *Neka je $\tilde{S}$ neki topološki prostor, te Γ podgrupa grupe homeomorfizama tog prostora. Tada postoji topološki prostor S i normalno natkrivanje $p : \tilde{S} \to S$ kojem je Γ grupa deck transformacija ako i samo ako:*

(1) *svaki kompaktan skup $K \subseteq \tilde{S}$ siječe samo konačno mnogo svojih γ-translata $\{\gamma(K) :\ \gamma \in \Gamma\}$;*

(2) *grupa Γ djeluje* slobodno*: za svaki $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq \mathrm{id}$, je $\mathrm{Fix}(\gamma) = \emptyset$.*

Po Propoziciji 6.19 je tada prostor $\tilde{S}/_{\Gamma}$ homeomorfan S (biholomorfan za plohe).

Svojstvo (1) je teže za provjeriti, pa nam je korisno znati da je, uz relativno blage pretpostavke na topološki prostor i podgrupu homeomorfizama, dovoljno provjeriti svojstvo (2):

Lema 6.24 ([10])**.** *Neka je $\tilde{S}$* Hausdorffov *topološki prostor i Γ* konačna[15] *podgrupa grupe homeomorfizama tog prostora. Tada svojstvo* (2) (*iz Leme 6.23*) *povlači svojstvo* (1).

Dokaze ove dvije leme preskačemo i mogu se naći u npr. [10, Chapter 12].

Lema 6.25 ([8])**.** *Neka je $\tilde{\mathcal{S}}$* 1*-povezana Riemannova ploha, te $\Gamma \leq \mathrm{Aut}(\tilde{\mathcal{S}})$ podgrupa koja zadovoljava svojstvo* (1) *Leme 6.23. Tada je Γ* diskretna[16] *podgrupa* $\mathrm{Aut}(\tilde{\mathcal{S}})$[17]*, a time i diskretna podgrupa Liejeve grupe $PSL(\mathbb{C}, 2)$.*

[14] v. Primjer 1 za biholomorfizam cilindra i punktirane ravnine.

[15] Za grupu kažemo da je *konačna* ako ima konačan sustav generatora (tj. svaki element grupe može se prikazati grupovnom operacijom nad tih konačno mnogo generatora).

[16] Podgrupa topološke (time i Liejeve) grupe je *diskretna* ako je diskretan potprostor grupe u topološkom smislu: ako postoji otvorena okolina svakog njezinog elementa u topologiji te grupe u kojoj se ne nalazi niti jedan drugi element podgrupe. Dovoljno je zbog svojstava grupe i usklađenosti grupovnih operacija s topološkom strukturom topološke grupe provjeriti samo za neutralni element!

[17] Sjetimo se da je $\mathrm{Aut}(\tilde{\mathcal{S}}) \leq \mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}}) \sim PSL(\mathbb{C}, 2)$, v. Poglavlje 5 i Napomenu 5.3, jer je $\tilde{\mathcal{S}}$ 1-povezana i time biholomorfna ili sferi, ili ravnini, ili disku.

Dokaz Leme 6.25. Kako se za sve $\tilde{\mathcal{S}}$ 1-povezane radi o podgrupi automorfizama $\Gamma \leq \mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}}) \sim PSL(\mathbb{C}, 2)$, dovoljno je provjeriti (vidi Zadatak 6.26 ispod) da postoji okolina identičke matrice $I \in PSL(\mathbb{C}, 2)$ u kojoj se, u euklidskoj topologiji $M_2(\mathbb{C}) \equiv \mathbb{C}^4$, ne nalazi niti jedan drugi element podgrupe Γ.

Pretpostavimo suprotno, da podgrupa Γ automorfizama zadovoljava svojstvo (1), no da se u svakoj okolini identičke matrice (neutralnog elementa) $I \in \Gamma$ nalazi barem još jedan element podgrupe Γ, različit od I. Kako je Γ metrizabilan prostor (kao potprostor $PSL(\mathbb{C}, 2) \subseteq \mathbb{C}^4$), možemo konstruirati niz međusobno različitih elemenata $\gamma_n \in \Gamma,\ n \in \mathbb{N}$, takav da $\gamma_n \to I$, kad $n \to \infty$, u Euklidskoj topologiji $\mathbb{C}^4$, tj. *po elementima* u $M_2(\mathbb{C}) \equiv \mathbb{C}^4$.
Primijetimo da tada $\gamma_n(z) \to z,\ n \to \infty$, u topologiji plohe $\tilde{\mathcal{S}}$, za svaki $z \in \tilde{\mathcal{S}}$. Naime, dovoljno je provjeriti (gledajući po kartama) da vrijedi: $\begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ u $\mathbb{C}^4$, tj. $a_n,\ d_n \to 1$ i $b_n, c_n \to 0,\ n \to \infty$, povlači da $\gamma_n(z) = \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n} \to z,\ n \to \infty$, u $\mathbb{C}$, za svaki $z \in \mathbb{C}$.

Uzmemo neki kompaktan skup $K \subseteq \tilde{\mathcal{S}}$ nepraznog interiora (jasno da postoji jer je $\tilde{\mathcal{S}}$ ploha, lokalno homeomorfna disku u $\mathbb{C}$). Možemo npr. uzeti K koji je kompletno sadržan u jednoj karti, pa sve radimo u $\mathbb{C}$. Tada, po gornjoj diskusiji, za $z_0 \in \mathrm{Int}(K)$ vrijedi $\gamma_n(z_0) \to z_0,\ n \to \infty$. Sad postoji otvorena okolina U oko z_0, $U \subseteq \mathrm{Int}(K)$, takva da je $\gamma_n(z_0) \in U \subseteq K$, za sve $n \geq n_0$. Kako je $z_0 \in K$, slijedi da je $\gamma_n(K) \cap K \neq \emptyset$, za $n \geq n_0$. Zbog međusobne različitosti elemenata γ_n, to je kontradikcija s (1). □

Zadatak 6.26. *Neka je $(G, \cdot)$ topološka grupa, te H neka njezina podgrupa. Tada je H diskretna podgrupa ako i samo ako je bilo koji (jedan) njezin element izoliran*[18].

Rješenje. Treba pokazati ga je svaki element H izoliran u topologiji prostora G ako i samo ako je jedan (bilo koji) element $h_0 \in H$ izoliran. Jedan smjer je očit.

Primijetimo da u topološkoj grupi $(G, \cdot)$ vrijedi da za svaka dva elementa $f,\ g \in G$ postoji homeomorfizam $\phi_{f,g} : G \to G$ takav da je $\Phi(f) = g$. Naime, uzmemo inducirani homeomorfizam $\phi_{f,g}(h) := (g \cdot f^{-1}) \cdot h,\ h \in G$. Bijektivnost je očita, a neprekidnost u oba smjera slijedi jer je grupovna operacija $\cdot : G \times G \to G$ u topološkoj grupi neprekidna.

Pretpostavimo sad suprotno, tj. da je $h_0 \in H$ izoliran, a neki drugi $h \in H,\ h \neq h_0$, nije izoliran. Homeomorfizam $\Phi_{h,h_0} : G \to G$ preslikava bijektivno otv. okoline (u G) od h u otv. okoline (u G) od h_0. No, zbog $h_0,\ h \in H$, je i restrikcija $\Phi_{h,h_0}|_H : H \to H$ homeomorfizam H (provjerite zašto je slika H). Sad zbog izoliranosti h_0 postoji okolina $h_0 \in U$ otvorena u H koja sadrži samo jedan element iz H, a to je h_0. Tad okolina $h \in \Phi_{h,h_0}|_H(U)$, otvorena u H zbog homeomorfnosti, sadrži samo jedan element iz H, tj. h (jer je bijektivna slika U koji je 1-član). Kontradikcija s neizoliranošću h. □

Dokaz Teorema 6.22. Neka je $\mathcal{S}$ Riemannova ploha. Tada po Napomeni 6.9 postoji njezino univerzalno natkrivanje $(\tilde{\mathcal{S}}, p)$. Zbog 1-povezanosti je $\tilde{\mathcal{S}}$ po Teoremu 3.13 biholomorfna sferi, ravnini ili disku. Razlikujemo zato 3 slučaja:

[18] Stoga je izoliranost dovoljno provjeravati samo za neutralni element id $\in H$.

1. $\tilde{\mathcal{S}} \simeq \overline{\mathbb{C}}$ (tzv. *sferne plohe*)

   Odredimo što sve može biti ploha $\mathcal{S}$ u tom slučaju (do na biholomorfizam). Po Teoremu 6.21 je ploha $\mathcal{S}$ biholomorfna $\overline{\mathbb{C}}\,/_{\Gamma}$, gdje je $\Gamma \leq \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ grupa deck transformacija univerzalnog natkrivanja $(\overline{\mathbb{C}}, p)$. No, po Lemi 6.23, grupa $\Gamma \leq \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ je grupa deck transformacija univerzalnog natkrivanja ako i samo ako zadovoljava svojstva (1) i (2) leme. Stoga kao *kandidate* za grupu deck transformacija odredimo sve podgrupe grupe Möbiusovih transformacija $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ koje su *slobodne*, tj. niti jedan njihov element osim identitete nema fiksnih točaka. No, po Teoremu 5.17, svaki konformalni automorfizam sfere osim identitete ima barem jednu fiksnu točku, pa je jedini kandidat trivijalna grupa deck transformacija:

   $$\Gamma = \{\mathrm{id}\}.$$

   Ta grupa je konačno generirana s id, te je, po Lemi 6.24, za nju zadovoljeno i svojstvo (1). Stoga je, po Lemi 6.23,

   $$\mathcal{S} \simeq \overline{\mathbb{C}}\,/\{\mathrm{id}\} = \overline{\mathbb{C}}.$$

   Zaključujemo da su sve Riemannove plohe s univerzalnim natkrivanjem $\overline{\mathbb{C}}$ (tzv. *sferne plohe*) biholomorfne sferi $\overline{\mathbb{C}}$.

2. $\tilde{\mathcal{S}} \simeq \mathbb{C}$ (tzv. *Euklidske plohe*)

   Odredimo što sve može biti ploha $\mathcal{S}$, kao i gore. Kao kandidate za grupu deck transformacija tražimo podgrupu $\Gamma \subseteq \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ koja djeluje *slobodno.*

   Po Teoremu 5.8 je $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{f(z) = \lambda z + c,\ \lambda, c \in \mathbb{C},\ \lambda \neq 0\}$. Po Teoremu 5.16, translacije $z + c,\ c \neq 0$, su jedini automorfizmi diska koji nemaju fiksnih točaka. Stoga su kandidati podgrupe grupe translacija,

   $$\Gamma \leq \{z + c : \ c \in \mathbb{C}\} \sim (\mathbb{C}, +).$$

   Grupa translacija je kao podgrupa $PSL(2, \mathbb{C})$ izomorfna topološkoj aditivnoj grupi $(\mathbb{C}, +)$ na očit način. Nadalje, po Lemi 6.25, kandidat za grupu deck transformacija mora biti *diskretna* podgrupa $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) \leq PSL(2, \mathbb{C})$. To znači da kao kandidate uzimamo diskretnu aditivnu podgrupu od $(\mathbb{C}, +)$, tj. $c \in \mathbb{C}$ biramo iz diskretnog skupa. Zato imamo 3 moguća kandidata (vidjeti Zadatak 6.27 ispod):

   (a) $\Gamma = \{\mathrm{id}\}$. Tada je, po Lemi 6.23,

   $$\mathcal{S} \simeq \mathbb{C}\,/_{\{\mathrm{id}\}} = \mathbb{C}.$$

   (b) $\Gamma = \mathbb{Z}$ (1 generator). Po Lemi 6.24, grupa je konačno generirana pa (2) povlači (1), te je, po Lemi 6.23, to 'legitimna' grupa deck transformacija:

   $$\Gamma = \{z + c : \ c \in \mathbb{Z}\} \sim (\mathbb{Z}, +).$$

Tada je

$$\mathcal{S} \simeq \mathbb{C} /_{\mathbb{Z}},$$

tj. ploha $\mathcal{S}$ je biholomorfna cilindru ili punktiranoj ravnini, v. Primjer 1.

(c) $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}$ (2 generatora). Po Lemi 6.24, grupa je konačno generirana pa (2) povlači (1), te je, po Lemi 6.23, to 'legitimna' grupa deck transformacija:

$$\Gamma = \{z + c + i\,d : \ c,\ d \in \mathbb{Z}\} \sim (\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}, +).$$

Tada je

$$\mathcal{S} \simeq \mathbb{C} /_{\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}} = \mathbb{T},$$

tj. ploha $\mathcal{S}$ je biholomorfna torusu, v. Primjer 1.

Zaključimo, Riemannova ploha kojoj je univerzalno natkrivanje biholomorfno ravnini $\mathbb{C}$ (tzv. *Euklidska ploha*) je biholomorfna ili ravnini $\mathbb{C}$, ili torusu $\mathbb{T}$, ili valjku (punktiranoj ravnini $\mathbb{C} \setminus \{0\}$). Sjetimo se: topologija na tim plohama je kvocijentna nastala od euklidske, dakle, lokalno euklidska po kartama.

3. $\tilde{\mathcal{S}} \simeq \mathbb{D}$ (tzv. *hiperboličke plohe*)

Sve ostale Riemannove plohe, dakle, one koje nisu biholomorfne niti sferi, niti ravnini, niti valjku, niti torusu, spadaju u hiperboličke plohe.

□

Zadatak 6.27. *Diskretna podgrupa topološke (Euklidske) grupe* $(\mathbb{C}, +)$ *je ili trivijalna, ili ima jedan generator i izomorfna je Abelovoj grupi* $(\mathbb{Z}, +)$*, ili ima dva generatora i izomorfna je Abelovoj grupi* $(\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}, +)$*, tj.* $(\mathbb{Z}^2, +)$*.*

Rješenje. Broj generatora diskretne podgrupe grupe $(\mathbb{C}, +)$ ne može biti veći od 2. Naime, među generatorima diskretne podgrupe ne smiju se naći dva kompleksna broja koji su *linearno zavisni nad* $\mathbb{R}$. No, među tri ili više ne-nul kompleksnih brojeva su uvijek barem 2 linearno zavisna nad $\mathbb{R}$.

Pretpostavimo da se dva kompleksna broja a, $b \in \mathbb{C}$ nalaze među generatorima diskretne podgrupe Γ od $(\mathbb{C}, +)$, te da postoji $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takav da je $b = \alpha a$ (linearno su zavisni nad $\mathbb{R}$). No tada je $\frac{b}{a} \in \mathbb{R}$, te ga možemo po volji dobro aproksimirati racionalnim brojevima. Stoga, postoji niz $\frac{m_k}{n_k}$, m_k, $n_k \in \mathbb{Z}$, takav da $\frac{m_k}{n_k} \to \alpha = \frac{b}{a}$, $k \to \infty$. Sad vrijedi $m_k a - n_k b \to 0$, $k \to \infty$. No kako su a, b generatori grupe Γ i m_k i n_k cijeli brojevi, slijedi da je $m_k a - n_k b \in \Gamma$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Dakle, niz elemenata grupe Γ se gomila na neutralni element $0 \in \Gamma$ (u euklidskoj topologiji $\mathbb{C}$). Stoga Γ nije diskretna, što je kontradikcija.

Dakle, jedine mogućnosti za diskretnu podgrupu su: trivijalna grupa $\Gamma := \{0\}$, grupa generirana jednim kompleksnim brojem $\Gamma := c\mathbb{Z} \sim \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, te grupa generirana s 2 kompleksna broja $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ koji su linearno nezavisni nad $\mathbb{R}$, $\Gamma := a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \sim \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$. □

Napomena 6.28. *Hiperboličkih Riemannovih ploha ima 'najviše'!*

- Po Teoremu 6.22, Riemannova ploha koja nije biholomorfna niti Riemannovoj sferi, niti kompleksnoj ravnini, niti valjku, niti torusu (u njihovim kvocijentnim topologijama) je *hiperbolička*, tj. prostor univerzalnog natkrivanja joj je disk.

- Dakle, *Riemannove plohe genusa* ≥ 2 (npr. *torus s dvije ili više rupa*), te, generalnije, *plohe s neabelovom fundamentalnom grupom* (npr. osmica ili ravnina bez dvije točke) su hiperboličke.

  Naime, takve plohe nisu homeomorfne (time niti biholomorfne) niti sferi, niti $\mathbb{C}$, niti punktiranoj ravnini $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, niti torusu. Homeomorfni prostori imaju izomorfne fundamentalne grupe, a fundamentalne grupe svih navedenih prostora su Abelove. Fundamentalna grupa sfere ili ravnine je trivijalna (1-povezane), a fundamentalna grupa valjka $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ili torusa $\mathbb{T}$ je Abelova ($\mathbb{Z}$ resp. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$). Rezultati o fundamentalnim grupama mogu se naći u npr. [10].

6.28.1 Posljedice biholomorfne klasifikacije Riemannovih ploha

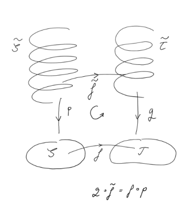
Propozicija 6.29 (Rigidnost holomorfnih preslikavanja R-ploha, [8])**.**

1. *Svako holomorfno preslikavanje euklidske Riemannove plohe u hiperboličku Riemannovu plohu je konstantno.*
2. *Svako holomorfno preslikavanje sferne Riemannove plohe (tj. Riemannove sfere) u hiperboličku ili euklidsku Riemannovu plohu je konstantno.*

Napomena 6.30. Primijetimo da su npr. inkluzije $\iota: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ te $\iota: \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{C}}$ nekonstantna holomorfna preslikavanja hiperboličke plohe u euklidsku ili sfernu, te da je inkluzija : $\mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ nekonstantno holomorfno preslikavanje euklidske plohe u sfernu. Propozicija dokazuje da u obratnim smjerovima ne postoje nekonstantna holomorfna preslikavanja.

Dokaz. Neka je $f : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ holomorfno preslikavanje Riemannovih ploha. Neka su $(\tilde{\mathcal{S}}, p)$ i $(\tilde{\mathcal{T}}, q)$ univerzalna natkrivanja tih ploha. Pokažimo prvo da preslikavanje f možemo podići do dobro definiranog preslikavanja natkrivajućih ploha, $\tilde{f} : \tilde{\mathcal{S}} \to \tilde{\mathcal{T}}$, takvog da vrijedi komutativni dijagram:

$$f \circ p = q \circ \tilde{f}.$$



Kako je p lokalni biholomorfizam, preslikavanje $f : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ prvo možemo podići do dobro definiranog holomorfnog preslikavanja $f' : \tilde{\mathcal{S}} \to \mathcal{T}$ takvog da vrijedi:

$$f' = f \circ p.$$

Sad se pitanje svodi na pitanje možemo li holomorfno preslikavanje $f' : \tilde{\mathcal{S}} \to \mathcal{T}$ podići u kodomeni do holomorfnog preslikavanja $\tilde{f} : \tilde{\mathcal{S}} \to \tilde{\mathcal{T}}$ takvog da vrijedi:

$$q \circ \tilde{f} = f'.$$

Egzistencija takvog neprekidnog podizanja $\tilde{f} : \tilde{\mathcal{S}} \to \tilde{\mathcal{T}}$ je, zbog 1-povezanosti prostora univerzalnog natkrivanja $\tilde{\mathcal{S}}$, dana Lemom 6.5.

Na kraju, holomorfnost funkcije $\tilde{f}$ slijedi radi lokalne biholomorfnosti natkrivajućih preslikavanja p i q, pa, lokalno oko svake točke $\tilde{z} \in \tilde{\mathcal{S}}$ imamo:

$$\tilde{f}|_{U_\alpha} := q|_{V_\beta}^{-1} \circ f \circ p|_{U_\alpha}.$$

Kako je f holomorfno, slijedi da je i $\tilde{f}$ holomorfno u svakoj točki $\tilde{z}$.

(1.1) Neka je sad $\mathcal{S}$ Euklidska, a $\mathcal{T}$ hiperbolička. Tada je podizanje

$$\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$$

holomorfno na $\mathbb{C}$, tj. *cijelo*. Kako je kodomena disk, ono je i omeđeno, pa je, po *Liouvilleovom* teoremu, konstantno.

(2.1) Neka je $\mathcal{S}$ sferna, a $\mathcal{T}$ hiperbolička. Tada je podizanje $\tilde{f} : \overline{\mathbb{C}} \to \mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$ holomorfno, pa je i restrikcija $\tilde{f}|_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ holomorfno preslikavanje. Po Liouvilleovom teoremu je $\tilde{f}|_{\mathbb{C}}$ konstantno, pa je, zbog neprekidnosti $\tilde{f}$, $\tilde{f}$ konstantno na $\overline{\mathbb{C}}$.

(2.2) Neka je $\mathcal{S}$ sferna, a $\mathcal{T}$ Euklidska. Podizanje $\tilde{f} : \overline{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ je holomorfno. Kako je $\overline{\mathbb{C}}$ kompaktan prostor, a $\tilde{f}$ neprekidna, slika $\tilde{f}(\overline{\mathbb{C}}) \subseteq \mathbb{C}$ je kompaktna u $\mathbb{C}$, a time i omeđena. Po Liouvilleovom teoremu, kao gore, slijedi da je $\tilde{f}$ konstantno. □

Propozicija 6.31 (Sfera s 3 rupe, [8]). *Ako Riemannovoj sferi $\overline{\mathbb{C}}$ uklonimo barem 3 (ili više*[19]*) različitih točaka, Riemannova ploha postaje hiperbolička.*

Zadatak: Koje plohe dobijemo uklanjanjem 1 ili 2 točke Riemannovoj sferi?

Dokaz. Neka su $p, q \in \mathbb{C}$ fiksirane, t.d. $p \neq q$. Sfera $\overline{\mathbb{C}}$ bez 3 različite točke je biholomorfna plohi $\mathcal{S} := \mathbb{C} \backslash \{p, q\}$. Fundamentalna grupa prostora $\mathcal{S}$ je slobodna (neabelova) grupa s 2 generatora, jer je osmica deformacijski retrakt od $\mathbb{C} \backslash \{p, q\}$, pa su im fundamentalne grupe izomofne. Zbog toga $\mathcal{S}$ nije homeomorfna niti sferi, niti torusu, niti cilindru, niti ravnini (jer svi imaju Abelove fundamentalne grupe). Stoga je, po Teoremu 6.22, $\mathcal{S}$ hiperbolička ploha.

Nadalje, ako uklonimo dodatne točke, ne narušavajući pritom strukturu plohe, fundamentalna grupa prostora se može samo 'povećati', pa ostaje neabelova. Stoga ploha ostaje hiperbolička (sferne i euklidske plohe imaju Abelove fundamentalne grupe). □

[19] Pazeći da pritom ostane Riemannova ploha!

Korolar 6.32. *Uklanjanjem najviše* 3 *točke, svaka Riemannova ploha postaje hiperbolička.*

Dokaz. Ako je ploha hiperbolička, nije potrebno uklanjati točke. Ako je sferna, po Propoziciji 6.31 postaje hiperbolička uklanjanjem 3 točke. Ostaje provjeriti euklidske plohe. Ako je ploha ravnina $\mathbb{C}$, po gornjem dokazu je $\mathbb{C} \setminus \{p, q\}$, $p \neq q$, hiperbolička. Ako je ploha cilindar, tj. $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ostaje ukloniti još jednu točku i ploha postaje hiperbolička. Konačno, ako je ploha torus, univerzalno natkrivanje mu je $\mathbb{C}$. Natkrivanje torusa s uklonjenom jednom točkom, $\mathbb{T} \setminus \{p\}$, je stoga $\mathbb{C}$ bez beskonačno mnogo točaka, a to je hiperbolička ploha. Njezino univerzalno natkrivanje je disk. Dakle, komponiranjem natkrivanja i zbog jedinstvenosti univerzalnog natkrivanja, zaključujemo da je univerzalno natkrivanje punktiranog torusa $\mathbb{T} \setminus \{p\}$ disk, pa je hiperbolička ploha. $\square$

Propozicija 6.33 (Picardov teoorem, [8])**.** *Svaka cijela funkcija* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *kojoj slika ne pogađa neke dvije točke* (*ili nekih više točaka*) *je nužno konstantna.*

Dokaz. Funkcija f je holomorfno preslikavanje euklidske R-plohe $\mathbb{C}$ u hiperboličku ($\mathbb{C}$ s barem dvije uklonjene točke), pa je, po Propoziciji 6.29, konstantno. $\square$

Poglavlje 7

Standardne metrike konstantne zakrivljenosti na Riemannovim plohama

Kako bismo mogli analizirati dugoročno ponašanje iteracija holomorfnih funkcija Riemannovih ploha, $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, potreban nam je pojam *blizine točaka*. Za to nam nije dovoljna samo topologija na holomorfnoj plohi, pa ćemo pokazati da je topologija *metrizabilna*: postoji funkcija metrike $d : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}_+$ koja generira tu topologiju i koja je "usklađena" s glatkom strukturom plohe – tzv. *Riemannova metrika*. Međutim, izbor Riemannove strukture i metrike na plohi nije jedinstven, pa ćemo ovdje navesti standardno korištene Riemannove metrike na pojedinim tipovima ploha (sfernim, euklidskim, hiperboličkim) sa dodatnim povoljnim svojstvima – tzv. *sfernu, euklidsku, odn. Poincaréovu metriku.* One imaju neka dodatna dobra svojstva zbog kojih ih preferiramo: npr. *simetričnost (konformalnost)*, *konformalna invarijantnost* (konformalni automorfizmi plohe $\mathcal{S}$ *izometrije* obzirom na metriku d), *konstantnu zakrivljenost*, *potpunost* itd.

Sadržaj ovog poglavlja detaljnije se može naći u npr. [7].

7.1 Riemannova metrika na holomorfnoj plohi

Riemannova struktura na holomorfnoj plohi $\mathcal{S}$ odnosi se na zadavanje skalarnog produkta na tangencijalnim prostorima $T_p\mathcal{S}$ koji se 'glatko' mijenja po točkama $p \in \mathcal{S}$, te nam dopušta definiciju udaljenosti točaka (metrike na plohi $\mathcal{S}$) i kuta među krivuljama na plohi $\mathcal{S}$.

Definicija 7.2 (Tangencijalni prostor)**.** *Neka je $\mathcal{S}$ holomorfna ploha*[1]. Tangencijalni prostor u točki $p \in \mathcal{S}$*, u oznaci $T_p\mathcal{S}$, definira se kao tangencijalni prostor*

[1] ispunjeni su zahtjevi (1)-(3) iz Definicije 3.1

plohe $\mathcal{S}$ kao 2-dimenzionalne realne mnogostrukosti – kao skup svih derivacija[2] *u točki p na realnoj algebri $C^\infty(\mathcal{S},p)$ glatkih realnih klica $f:(\mathcal{S},p)$*[3]$\to \mathbb{R}$.

Napomena 7.3.

- $T_p\mathcal{S}$ je realni vektorski prostor, za svaki $p\in\mathcal{S}$.
- Odaberemo proizvoljnu kartu $\varphi:(\mathcal{S},p)\to(\mathbb{D},0)\equiv(\mathbb{R}^2,0)$ oko točke p. Za derivaciju $D\in T_p\mathcal{S}$, očito *push-forward*[4] $\varphi_*D(g)=D(g\circ\varphi)$ daje derivaciju u točki 0 na realnoj algebri $C^\infty(\mathbb{R}^2,0)$ glatkih klica $f:(\mathbb{R}^2,0)\to\mathbb{R}$. Skup svih takvih derivacija u 0 je 2-dimenzionalni realni vektorski prostor generiran[5] parcijalnim derivacijama $\frac{\partial}{\partial x}|_{(0,0)}$ i $\frac{\partial}{\partial y}|_{(0,0)}$, pa je (zbog invertibilnosti karte φ) $T_p\mathcal{S}$ 2-dimenzionalni realni vektorski prostor generiran derivacijama $\varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x}|_{(0,0)})$ i $\varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial y}|_{(0,0)})$.
- Tangencijalni prostor $T_p\mathcal{S}$ možemo ekvivalentno definirati i kao *klasu ekvivalencija diferencijabilnih krivulja kroz $p\in\mathcal{S}$*. Neka je $\gamma:(-1,1)\to(\mathcal{S},p)$ krivulja t.d. je $\gamma(0)=p$ i $\varphi\circ\gamma:(-1,1)\to(\mathbb{R}^2,0)$ diferencijabilna, za proizvoljnu (bilo koju $\leftrightarrow$ svaku) kartu φ oko p. Definiramo relaciju ekvivalencije na prostoru takvih diferencijabilnih krivulja kroz p: $\gamma_1\sim\gamma_2$ ako je $(\varphi\circ\gamma_1)'(0)=(\varphi\circ\gamma_2)'(0)$, za bilo koji izbor karte φ oko p.
- Po prethodnoj identifikaciji, za plohe koje su *uložene* u Euklidski prostor $\mathbb{R}^n$, tangencijalni prostor (prostor derivacija) je vektorski prostor razapet nagibima tangenata na sve krivulje koje leže u mnogostrukosti i prolaze točkom p, dakle, vektorski potprostor $\mathbb{R}^n$. Naime, u tom slučaju nagibe krivulja ima smisla promatrati direktno na mnogostrukosti, jer ona ulaganjem u $\mathbb{R}^n$ nije više samo apstraktna mnogostrukost, pa gornja relacija ekvivalencije prelazi u jednakost vektora u $\mathbb{R}^n$, $\gamma_1'(0)=\gamma_2'(0)$.

Definicija 7.4 (Riemannova ploha [7])**.** *Neka je $\mathcal{S}$ holomorfna ploha.* Riemannova metrika *na $\mathcal{S}$ (kao realnoj 2-mnogostrukosti) je familija $\{g_p:\ p\in\mathcal{S}\}$* skalarnih produkata *na tangencijalnim prostorima, $g_p:T_p\mathcal{S}\times T_p\mathcal{S}\to\mathbb{R}$, takva da je preslikavanje $g:p\mapsto g_p$ (tzv.* tenzor*) glatko*[6] *(C^∞) na $\mathcal{S}$. Par $(\mathcal{S},g)$ tada nazivamo* Riemannovom plohom.

---

[2] Derivacija u točki p je linearni operator $D:C^\infty(\mathcal{S},p)\to\mathbb{R}$ koji zadovoljava Leibnizovo pravilo: $D(f\cdot g)=D(f)\cdot g(p)+f(p)\cdot D(g),\ f,g\in C^\infty(\mathcal{S},p)$, gdje je $\cdot$ operacija množenja funkcija.

[3] Oznaka $(\mathcal{S},p)$ znači proizvoljno malu otvorenu okolinu na $\mathcal{S}$ oko p, tj. f je *klica* funkcije.

[4] Za $\varphi:(\mathcal{S},p)\to(\mathcal{T},\varphi(p))$ holomorfnu klicu, definiramo njezin *push-forward* kao linearni operator tangencijalnih prostora, $\varphi_*:T_p(\mathcal{S})\to T_{\varphi(p)}(\mathcal{T})$, dan s $\varphi_*D(g)=D(g\circ\varphi^{-1})$, $D\in T_p(\mathcal{S})$, $g\in C^\infty(\mathcal{T},\varphi(p))$.

[5] Naime, pokazuje se da je skup svih derivacija u točki 0 na algebri $C^\infty(\mathbb{R}^2,0)$ upravo skup svih usmjerenih derivacija $D_{\mathbf{v}}|_0(f)=\nabla f(0,0)\cdot\mathbf{v}=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot v_1+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0))\cdot v_2$, $\mathbf{v}=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$. Poistovjećivanjem $D_{\mathbf{v}}|_0\equiv\mathbf{v}$ zapravo $T_0\mathbb{R}^2\equiv\mathbb{R}^2$. Također, za $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ t.d. $\mathbf{v}=\alpha\mathbf{e}_1+\beta\mathbf{e}_2$, iz gornje formule s gradijentom se lako vidi da je $D_{\mathbf{v}}|_0=D_{\alpha\mathbf{e}_1+\beta\mathbf{e}_2}|_0=\alpha D_{\mathbf{e}_1}|_0+\beta D_{\mathbf{e}_2}|_0$. Dakle, za svaki $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2$ postoje $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$D_{\mathbf{v}}|_0=\alpha\frac{\partial}{\partial x}|_0+\beta\frac{\partial}{\partial y}|_0.$$

[6] Sjetimo se da je skalarni produkt bilinearno preslikavanje, pa je glatkoću dovoljno

Sad možemo definirati duljinu (normu) tangencijalnog vektora $X \in T_p\mathcal{S}$, $p \in \mathcal{S}$, kao:

$$||X|| := \sqrt{g_p(X, X)}, \ X \in T_p\mathcal{S},$$

te $T_p\mathcal{S}$ postaje *normirani* vektorski prostor.

Teorem 7.5 (Postojanje i (ne)jedinstvenost Riemannove strukture na diferencijabilnoj kompleksnoj plohi, [7])**.** *Svaka holomorfna kompleksna ploha može se opremiti Riemannovom strukturom. Nadalje, Riemannova struktura inducira metriku koja generira topologiju te plohe.*

Međutim, Riemannova struktura niti Riemannova metrika plohe nisu jedinstvene. Sjetimo se da više metrika može generirati istu topologiju.

Skica dokaza. Temelji se na topološkom dokazu da je svaki parakompaktan lokalno metrizabilan prostor metrizabilan. Preciznije, ploha se pokrije kartama oko svake točke. Zbog parakompaktnosti holomorfne plohe (*Radó teorem*) pokrivač ima lokalno konačno otvoreno profinjenje, te postoji particija jedinice podređena tom pokrivaču. Sad se struktura $p \mapsto g_p$ definira lokalno po kartama, povlačeći euklidski skalarni produkt sa $\mathbb{R}^2$ na tangencijalne prostore, te se 'lijepi' u globalnu Riemannovu strukturu $p \mapsto g_p, \ p \in \mathcal{S}$, pomoću particije jedinice. □

7.5.1 Udaljenost točaka na $\mathcal{S}$ u Riemannovoj metrici

Nakon teoretskog rezultata o metrizabilnosti Riemannove plohe, postavlja se pitanje kako 'efektivno' mjeriti udaljenost dvije točke (apstraktne) Riemannove mnogostrukosti, tj. kako Riemannova struktura inducira neku konkretnu metriku na samoj mnogostrukosti $\mathcal{S}$. Dodatno, ta metrika inducira upravo topologiju te mnogostrukosti [17, 18].

Udaljenosti točaka mjerit ćemo preko duljina krivulja:

Definicija 7.6 (Duljina krivulje na Riemannovoj plohi)**.** *Neka je* $(\mathcal{S}, g)$ *Riemannova ploha. Neka je* $\gamma : [a, b] \to \mathcal{S}$ *po dijelovima glatka parametarski zadana krivulja. Neka je, dodatno, parametrizacija regularna*[7] ($\gamma'(t) \neq 0,$ *za sve* $t \in [a, b]$ *u kojima je derivacija definirana*). Duljinu *parametarski zadane PDG krivulje definiramo kao:*

$$\ell(\gamma) := \int_a^b ||\gamma'(t)|| \, dt,$$

gdje je

$$\gamma'(t) := \gamma_*(\frac{d}{dt}|_t) \in T_{\gamma(t)}(\mathcal{S})$$

---

zahtijevati za realizaciju g na svim uređenim parovima (ovdje 4 para) baznih elemenata: za svaku ($\leftrightarrow$ bilo koju) kartu $\varphi : (\mathcal{S}, p) \to (\mathbb{R}^2, 0)$, su preslikavanja $p \mapsto g_p(\varphi_*^{-1}(\frac{d}{dx_i}|_{(0,0)}), \varphi_*^{-1}(\frac{d}{dx_j}|_{(0,0)})), \ i, j \in \{1, 2\}$, glatka na okolini 0.

[7] Uvijek možemo naći regularnu parametrizaciju.

push-forward[8] *po* γ *derivacije* $\frac{d}{dt}|_t \in T_t([a,b])$, *a* $||.||$ *norma tangencijalnog vektora uvedena iznad preko skalarnog produkta.*

Zadatak: provjerite da je definicija neovisna o izboru regularne parametrizacije pdg krivulje $\Gamma := \gamma([a,b])$ (zamjena varijabli u integralu).

Radi neovisnosti o parametrizaciji, $\ell(\gamma)$ označavat ćemo s $\ell(\Gamma)$, gdje je $\Gamma := \gamma([a,b]) \subseteq \mathcal{S}$ dana PGD krivulja na plohi $\mathcal{S}$, te zvati *duljinom p.d.g. krivulje* Γ.

Definicija 7.7 (Riemannova metrika na plohi $\mathcal{S}$)**.** *Neka je* $(\mathcal{S}, g)$ *Riemannova ploha. Udaljenost dviju točaka* p, $q \in \mathcal{S}$ *Riemannove mnogostrukosti* $(\mathcal{S}, g)$ *definira se kao*

$$d(p,q) := \inf\{\ell(\Gamma) : \ \Gamma \ \textit{p.d.g. krivulja na } \mathcal{S} \textit{ koja spaja } p \textit{ i } q\}.$$

Zadatak: Provjerite svojstva metrike za $d : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Propozicija 7.8. *Gore definirana Riemannova metrika* d *inducira upravo topologiju mnogostrukosti* $\mathcal{S}$*.*

Dokaz. Nećemo raditi, tehnički, vidjeti npr. [17, 18]. Ideja: Topologija mnogostrukosti je oko svake točke lokalno euklidska (do na homeomorfizam preko prelaska u kartu). S druge strane, pokaže se da je Riemannova metrika lokalno po kartama jako ekvivalentna euklidskoj metrici (povučenoj na mnogostrukost), pa generiraju istu topologiju. □

Možemo zaključiti: zadavanjem neke konkretne Riemannove strukture $(\mathcal{S}, g)$ na plohi, korištenjem Definicije 7.7 zadajemo metriku na plohi koju zovemo *Riemannovom metrikom* (pridruženom toj strukturi). Kasnije ćemo tako upoznati sfernu, euklidsku i Poincaréovu metriku na sfernim, euklidskim i hiperboličkim plohama. U nastavku ćemo često za Riemannov tenzor g 'zloupotrebljavati' naziv *metrika*, u smislu generirane metrike iz Definicije 7.7.

Definicija 7.9 (Izometrija Riemannovih mnogostrukosti, formalna definicija)**.** *Neka su* $(\mathcal{S}, g)$ *i* $(\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{g})$ *Riemannove mnogostrukosti. Za biholomorfizam* $f : \mathcal{S} \to \tilde{\mathcal{S}}$ *kažemo da je izometrija ako vrijedi*

$$f_* g = \tilde{g},$$

u smislu:

$$g_p(X,Y) = \tilde{g}_{f(p)}(f_*X, f_*Y), \ X, Y \in T_p(\mathcal{S}), \ p \in \mathcal{S}.$$

Zadatak 7.10. *Provjerite po gornjoj definiciji da je kompozicija izometrija Riemannovih mnogostrukosti opet izometrija.*

Sljedeća propozicija pokazuje da je *izometrija*, kao što nam je poznato, funkcija koja *čuva udaljenosti.*

[8] $\gamma_*(\frac{d}{dt}|_t)(h) := \frac{d}{dt}h(\gamma(t))|_t, \ h \in C^\infty(\mathcal{S}, \mathbb{R})$.

Propozicija 7.11 (Izometrija čuva udaljenosti)**.** *Neka su* $(\mathcal{S}, g)$ *i* $(\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{g})$ *Riemannove mnogostrukosti, te neka su* d_g *odn.* $d_{\tilde{g}}$ *Riemannove metrike na* $\mathcal{S}$ *odn.* $\tilde{\mathcal{S}}$ *inducirane njihovim Riemannovim strukturama kao u Definiciji 7.7. Za izometriju* $f : \mathcal{S} \to \tilde{\mathcal{S}}$ *vrijedi:*

$$d_g(p, q) = d_{\tilde{g}}(f(p), f(q)),\ p, q \in \mathcal{S}.$$

Dokaz. Slijedi direktno po Definiciji 7.7 udaljenosti točaka na mnogostrukosti d_g odn. $d_{\tilde{g}}$.

Nećemo pokazivati, no Riemannova metrika na plohi nije jedinstvena. Zato uvodimo neka dodatna svojstva u nastavku, uz koja ćemo imati neki (skoro, do na neku jednostavniju transformaciju) kanonski izbor 'preferirane' Riemannove metrike na svakom tipu plohe.

Riemannov tenzor kao bilinearna forma

Neka je $(\mathcal{S}, g)$ Riemannova struktura na glatkoj realnoj 2-plohi (ili kompleksnoj holomorfnoj plohi). Zapišimo g kao 2-formu. Za svaki $p \in \mathcal{S}$ je

$$g(p) : T_p\mathcal{S} \times T_p\mathcal{S} \to \mathbb{R}$$

bilinearni funkcional na 2-dimenzionalnom vektorskom prostoru $T_p\mathcal{S}$, te stoga ima svoj *matrični zapis*[9]. Prostor $T_p\mathcal{S}$ je 2-dimenzionalni realni vektorski prostor generiran baznim vektorima $\varphi_*^{-1}(\frac{d}{dx}|_{(0,0)})$ i $\varphi_*^{-1}(\frac{d}{dy}|_{(0,0)})$, gdje je φ karta oko $p \in \mathcal{S}$. Označimo s dx_p, $dy_p : T_p\mathcal{S} \to \mathbb{R}$ *dualne operatore* tih derivacija. Sada možemo zapisati matrično:

$$g(p) = \begin{bmatrix} g_{11}(p) & g_{12}(p) \\ g_{12}(p) & g_{22}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_p \\ dy_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx_p \\ dy_p \end{bmatrix},\ p \in \mathcal{S},$$

odnosno, funkcijski,

$$g = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}, \tag{7.11.1}$$

[9]Neka je $f : V \times V \to \mathbb{R}$, V n-dimenzionalni vektorski prostor, *bilinearni funkcional.* Neka je $(e_1, e_2, \dots e_n)$ baza za V. Tada je

$$f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = f(v_1e_1 + \ldots + v_ne_n, w_1e_1 + \ldots + w_ne_n) = A\mathbf{v} \cdot \mathbf{w},$$

gdje je $A \in M_n(\mathbb{R})$, $a_{ij} = f(e_i, e_j)$, $i, j = 1, \dots, n$. Matrica A je simetrična (resp. pozitivno definitna–sve parcijalne determinante strogo pozitivne) ako i samo ako je bilinearna forma simetrična ($f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{w}, \mathbf{v})$, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$), resp. pozitivno definitna ($f(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$ za $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq 0$).

Također, ako uvedemo *dualne linearne operatore* $e_i^* : V \to \mathbb{R}$ vektora e_i, $i = 1, \dots, n$, $(e_i^*(e_j) := \delta_i(j)$, $i, j = 1, \dots, n)$, f možemo zapisati funkcijski:

$$f = A \begin{bmatrix} e_1^* \\ e_2^* \\ \vdots \\ e_n^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1^* \\ e_2^* \\ \vdots \\ e_n^* \end{bmatrix}.$$

gdje su dx, $dy : \mathcal{S} \to \mathcal{L}(T_p\mathcal{S}, \mathbb{R})$ definirani s $dx(p) := dx_p$ i $dy(p) := dy_p$, $p \in \mathcal{S}$. Primijetimo da je, zbog simetrije g, $g_{ij} = g_{ji}$.

Obično zapisujemo Riemannovu strukturu (7.11.1) u obliku *dualne forme* (2-forme):

$$ds^2 = g = g_{11}dx^2 + 2g_{12}dx\,dy + g_{22}dy^2,$$

odnosno,

$$g(p) = g_{11}(p)dx_p^2 + 2g_{12}(p)dx_p dy_p + g_{22}(p)dy_p^2,\ p \in \mathcal{S},\ g_{ij}(p) \in \mathbb{R}.$$

Definicija 7.12 (Konformalna Riemannova metrika)**.** *Za Riemannovu strukturu (metriku) g na Riemannovoj plohi $(\mathcal{S}, g)$ kažemo da je* konformalna *ako vrijedi*

$$g_{11} = g_{22} \neq 0,\ g_{12} = 0,$$

tj. ako je oblika:

$$ds^2 = \gamma^2(dx^2 + dy^2),$$

pri čemu je $\gamma^2 := g_{11} > 0$, radi pozitivne definitnosti g.

Napomena 7.13. Metriku $ds^2 = \gamma^2(dx^2 + dy^2)$ na Riemannovoj plohi kraće zapisujemo i kao

$$ds = \gamma(z)|dz|.$$

Taj oblik bit će nam prilagođen brzom računanju duljine krivulje Γ u danoj metrici preko integrala $\int_\Gamma ds$, vidjeti Napomenu 7.30. Zapis tenzora je lokalno u kartama, a kako Riemannova ploha kao karte ima otvorene podskupove od $\mathbb{C}$, koristimo varijablu z.

Napomena 7.14. Zadati konformalnu metriku na $\mathcal{S}$ ekvivalentno je zadavanju pozitivne glatke funkcije $\gamma : \mathcal{S} \to \mathbb{R}_{>0}$. Zato ponekad funkciju γ neprecizno zovemo *konformalnom metrikom.*

Definicija 7.15 (Konformalno invarijantna Riemannova metrika)**.** *Za metriku ds^2 na Riemannovoj plohi $\mathcal{S}$ kažemo da je* konformalno invarijantna *ako su konformalni automorfizmi plohe* $\mathrm{Aut}(\mathcal{S})$ *izometrije obzirom na metriku ds^2.*

Propozicija 7.16. *Konformalna metrika γ na Riemannovoj plohi $\mathcal{S}$ je invarijanta konformalnog automorfizma $F \in \mathrm{Aut}(\mathcal{S})$ (F je izometrija u odnosu na metriku γ) ako i samo ako je, u kartama[10], zadovoljeno:*

$$\gamma(F(z)) \cdot |F'(z)| = \gamma(z),\ \forall z. \tag{7.16.1}$$

Napomena 7.17. Za $(\mathcal{S}, g)$ Riemannovu mnogostrukost, te $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ holomorfno, definiramo *diferencijal* u točki p, u oznaci $DF(p)$, kao linearni operator

$$DF(p) :\ T_p\mathcal{S} \to T_{F(p)}\mathcal{S},\ DF(p)(D_{\mathbf{v}}|_p) = F^*(D_{\mathbf{v}}|_p),\ D_{\mathbf{v}}|_p \in T_p\mathcal{S}.$$

[10]Funkcije F i γ su funkcije na plohi spuštene u odgovarajuće karte u $\mathbb{C}$.

Kako je[11] $D_{\mathbf{v}}|_p = v_1 \frac{d}{dx}|_p + v_2 \frac{d}{dy}|_p$, za neke $v_{1,2} \in \mathbb{R}$, radi linearnosti $DF(p)$ vrijedi:

$$DF(p)(D_{\mathbf{v}}|_p) = v_1 F^* \left(\frac{d}{dx}|_p \right) + v_2 F^* \left(\frac{d}{dy}|_p \right).$$

Dokaz. Neka je

$$g_z = \gamma^2(z)(dx_z^2 + dy_z^2) \tag{7.17.1}$$

konformalni tenzor dane metrike na $\mathcal{S}$, zadan u karti (gledamo, dakle, na otvorenom podskupu $\mathbb{C}$). Konformalni automorfizam F je izometrija na $U \subseteq \mathbb{C}$ ako vrijedi:

$$g_z(D_{\mathbf{v}}|_z, D_{\mathbf{w}}|_z) = g_{F(z)}(DF(z)D_{\mathbf{v}}|_z, DF(z)D_{\mathbf{w}}|_z), \tag{7.17.2}$$

za sve $D_{\mathbf{v}}|_z,\ D_{\mathbf{w}}|_z \in T_z\mathbb{C}$, $z \in U$. Neka je, kao gore, $D_{\mathbf{v}}|_z = v_1 \frac{d}{dx}|_z + v_2 \frac{d}{dy}|_z$, za neke $v_{1,2} \in \mathbb{R}$, te $D_{\mathbf{w}}|_z = w_1 \frac{d}{dx}|_z + w_2 \frac{d}{dy}|_z$, za neke $w_{1,2} \in \mathbb{R}$, gdje je $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ i $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$.

Neka su dx_z i dy_z dualni operatori baznih parcijalnih derivacija u $T_z\mathbb{C}$. Uz pretpostavku konformalnog oblika (7.17.1) tenzora g, gornja jednakost (7.17.2) ekvivalentna je (Zadatak 7.18 ispod) jednakosti:

$$\gamma^2(z) \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \gamma^2(F(z)) \cdot \langle F'(z) \cdot \mathbf{v}, F'(z) \cdot \mathbf{w} \rangle = \gamma^2(F(z))(F'(z))^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle ,$$

za sve $\mathbf{v},\ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$, $z \in U$, tj.

$$\gamma(z) = \gamma(F(z))|F'(z)|,\ z \in U.$$

□

Zadatak 7.18. *Dokažite ekvivalenciju izraza iz gornjeg dokaza.*

Rješenje. Lijeva strana ekvivalencije slijedi direktno iz oblika tenzora (7.17.1). Objasnimo sad kako se dobije desna strana ekvivalencije. Naime, kao u Napomeni 7.17,

$$DF(z)D_{\mathbf{v}}|_z = F_*(v_1 \frac{\partial}{\partial x}|_z + v_2 \frac{\partial}{\partial y}|_z) = v_1 F_* \left(\frac{\partial}{\partial x}|_z \right) + v_2 F_* \left(\frac{\partial}{\partial y}|_z \right). \tag{7.18.1}$$

Neka je $g \in C^\infty(V)$, $V \subseteq \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ okolina od $F(z)$. Tada

$$\begin{aligned} F_* \left(\frac{\partial}{\partial x}|_z \right) g = \frac{\partial}{\partial x}|_{F(z)} (g \circ F) &= \partial_x g(F(z)) \frac{\partial}{\partial x} F_1(z) + \partial_y g(F(z)) \frac{\partial}{\partial x} F_2(z) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} F_1(z) \cdot \frac{\partial}{\partial x}|_{F(z)} + \frac{\partial}{\partial x} F_2(z) \cdot \frac{\partial}{\partial y}|_{F(z)} \right) g, \end{aligned}$$

[11]Oznake $D_{\mathbf{v}}$, $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$ zloupotrebljavamo radi jednostavnosti zapisa – misleći zapravo na njihove pull-backove iz odgovarajuće karte na tangencijalni prostor mnogostrukosti!

gdje je $F = (F_1, F_2)$. Primijetimo da su sve parcijalne derivacije po realnim varijablama, gdje je $z = (x, y) = x + iy$. Dobivamo, dakle, operatorsku jednakost:

$$F_* \left(\frac{\partial}{\partial x}|_z \right) = \frac{\partial}{\partial x} F_1(z) \cdot \frac{\partial}{\partial x}|_{F(z)} + \frac{\partial}{\partial x} F_2(z) \cdot \frac{\partial}{\partial y}|_{F(z)}.$$

Analogno se dobije:

$$F_* \left(\frac{\partial}{\partial y}|_z \right) = \frac{\partial}{\partial y} F_1(z) \cdot \frac{\partial}{\partial x}|_{F(z)} + \frac{\partial}{\partial y} F_2(z) \cdot \frac{\partial}{\partial y}|_{F(z)}.$$

Uvrštavanjem u (7.18.1) dobivamo:

$$\begin{aligned} DF(z) D_{\mathbf{v}}|_z = &\left(v_1 \frac{\partial}{\partial x} F_1(z) + v_2 \frac{\partial}{\partial y} F_1(z) \right) \frac{\partial}{\partial x}|_{F(z)} + \\ &+ \left(v_1 \frac{\partial}{\partial x} F_2(z) + v_2 \frac{\partial}{\partial y} F_2(z) \right) \frac{\partial}{\partial y}|_{F(z)}. \end{aligned}$$

Primijetimo da je $F : U \subseteq \mathbb{C} \to V \subseteq \mathbb{C}$ kompleksno derivabilna kao kompleksna funkcija kompleksne varijable, pa *Cauchy-Riemannovi uvjeti* daju:

$$\frac{\partial}{\partial x} F_1(z) = \frac{\partial}{\partial y} F_2(z), \ \frac{\partial}{\partial y} F_1(z) = -\frac{\partial}{\partial x} F_2(z), \quad F'(z) = \frac{\partial}{\partial x} F_1(z) + i \frac{\partial}{\partial x} F_2(z).$$

Zbog konformalnog oblika (7.17.1) tenzora $g_{F(z)}$, te nakon kraćenja pomoću C-R uvjeta, dobivamo:

$$\begin{aligned} &g_{F(z)}(DF(z) D_{\mathbf{v}}|_z, DF(z) D_{\mathbf{w}}|_z) = \\ &= \left(v_1 \frac{\partial}{\partial x} F_1(z) + v_2 \frac{\partial}{\partial y} F_1(z) \right) \cdot \left(w_1 \frac{\partial}{\partial x} F_1(z) + w_2 \frac{\partial}{\partial y} F_1(z) \right) + \\ &+ \left(v_1 \frac{\partial}{\partial x} F_2(z) + v_2 \frac{\partial}{\partial y} F_2(z) \right) \cdot \left(w_1 \frac{\partial}{\partial x} F_2(z) + w_2 \frac{\partial}{\partial y} F_2(z) \right) = \\ &= v_1 w_1 \left(\frac{\partial}{\partial x} F_1(z) \right)^2 + v_2 w_2 \left(\frac{\partial}{\partial y} F_1(z) \right)^2 + \\ &+ v_1 w_1 \left(\frac{\partial}{\partial x} F_2(z) \right)^2 + v_2 w_2 \left(\frac{\partial}{\partial y} F_2(z) \right)^2 = \\ &= \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} F_1(z) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x} F_2(z) \right)^2 \right) \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = |F'(z)|^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle . \end{aligned}$$

□

7.19 Zakrivljenost krivulja i ploha

Još jedno svojstvo koje će biti zajedničko promatranim metrikama na plohama bit će konstantna *zakrivljenost* po točkama plohe.

7.19.1 Lokalna zakrivljenost krivulja u $\mathbb{R}^2$.

Definicija 7.20 (Zakrivljenost glatke krivulje u točki)**.** *Neka je* $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ *glatka krivulja, te* $p \in \Gamma$. *Neka je* $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ *neka njezina glatka parametrizacija* jedinične brzine *lokalno oko* p ($||\gamma'(t)|| = 1,\ t \in I$). Zakrivljenost krivulje u točki $p \in \Gamma$ *definira se kao*

$$\kappa(t_p) := ||\gamma''(t_p)||, \quad gdje\ je\ t_p \in I\ t.d.\ \gamma(t_p) = p.$$

Definicija je dobra jer je glatka parametrizacije jedinične brzine oko p jedinstvena. Zakrivljenost, dakle, možemo zamišljati kao iznos akceleracije čestice u točki kad se čestica giba po krivulji kroz tu točku jediničnom brzinom.

Primjer 6 (Primjeri krivulja konstantne zakrivljenosti)**.**

- (Zakrivljenost pravca)
  Neka je $p \ldots y = ax + b$, a, $b \in \mathbb{R}$, pravac u ravnini. Glatka parametrizacija dana je s
  $$\gamma_\alpha(t) = (\alpha \cdot t, a \cdot \alpha t + b),\ t \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R},$$
  no $\gamma''(t) = 0$ za svaki $t \in \mathbb{R}$, pa je pravac konstantne lokalne zakrivljenosti $\kappa = 0$ u svakoj točki.
- (Zakrivljenost kružnice radijusa R) Neka je $\Gamma := K(0, R)$. Glatke parametrizacije su dane s
  $$\gamma_\alpha(t) = (R\cos(\alpha t), R\sin(\alpha t))\,,\ t \in \left[0, \frac{2\pi}{\alpha}\right),\ \alpha \in \mathbb{R}.$$
  Parametrizacija jedinične brzine dana je s:
  $$\gamma(t) = \left(R\cos\frac{\alpha}{R}, R\sin\frac{\alpha}{R}\right),$$
  pa je lokalna zakrivljenost kružnice radijusa R *konstantna* i jednaka $\kappa = \frac{1}{R}$. Dakle, što je radijus veći, zakrivljenost u točki je manja, jer je lokalno kružnica bliža pravcu, tj. 'ravnija'. Kad radijus $R \to \infty$, kružnica se izravnava u pravac.

  Dodatno, moguće je definirati *Zakrivljenost u točki s predznakom, obzirom na parametrizaciju* $t \mapsto \gamma(t)$ *krivulje.* Neka je $t \mapsto \mathbf{N}(t)$ glatko *normalno* jedinično vektorsko polje duž krivulje (okomito na tangentu na krivulju u svakoj točki). *Zakrivljenost s predznakom obzirom na polje* $\mathbf{N}$, u oznaci $\kappa_{\mathbf{N}}(t)$, po apsolutnoj vrijednosti jednaka je
  $$|\kappa_{\mathbf{N}}(t)| := |\kappa(t)| = ||\gamma''(t)||,$$
  a predznak joj je pozitivan (negativan) ako je uređeni par redom tangencijalnog vektora na krivulju i normalnog vektora $(\gamma'(t), \mathbf{N}(t))$ pozitivno[12] (negativno) orijentiran. Drugim riječima, ako krivulja u točki pod tom parametrizacijom zavija prema ili od normalnog polja.

[12] Pozitivnim smjerom se smatra smjer obrnut od kazaljke na satu: ako se od vektora $\mathbf{v}$ do $\mathbf{w}$ dolazi rotacijom obrnutom od smjera kazaljke, kažemo de je par $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ pozitivno orijentiran.

7.20.1 Zakrivljenost Riemannovih ploha i plohe konstantne zakrivljenosti.

Radi jednostavnosti, prvo promatramo Riemannove plohe (realne 2-plohe ili kompleksne 1-plohe) koje su *uložene* (kao topološki potprostor) u Euklidski prostor $\mathbb{R}^3$. Pod pojmom *uložene*, smatramo da je topologija plohe (tj. biholomorfne slike plohe) naslijeđena euklidska. Na njima promatramo Riemannovu strukturu realiziranu naslijeđenom euklidskom metrikom.

Primijetimo da se ploha u svakoj točki može savijati različito u više smjerova (sjetimo se npr. *sedlastih* ploha), pa zakrivljenost plohe u točki ne možemo definirati jednim brojem, niti jednim predznakom, kao kod krivulja.

Definicija 7.21 (Glavne zakrivljenosti plohe $\mathcal{S}$ u točki)**.** *Neka je $\mathcal{S}$ glatka 2-ploha koja je uložena u $\mathbb{R}^3$, te joj je Riemannova metrika euklidska. Neka je $p \in \mathcal{S}$. Neka je $\mathbf{N}$ glatko jedinično normalno vektorsko polje na plohu (okomito na tangencijalni prostor plohe u točki). Normalne ravnine u točki p koje sadrže normalni vektor $\mathbf{N}(p)$ sijeku plohu duž krivulje, te promatramo zakrivljenost $\kappa_{\mathbf{N}(p)}$ te krivulje u p.* Glavne zakrivljenosti *definiraju se kao minimum i maksimum svih tako dobivenih zakrivljenosti s predznakom, a* Gaussova zakrivljenost *definira se kao njihov produkt.*

Primijetimo da u gornjoj geometrijskoj definiciji koristimo ulaganje plohe u $\mathbb{R}^3$. Ukoliko je Riemannova ploha apstraktna i nije je moguće (lokalno) uložiti u $\mathbb{R}^3$, potrebna je intrinzična definicija zakrivljenosti preko Riemannove strukture plohe, što ovdje ne radimo, vidjeti npr. [7].

Primjer 7 (Gaussove zakrivljenosti nekih uloženih ploha)**.**

- (ravnina $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$) Svi presjeci s normalnim ravninama su pravci zakrivljenosti 0, pa je Gaussova zakrivljenost 0.
- (sfera $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$) Presjeci sfere s normalnim ravninama su jedinične kružnice, pa im je zakrivljenost 1 ili -1 , ovisno gledamo li normalno polje na sferi orijentirano prema unutra ili prema van. Gaussova zakrivljenost je uvijek 1.
- (sedlasta ploha) U točki sedla, postoje krivulje s pozitivnom i negativnom zakrivljenošću obzirom na normalni vektor, pa je najmanja glavna zakrivljenost negativna, a najveća pozitivna, te je Gaussova zakrivljenost negativna.

Primijetimo iz definicije Gaussove zakrivljenosti preko zakrivljenosti krivulja dobivenih u presjeku plohe s normalnim ravninama da će Gaussova zakrivljenost ploha uloženih u $\mathbb{R}^3$ biti 0 ako je ploha u nekom smjeru 'ravna', pozitivna ako je ploha u točki 'kupolasta' ili 'zdjeličasta', a negativna ako je sedlasta u točki, bez obzira koje normalno polje izaberemo.

Napomena 7.22. Vrijedi sljedeće (bez dokaza):

- Postoji sferna konformalna metrika na Riemannovoj sferi koja se može lokalno (globalno ne!) izometrički biholomorfno[13] uložiti u $\mathbb{R}^3$ s euklidskom

[13] Za biholomorfizam $h : X \to Y$ dva metrička prostora (X, d) i (Y, ρ) kažemo da je *izometrički* ako je metrika ρ na Y usklađena s metrikom d na X preko biholomorfizma h: $\rho(u, v) = d(h^{-1}(u), h^{-1}(v))$, $u, v \in Y$.

metrikom. Dakle, sferna metrika je lokalno euklidska, ali ne globalno. Na ravnini $\mathbb{C}$ konformalna metrika je zapravo euklidska. No npr. torus (koji je isto euklidska ploha) sa svojom konformalnom metrikom (koju često nazivamo i *plosnata* (engl. *flat*) metrika, odnosno torus opskrbljen tom metrikom *plosnati torus*) može se lokalno izometrički biholomorfno uložiti u $\mathbb{R}^4$, no ne u $\mathbb{R}^3$, pa ta flat metrika torusa nije euklidska metrika.

- Konformalna metrika konstantne zakrivljenosti na disku (tzv. Poincaréova metrika) ne može se izometrički biholomorfno uložiti u euklidski $\mathbb{R}^3$ (time i nije euklidska). Za razliku od sfernih i euklidskih, neke od hiperboličkih ploha se čak ne mogu niti samo biholomorfno uložiti[14] u $\mathbb{R}^3$ (npr. *Kleinova boca* koja nije orijentabilna ploha).

Gaussov *Theorema egregium* garantira da je Gaussova zakrivljenost ploha *intrinzično svojstvo plohe* u smislu da se ne mijenjaju pod izometričkim biholomorfizmima. Tada se lako (zahvaljujući Gaussovom teoremu i lokalnom izometričkom ulaganju sfere u $\mathbb{R}^3$) provjeri da je za sferne plohe zakrivljenost *sferne metrike* konstantna i pozitivna, a za ravninu jednaka 0. Kako se ostale plohe ne ulažu nužno izometrički u euklidski $\mathbb{R}^3$, zakrivljenost Riemannove plohe moramo definirati generalinije, ne korištenjem normalnih ravnina u $\mathbb{R}^3$, već korištenjem Riemannove strukture plohe (intrinzično). To prelazi okvire kolegija.

Zakrivljenost euklidskih ploha s konformalnim tzv. *plosnatim metrikama* bit će 0 (odatle i ime 'plosnate'). Primijetimo da tako euklidska ploha 'flat torus' ima Gaussovu zakrivljenost 0, dok standardni torus uložen u $\mathbb{R}^3$ očito ima točke pozitivne, negativne i nul Gaussove zakrivljenosti.

Zakrivljenost *Poincaréove metrike* na hiperboličkim plohama bit će konstantna i negativna. Detaljnije o Poincaréovoj metrici na disku u idućem poglavlju.

7.23 Hiperbolička ili Poincaréova metrika na disku/gornjoj poluravnini

U ovom poglavlju bavit ćemo se tzv. *hiperboličkom geometrijom* (mjerenjem udaljenosti, kuteva itd.) na modelnoj hiperboličkoj plohi: *Poincaréovom disku* $\mathbb{D}$, tj. *hiperboličkoj poluravnini* $\mathbb{H}$. Riemannova struktura na njima je tzv. Poincaréova Riemannova struktura. Ona je različita od standardne euklidske. Stoga hiperbolička geometrija na tim prostorima ne podliježe istim aksiomima kao euklidska geometrija.

[14] Pitanje lokalnog i globalnog izometričkog ulaganja (neke klase analitičnosti) Riemannovih mnogostrukosti u euklidski prostor neke konkretne dimenzije je uvelike otvoreno. Postoje neki rezultati. Najopćenitiiji su: *Whitneyev teorem o ulaganju*: Svaka glatka n-mnogostrukost može se glatko uložiti (kao topološki potprostor) u euklidski prostor $\mathbb{R}^{2n}$. Još jači, *Nashov teorem o ulaganju* konkretne Riemannove strukture: Svaka Riemannova mnogostrukost $(\mathcal{S}, g)$ može se izometrički analitički uložiti u euklidski $\mathbb{R}^n$, za n dovoljno velik. Oba teorema traže potencijalno prevelike n. Za pojedine konkretne mnogostrukosti, kako smo naveli, imamo i neke bolje rezultate.

Definicija 7.24 (Poincaréova metrika na $\mathbb{H}$, [3, 8])**.** Poincaréova metrika na $\mathbb{H}$ *je konformalna metrika definirana s:*

$$ds := \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{y}, \ \textit{tj.} \ \gamma(z) := \frac{1}{\Im(z)}.$$

Napomena 7.25 (Standardna euklidska metrika na $\mathbb{C}$)**.** Standardna euklidska metrika (tenzor) na $\mathbb{C}$ (time i na $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{C}$) dana je s

$$ds := \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

Naime, za $\mathbf{v} \in T_z(\mathbb{C}) \equiv \mathbb{C}$, euklidska duljina (norma) vektora je $|\mathbf{v}| = ds(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

Korolar 7.26 (Poincaréova metrika na $\mathbb{D}$)**.** Poincaréova metrika na $\mathbb{D}$

$$ds := \frac{2\,|dz|}{1 - |z|^2}, \ \textit{tj.} \ \tilde{\gamma}(z) := \frac{2}{1 - |z|^2},$$

je konformalna metrika dobivena transferom Poincaréove metrike s $\mathbb{H}$ na $\mathbb{D}$ biholomorfizmom

$$h : \mathbb{H} \to \mathbb{D}, \ h(z) = \frac{i - z}{i + z}.$$

Dokaz. Označimo s $\tilde{g}$ metriku na $\mathbb{D}$ dobivenu transferom Poincaréove metrike g na $\mathbb{H}$ biholomorfizmom h. Transfer metrike znači

$$\tilde{g}_{h(p)}(h_* X, h_* Y) = g_p(X, Y), \ p \in \mathbb{H}, \, X, Y \in T_p\mathbb{H}.$$

To je ekvivalentno zahtjevu da je biholomorfizam h izometrija u paru (metrika, prenesena metrika). Zato je, kao u Propoziciji 7.16, dovoljno provjeriti da je $\tilde{\gamma}(h(z)) \cdot |h'(z)| = \gamma(z)$, $z \in \mathbb{H}$. To se lako računski provjeri. □

Propozicija 7.27 (Konformalna invarijantnost, [3])**.** *Poincaréova metrika na $\mathbb{H}$ je* konformalno invarijantna*, tj. konformalni automorfizmi $\mathbb{H}$,*

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = PSL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : \ a, b, c, d \in \mathbb{R}, \ ad - bc = 1 \right\},$$

su izometrije.

Dokaz. Zbog Zadatka 7.28 ispod i činjenice da je kompozicija izometrija izometrija, dovoljno je pokazati da su translacije, dilatacije i refleksije izometrije obzirom na Poincaréovu metriku $\gamma(z) = \frac{1}{\Im(z)}$. To se lako provjeri korištenjem Propozicije 7.16. Npr. ako je $F(z) = -\frac{1}{z}$, vrijedi da je $|F'(z)| = \frac{\Im(F(z))}{\Im(z)}$. Preostale dvije transformacije lako se provjere na isti način. □

Zadatak 7.28. *Svaki $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ može se prikazati kao konačna kompozicija translacija $z \mapsto z + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, homotetija $z \mapsto \eta z$, $\eta > 0$, i refleksija $z \mapsto -\frac{1}{z}$.*

Zadatak 7.29. *Pokažite da je Poincaréova metrika ds na disku $\mathbb{D}$ iz Korolara 7.26 konformalno invarijantna, tj. da su konformalni automorfizmi diska izometrije obzirom na tu metriku.*

Uputa: Direktna posljedica Korolara 7.26 i Propozicije 7.27.

Hiperbolička geometrija - hiperboličke udaljenosti točaka

Neka su $P, Q \in \mathbb{H}$. Neka je $\Gamma \subseteq \mathbb{H}$ po dijelovima glatka krivulja od P do Q, te neka je $\alpha : [a,b] \to \mathbb{H}$ bilo koja njezina po dijelovima glatka parametrizacija. Korištenjem Definicije 7.6 za duljinu krivulje i uvrštavanjem konkretnog tenzora $ds^2 = \gamma^2(dx^2 + dy^2)$, $\gamma(z) = \frac{1}{\Im(z)}$,

$$\begin{aligned} \ell(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))}\, dt &= \int_a^b \gamma(\alpha(t)) \cdot |\alpha'(t)|\, dt \\ &= \int_a^b \frac{1}{\Im(\alpha(t))} \cdot |\alpha'(t)|\, dt. \end{aligned} \tag{7.29.1}$$

Primijetimo da je $\alpha'(t) \in \mathbb{R}^2$, poistovjećivanjem usmjerene derivacije $D_{\mathbf{v}}$ i vektora smjera $\mathbf{v}$ u $T_z\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R}^2$ (fusnota 5, str. 61). Ovdje $|\alpha'(t)|$ označava euklidsku duljinu vektora $\alpha'(t)$, tj. modul kompleksnog broja.

Napomena 7.30. Izraz za duljinu krivulje Γ iz (7.29.1) možemo kraće pisati:

$$\ell(\Gamma) = \int_\Gamma \frac{1}{y} \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_\Gamma ds.$$

Općenito, za metriku (tenzor) ds, izraz za duljinu krivulje Γ obzirom na tu metriku iz Definicije 7.6 kraće zapisujemo kao:

$$\ell(\Gamma) = \int_\Gamma ds = \int_\Gamma \gamma(z)\sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_\Gamma \gamma(z)|dz|.$$

Efektivni račun provodimo tako da odaberemo bilo koju PDG parametrizaciju $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ od Γ, te zadnji integral $\int_\Gamma \gamma(z)|dz|$ prelazi u:

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b \gamma(\alpha(t))|\alpha'(t)|\, dt.$$

Propozicija 7.31 (Geodetske krivulje u hiperboličkoj poluravnini, [3])**.** *Neka su $P, Q \in \mathbb{H}$, $P \neq Q$. Krivulja najmanje duljine od P do Q u hiperboličkoj ravnini $\mathbb{H}$ postoji i jedinstvena je i ona je:*

1. *u slučaju $\Re(P) = \Re(Q)$, vertikalna dužina od P do Q okomita na x-os,*
2. *u slučaju $\Re(P) \neq \Re(Q)$, dio luka polukružnice sa središtem na x-osi od P do Q.*

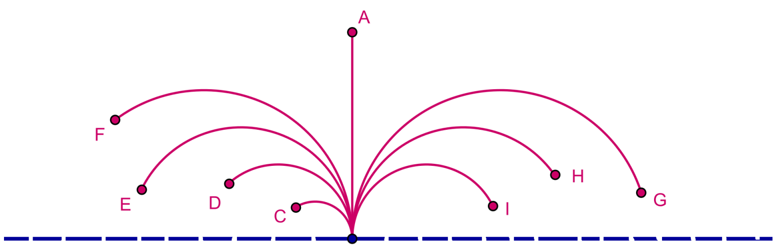
Nadalje (v. Sliku 7.23 za geometrijsko objašnjenje),

$$d(P,Q) = \ln \frac{(|P-Q| + |P-\overline{Q}|)^2}{4\Im(P)\Im(Q)}.$$

Specijalno, u 1. slučaju, gornja formula prelazi u:

$$d(P,Q) = |\ln \frac{\Im(Q)}{\Im(P)}|.$$

Napomena 7.32. Krivulje najmanje duljine (u nekoj Riemannovoj metrici) između dvije točke Riemannove plohe $(\mathcal{S}, g)$ zovemo *geodetskim krivuljama* ili *ravnim linijama* u Riemannovoj metrici g. Dakle, geodetske krivulje u hiperboličkoj poluravnini postoje i to su vertikalne dužine i kružni lukovi polukružnica sa središtem na x-osi.



Slika 7.32.1: *Ravne linije* u hiperboličkoj poluravnini $\mathbb{H}$. Preuzeto s Wikipedije [19].

Dokaz. Neka su P, $Q \in \mathbb{H}$.

- *Slučaj 1.* $\Re(P) = \Re(Q)$. Za duljinu (u Poincaréovoj metrici) bilo koje krivulje Γ od P do Q vrijedi:

$$\ell(\Gamma) = \int_\Gamma \frac{|dz|}{y} \geq \int_\Gamma \frac{|dy|}{y}. \tag{7.32.1}$$

  Neka je $\tilde{\Gamma}$ vertikalna dužina koja spaja P i Q. Očito je $dx = 0$ duž te krivulje, te integral prelazi u

$$\ell(\tilde{\Gamma}) = \int_\Gamma \frac{|dy|}{y} = \int_a^b \frac{1}{t}\, dt = \ln t|_a^b = \ln \frac{\Im(Q)}{\Im(P)},$$

  gdje smo b.s.o. pretpostavili $a := \Im(P) < b := \Im(Q)$, te je $\alpha : [a, b] \to \mathbb{H}$, $\alpha(t) = A + it$, $A := \Re(P) = \Re(Q)$, jedna parametrizacija vertikalne dužine $\tilde{\Gamma}$. U protivnom dobivamo recipročni omjer. Zbog (7.32.1), vertikalna dužina je očito krivulja najmanje duljine od P do Q u Poincaréovoj metrici.
- *Slučaj 2.* $\Re(P) \neq \Re(Q)$. Prema Zadatku 7.33, postoji jedinstveni $t > 1$ i jedinstveni $F \in PSL(\mathbb{H})$ takav da je $F(i) = P$ i $F(it) = Q$. Po 1. znamo da je $d(i, it) = \ln t$, $t > 1$. No $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ je Möbiusove transformacija i preslikava pozitivnu imaginarnu os u polukružnicu sa središtem na x-osi (pokažite!). S druge strane, $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ je po Propoziciji 7.27 izometrija. Kako je najmanja udaljenost i i it po 1. ostvarena na vertikalnoj dužini duž imaginarne osi, najmanja udaljenost P i Q ostvarena je duž luka kružnice u koji se ta dužina preslikava po F.

Po formuli (7.33.1) za pripadni $t > 1$ u konformalnom automorfizmu F iz Zadatka 7.33, dobivamo

$$\begin{aligned} d(P,Q) = d(F^{-1}(P), F^{-1}(Q)) = d(i, it) &= d\left(i, i\frac{(|P-Q| + |P-\overline{Q}|)^2}{4\Im(P)\Im(Q)}\right) \\ &= \ln \frac{(|P-Q| + |P-\overline{Q}|)^2}{4\Im(P)\Im(Q)}. \end{aligned}$$

□

Zadatak 7.33. *Neka su $P, Q \in \mathbb{H}$ takve da je $P \neq Q$. Tada postoji jedinstveni $t > 1$ te jedinstveni konformalni automorfizam $F \in PSL(2,\mathbb{R})$ takav da je*

$$F(i) = P,\ F(ti) = Q.$$

(tj. šalje te točke na imaginarnu os).

Uputa. Za dane P, Q eksplicitno se konstruira $t > 1$ i biholomorfizam $F(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ t.d. $ad - bc \neq 0$. Tražimo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ te $t > 1$ takve da je zadovoljeno:

$$\begin{aligned} \Re(P) = \frac{ac+bd}{c^2+d^2},\ \Re(Q) = \frac{act^2+bd}{c^2t^2+d^2}, \\ \Im(P) = \frac{ad-bc}{c^2+d^2},\ \Im(Q) = \frac{t(ad-bc)}{c^2t^2+d^2}. \end{aligned}$$

Pokazuje se da je jedinstveni $t > 1$ dan s:

$$t = \frac{(|P-Q| + |P-\overline{Q}|)^2}{4\Im(P)\Im(Q)}. \tag{7.33.1}$$

□

Zanimljivost: Pomoću Korolara 7.26, odredite što su ravne linije (geodetske krivulje) na Poincaréovom disku $\mathbb{D}$ (pokažite da se dobiju kao slike po h ravnih linija na $\mathbb{H}$):

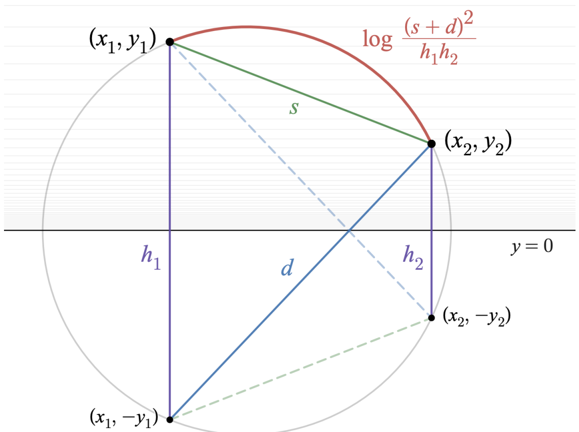
1. dužine na dijametru jediničnog kruga;
2. kružni lukovi u disku koji su ortogonalni na jediničnu kružnicu.

Odredite analogon Propozicije 7.31 u hiperboličkom modelu $\mathbb{D}$.

7.34 Sferna metrika

Definicija 7.35 (Sferna metrika na $\overline{\mathbb{C}}$, [3, 8])**.** Sferna metrika *na* $\overline{\mathbb{C}}$ *je konformalna metrika definirana s:*

$$ds := \frac{2\,|dz|}{1+|z|^2},\ tj.\ \gamma(z) := \frac{2}{1+|z|^2}.$$



Slika 7.33.1: Ilustracija Propozicije 7.31: izračun udaljenosti u hiperboličkoj poluravnini $\mathbb{H}$ dviju točaka $P = x_1 + iy_1$ i $Q = x_2 + iy_2$ takvih da je $\Re(P) \neq \Re(Q)$. Postoji jedinstvena kružnica sa središtem na x-osi koja prolazi točkama P i Q. Dobijemo je tako da spustimo simetralu dužine $\overline{PQ}$, te je njezino sjecište s x-osi središte tražene kružnice. Po Propoziciji 7.31, udaljenost točaka P i Q je hiperbolička (ne euklidska!) duljina luka te kružnice od P do Q. No ta veličina, prema Zadatku 7.33, može se izraziti pomoću euklidskih duljina stranica i dijagonala jednakokračnog trapeza kojem su vrhovi točke P, Q, te njima kompleksno konjugirane točke. Slika preuzeta s Wikipedije [19].

Sferna geometrija

Za $P, Q \in \overline{\mathbb{C}}$, sferna udaljenost (inducirana sfernom metrikom) $d(P, Q)$ nije euklidska udaljenost točaka P i Q u ambijentnom prostoru, već se mjeri po tzv. *velikim kružnicama*[15].

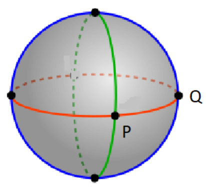
Propozicija 7.36. *Neka su P, $Q \in \overline{\mathbb{C}}$. Geodetske krivulje, tj. krivulje najmanje duljine između P i Q u sfernoj metrici postoje i one su lukovi velikih kružnica. Nadalje, sferna udaljenost $d(P, Q)$ je eukidska duljina luka velike kružnice od P do Q.*

Dokaz. Neka je $\Gamma \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ proizvoljna PDG krivulja od P do Q na sferi. Tada je

$$\ell(\Gamma) = \int_\Gamma \frac{2|dz|}{1 + |z|^2} = \int_\Gamma |dz|,$$

jer vrijedi da je $|z| = 1$ na Γ. Dakle, duljina krivulje Γ na sferi je zapravo njezina euklidska duljina. Jasno je da je dio luka velike kružnice od P do Q PDG krivulja najmanje duljine koja spaja te dvije točke. □

[15] *Velika kružnica* (engl. *great circle*) je kružnica dobivena kao presjek sfere s ravninom koja prolazi središtem sfere. Može se pokazati (sami): kroz svake dvije točke $P \neq Q$ sfere postoji jedinstvena velika kružnica.



Slika 7.35.1: Velike kružnice na Riemannovoj sferi i geodetska krivulja od P do Q.

7.37 Metrike na općenitim Riemannovim plohama

Po Teoremu 6.22, prema prostoru univerzalnog natkrivanja sve Riemannove plohe (ne samo 1-povezane) klasificiraju se u sferne, euklidske ili hiperboličke. Riemannove metrike na tim plohama inducirane su sfernom, euklidskom resp. Poincaréovom metrikom na prostoru univerzalnog natkrivanja:

Teorem 7.38 ('Spuštanje' Riemannove metrike s prostora natkrivanja, [8])**.** *Neka je $\mathcal{S}$ Riemannova ploha, te $(\tilde{\mathcal{S}}, p)$ natkrivanje. Neka je $\tilde{g}$ Riemannova metrika (tenzor) na plohi $\tilde{\mathcal{S}}$, takva da su u njoj deck transformacije natkrivanja $(\tilde{\mathcal{S}}, p)$ izometrije. Tada je s*

$$g := p_* \tilde{g}$$

dobro definirana metrika na $\mathcal{S}$ (i u njoj je p izometrija).

Dokaz. Vježba. $\square$

Primjer 8.

Poincaréova metrika na hiperboličkim Riemannovim plohama. Neka je $\mathcal{S}$ hiperbolička Riemannova ploha. Tada joj je prostor univerzalnog natkrivanja disk, $(\tilde{\mathcal{S}} = \mathbb{D}, p)$. Neka je $\tilde{g}$ Poincaréova metrika na $\tilde{\mathcal{S}}$. Deck transformacije univerzalnog natkrivanja su konformalni automorfizmi od $\mathbb{D}$, pa su, po Propoziciji 7.27, izometrije obzirom na Poincaréovu metriku. Tada je, po Teoremu 7.38, s

$$g := p_* \tilde{g}$$

dobro definirana Riemannova metrika (tenzor) na hiperboličkoj plohi $\mathcal{S}$, i nazivamo je *Poincaréovom metrikom* na $\mathcal{S}$.

Sferna metrika na sfernim plohama. Svaka sferna ploha $\mathcal{S}$ je, po Teoremu 6.22, biholomorfna sferi. Sferna metrika se prenosi direktno[16] po biholomorfizmu sa sfere na sfernu plohu.

[16]Sferna metrika na sferi nije konformalno invarijantna, pa se sferna metrika ne prenosi po Teoremu 7.38 sa sfere na sfernu plohu, kao u ostalim slučajevima. No, svaka sferna ploha je biholomorfna sferi, pa se sferna metrika prenosi po tom biholomorfizmu.

Plosnata metrika na euklidskim plohama. Po Teoremu 6.22, euklidska ploha je ili biholomorfna ili $\mathbb{C}$, ili torusu, ili valjku. Natkrivanja $(\mathbb{C}, p)$ su u sva tri slučaja opisana u dokazu Teorema 6.22, kao i deck transformacije. Metrika $\tilde{g}$ na prostoru natkrivanja $\mathbb{C}$ je standardna euklidska,

$$ds = |dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2},\ \gamma(z) = 1.$$

Kako su deck transformacije u slučaju torusa i valjka translacije (v. dokaz Teorema 6.22 za opis grupe deck transformacija) te $\gamma \equiv 1$, po Propoziciji 7.16 slijedi da su deck transformacije izometrije obzirom na euklidsku metriku, te je, po Teoremu 7.38, s

$$g := p_* \tilde{g}$$

dobro definirana inducirana metrika na $\mathcal{S}$ (ravnini, torusu, valjku), koju nazivamo *plosnatom metrikom.*

Sljedeću propoziciju ne dokazujemo, ali se dokaz može naći u npr. [8, Lema 2.9]. Za sferne i euklidske plohe je dokaz direktan jer su im metrike lokalno euklidske, dok se netrivijalni dokaz provodi za Poincaréov disk.

Propozicija 7.39 (Potpunost Riemannove plohe)**.** *Svaka sferna resp. hiperbolička resp. euklidska Riemannova ploha je potpuna obzirom na sfernu resp. Poincaréovu resp. plosnatu metriku.*

Poglavlje 8

Globalna dinamika holomorfnih iteracija na $\overline{\mathbb{C}}$

8.1 Normalne i ekvikontinuirane familije

Prisjetimo se, na prostoru neprekidnih funkcija $f \in \mathcal{C}(X,Y)$, gdje su X, Y topološki prostori, *compact-open topologija* se zadaje podbazom:

$$V(K;U) := \{f : X \to Y : \ f(K) \subseteq U\}, \ K \subseteq X \text{ kompaktan }, \ U \subseteq Y \text{ otvoren}\}.$$

Ako je Y dodatno metrički prostor, compact-open topologija se podudara s *topologijom uniformne konvergencije po kompaktima* (topologija *lokalno uniformne konvergencije*):

$$\begin{aligned} &F_n \to F \text{ u compact-open topologiji akko,} \\ &\qquad\qquad \text{za svaki kompakt } K \subseteq X,\ F_n|_K \to F|_K \text{ uniformno na } K. \end{aligned}$$

Napomena 8.2. Implicitno time kažemo da, u slučaju da su X, Y metrizabilni prostori, topologija uniformne konvergencije na $\mathcal{C}(X,Y)$ ovisi samo o topološkoj strukturi prostora X i Y, a ne o izboru metrika koje generiraju navedene topologije!

Definicija 8.3 (Normalna familija, [8, 3])**.** *Neka su X, Y metrički prostori. Familiju $\mathcal{F}$ preslikavanja $f : X \to Y$ nazivamo* normalnom *ako, za svaki niz $(f_n)_n$, $f_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$, postoji podniz koji:*

1. *konvergira uniformno po kompaktima na X, ili*
2. *divergira[1] uniformno po kompaktima na X.*

[1] Kažemo da niz $(f_k)_k$, $f_k : X \to Y$, *divergira uniformno po kompaktima* ako slike svakog kompaktnog podskupa od X eventualno napuštaju svaki kompakt od Y. Preciznije, ako za svaka dva kompakta $K \subseteq X$ i $V \subseteq Y$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $f_k(K) \cap V = \emptyset$, za svaki $k \geq k_0$.

Zapravo možemo zamišljati da je 2. ekvivalentno uniformnoj konvergenciji niza $(f_k)_k$ po kompaktima u ∞ nakon kompaktifikacije, pa je taj zahtjev na neki način sličan zahtjevu konvergencije iz 1.

Napomena 8.4. Ako je prostor Y u kodomeni kompaktan, zahtjev 2. iz Definicije 8.3 nije ostvariv, pa zahtjevi 1. i 2. u definiciji normalne familije prelaze samo u zahtjev 1.

Definicija 8.5 (Ekvikontinuirane familije, [20]). *Neka su* (X, d_1), (Y, d_2) *metrički prostori. Za familiju* $\mathcal{F}$ *funkcija* $f : X \to Y$ *kažemo da je* ekvikontinuirana *u točki* x_0 *ako, za svaki* $\varepsilon > 0$, *postoji* $\delta > 0$ *takav da*

$$y \in X,\ d_1(y, x_0) < \delta \ \Rightarrow\ d_2(f(y), f(x_0)) < \varepsilon, \quad \textit{za svaki } f \in \mathcal{F}.$$

Kažemo da je familija $\mathcal{F}$ ekvikontinuirana na otvorenom $U \subseteq X$ *ako je ekvikontinuirana u svakoj točki od* U.

8.5.1 Montelov teorem

U ovoj sekciji ne radimo dokaze; dokazi [3, 8] mogu biti *projektni zadatak.*

Teorem 8.6 (Normalnost familije holomorfnih funkcija hiperboličkih ploha, [8]). *Svaka familija* $\mathcal{F}$ *holomorfnih funkcija* $f : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$, *gdje su* $\mathcal{S}$ *i* $\mathcal{T}$ *hiperboličke Riemannove plohe, je normalna.*

Teorem 8.6 nećemo dokazivati. Dokaz se može naći u [8]. Ovdje ćemo dokazati samo oslabljenu verziju Teorema 8.6 za modelni hiperbolički prostor $\mathbb{D}$:

Teorem 8.7 (Denjoy-Wolff teorem, [3]). *Svaka familija holomorfnih preslikavanja s* $\mathbb{D}$ *na* $\mathbb{D}$ *je ekvikontinuirana:*

(a) u Poincaréovoj metrici na $\mathbb{D}$,

(b) u sfernoj metrici, ako promatramo $\mathbb{D} \subseteq \overline{\mathbb{C}}$

U dokazu koristimo Lemu 8.9 i Zadatak 8.8.

Zadatak 8.8. *Na disku* $\mathbb{D}$ *je Poincaréova metrika* ρ *lokalno jako ekvivalentna sfernoj metrici* d, *kad gledamo* $\mathbb{D} \subseteq \overline{\mathbb{C}}$. *Preciznije,* $d(z, w) \leq \rho(z, w)$, z, $w \in \mathbb{D}$. *Oko svake točke* $z_0 \in \mathbb{D}$ *postoji* $k > 0$ *i disk* $\mathbb{D}_{z_0} \subseteq \mathbb{D}$ *oko* z_0 *(u sfernoj metrici) takav da vrijedi* $\rho(z, w) \leq kd(z, w)$, $z, w \in \mathbb{D}_{z_0}$.

Rješenje. Pokazati po definiciji pojedinih metričkih tenzora i definiciji udaljenosti točaka na Riemannovoj plohi.

Lema 8.9 (Varijanta Schwarzove leme za hiperbolički disk, [3]). *Za holomorfnu funkciju* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *vrijedi*

$$d(f(z), f(w)) \leq d(z, w),\ \ z, w \in \mathbb{D},$$

gdje je d *Poincaréova metrika na* $\mathbb{D}$.

Dokaz. Neka su z, $w \in \mathbb{D}$. Neka su h, $k \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ takvi da $h(0) = z$, $k(0) = f(z)$. Po Propoziciji 7.27 su h, k izometrije obzirom na Poincaréovu metriku na $\mathbb{D}$. Stavimo

$$w_1 := h^{-1}(w),\ \ w_1' := k^{-1}(f(w)).$$

Preslikavanje $k^{-1} \circ f \circ h : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ zadovoljava: $k^{-1} \circ f \circ h(0) = 0$ i $k^{-1} \circ f \circ h(w_1) = w_1'$. Po Schwarzovoj lemi za disk (Lema 5.11) je

$$|w_1'| \leq |w_1|. \tag{8.9.1}$$

Kako su dijametralne linije od $\mathbb{D}$ geodetske krivulje Poincaréovog diska, (8.9.1) te izraz za Poincaréov tenzor povlače da je

$$d(0, w_1') \leq d(0, w_1)$$

u Poincaréovoj metrici d. Sada, kako su h i k izometrije, $d(f(z), f(w)) = d(k(0), k(w_1')) = d(0, w_1') \leq d(0, w_1) = d(h(0), h(w_1)) = d(z, w)$. □

Dokaz Teorema 8.7. Dio (a) je direktna posljedica Leme 8.9. Dio (b) slijedi iz (a) i jake lokalne ekvivalencije sferne i Poincaréove metrike iz Zadatka 8.8. □

Teorem 8.10 (Montelov teorem, [8])**.** *Neka je $\mathcal{S}$ Riemannova ploha i neka je $\mathcal{F}$ familija holomorfnih funkcija $f : \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{C}}$ koja ne pogađa*[2] *3 različite točke sfere. Tada je $\mathcal{F}$ normalna familija.*

Skica dokaza. Dokaz je posljedica Teorema 8.6 i Propozicije 6.31 o sferi s tri rupe. Detaljnije u npr. [8]. □

8.11 Definicija Fatouovog i Julievog skupa[3]

Definicija 8.12 (Fatouov skup, [8])**.** *Neka je $\mathcal{S}$ Riemannova ploha te $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ holomorfna, nekonstantna funkcija.* Fatouov skup *funkcije f, u oznaci $\mathcal{F}(f)$, je unija svih otvorenih podskupova $U \subseteq \mathcal{S}$ takvih da je familija iteracija funkcije f na U,*

$$\mathcal{F}_U := \{f^{\circ n}|_U : U \to \mathcal{S},\ n \in \mathbb{N}\},$$

normalna familija.

Napomena 8.13. Fatouov skup $\mathcal{F}(f)$ možemo definirati i kao *maksimalni*[4] otvoreni podskup U od $\mathcal{S}$ takav da je familija iteracija $\mathcal{F}_U = \{f^{\circ n}|_U :\ n \in \mathbb{N}\}$ normalna. Takav maksimalni otvoreni skup je jedinstven jer je proizvoljna unija otvorenih skupova otvoren skup!

Primijetimo i da, oko svake točke $\mathcal{F}(f)$, postoji otvorena okolina $V \subseteq \mathcal{F}(f)$ takva da je $\mathcal{F}_V$ normalna.

Definicija 8.14 (Juliev skup, [8])**.** *Neka je $\mathcal{S}$ Riemannova ploha te $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ holomorfna, nekonstantna funkcija.* Juliev skup *funkcije f, u oznaci $\mathcal{J}(f)$, definira se kao komplement Fatouovog skupa od f, t.j.*

$$\mathcal{J}(f) := \mathcal{S} \setminus \mathcal{F}(f).$$

[2]Preciznije, postoje a, b, $c \in \overline{\mathbb{C}}$, međusobno različite, takve da je $f(\mathcal{S}) \subseteq \overline{\mathbb{C}} \setminus \{a, b, c\}$, za sve $f \in \mathcal{F}$.

[3]Gaston M. Julia(1893-1978) i Pierre Fatou (1878-1929) su bili francuski matematičari s početka 20. stoljeća koji se smatraju začetnicima moderne holomorfne dinamike.

[4]Maksimalni u smislu da $\mathcal{F}_U$ nije ekvikontinuirana niti na jednom otvorenom pravom nadskupu od U.

Primijetimo da je $\mathcal{J}(f) \subseteq \mathcal{S}$ *zatvoren* skup, kao komplement otvorenog Fatouovog skupa.

8.14.1 Fatouovi i Julievi skupovi na sferi $\overline{\mathbb{C}}$

Mi ćemo promatrati iteracije holomorfnih (sjetimo se: racionalnih) preslikavanja $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$. Na $\overline{\mathbb{C}}$ uvijek podrazumijevamo *sfernu metriku* d. Sjetimo se da je ona lokalno euklidska.

Teorem 8.15 (*Arzela-Ascolijev* teorem na $\overline{\mathbb{C}}$, [20, 3])**.** *Neka je $\mathcal{F}$ neka familija neprekidnih funkcija $f : \Omega \subseteq \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, Ω otvoren i povezan. Tada je $\mathcal{F}$ normalna na $\Omega \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ ako i samo ako je ekvikontinuirana na Ω.*

Teorem ovdje nećemo dokazivati. Dokaz se može naći u [1].

Direktno iz Teorema 8.15, na sferi imamo sljedeću karakterizaciju Fatouovog i Julievog skupa preko ekvikontinuiranih familija:

Propozicija 8.16 (Karakterizacija Fatouovog skupa za holomorfne funkcije na $\overline{\mathbb{C}}$, [3])**.** *Neka $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfna. Fatouov skup $\mathcal{F}(f)$ je maksimalni otvoreni skup $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ takav da je familija iteracija $\mathcal{F}_U$ ekvikontinuirana.*

Iz Propozicije i Definicije 8.5 ekvikontinuirane familije lako se vidi geometrijska interpretacija skupova $\mathcal{F}(f)$ i $\mathcal{J}(f)$:

- $\mathcal{F}(f) \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ je skup svih točaka $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ takvih da sve orbite od f s početnom točkom 'blizu' z_0, $\mathcal{O}_f(z) := \{f^{\circ n}(z) : \ n \in \mathbb{N}_0\}$, $z \approx z_0$, ostaju pod iteracijama blizu orbite $\mathcal{O}^f(z_0)$ od z_0;
- $\mathcal{J}(f) \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ je skup svih točaka sfere koje pokazuju *osjetljivost na početni uvjet*: orbite koje startaju 'blizu' z_0 pokazuju kvalitativno raznovrsna ponašanja pod iteracijama (u vremenu).

Primjer 9.

1. Za $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfnu, gdje je $\mathbb{D} \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ sa *sfernom* metrikom:
$$\mathcal{F}(f) = \mathbb{D},\ \mathcal{J}(f) = \emptyset.$$
Naime, po Teoremu 8.15, tražimo točke $z_0 \in \mathbb{D}$ za koje je familija iteracija $\mathcal{F} := \{f^{\circ n}(z_0) : \ n \in \mathbb{N}\}$, ekvikontinuirana. No, po Teoremu 8.7, je familija iteracija ekvikontinuirana (u sfernoj metrici) na čitavom $\mathbb{D}$.
2. $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfna, gdje je $\mathbb{D}$ *Poincaréov disk*. Primijetimo da Poincaréov disk $\mathbb{D}$ nije uložen u sferu sa sfernom metrikom, pa ne možemo direktno koristiti karakterizaciju preko ekvikontinuiranosti iz Teorema 8.15, već koristimo Definiciju 8.12 Fatouovog skupa preko normalnih familija. No, po Teoremu 8.6 je
$$\mathcal{F}(f) = \mathbb{D},\ \mathcal{J}(f) = \emptyset.$$
3. $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, $f(z) = z^2$.
Familija iteracija of f je:
$$\mathcal{F} = \{f^{\circ n}(z) = z^{2^n} : \ n \in \mathbb{N}\}.$$
Razlikujemo 3 slučaja:

- $z \in \mathbb{D}$.
  Za $z \in \mathbb{D}$ se lako provjeri da $z^{2^n} \to 0$ uniformno na svakom $\mathbb{D}_r \subseteq \mathbb{D}$, $r < 1$, specijalno, lokalno uniformno (jer za svaki $K \subseteq \mathbb{D}$ kompaktan postoji $r < 1$ takav da je $K \subseteq \mathbb{D}_r$). Stoga je $\{z^{2^n}|_{\mathbb{D}} : \ n \in \mathbb{N}\}$ normalna familija, te je
  $$\mathbb{D} \subseteq \mathcal{F}(f).$$
- $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.
  Za $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$ lako se provjeri da $z^{2^n} \to \infty$ uniformno na svakom $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}_r \subseteq \mathbb{D}$, $r > 1$, dakle, uniformno po kompaktima u $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Naime, $\sigma \circ z^{2^n} \circ \sigma = z^{2^n} \to 0$ uniformno po kompaktima u $\mathbb{D}$. Stoga je $\{z^{2^n}|_{\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}} : \ n \in \mathbb{N}\}$ normalna familija, te je
  $$\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}} \in \mathcal{F}(f).$$
- $z \in \mathbb{S}^1$.
  Neka je $z_0 \in \mathbb{S}^1$. Pokažimo da niti jedan otvoreni skup U oko z_0 ne pripada $\mathcal{F}(f)$, iz čega slijedi da
  $$\mathbb{S}^1 \cap \mathcal{F}(f) = \emptyset.$$
  Naime, pretpostavimo da niz restrikcija $z^{2^n}|_U$ konvergira uniformno po kompaktima na U. Limes je tada holomorfna[5], specijalno neprekidna, funkcija f na U. Međutim, točke $z \in U \cap \mathbb{D}$ zadovoljavaju $z^{2^n} \to 0$, dok točke $z \in U \cap (\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}})$ zadovoljavaju $z^{2^n} \to \infty$. Zato je $f|_{U\cap\mathbb{D}} \equiv 0$, a $f|_{U\cap(\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{\mathbb{D}})} \equiv \infty$, pa duž $\mathbb{S}^1 \cap U$ funkcija f ima prekid, što je kontradikcija. Dakle,
  $$\mathbb{S}^1 \subseteq \mathcal{J}(f).$$

Konačno,
$$\mathcal{F}(f) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{S}^1, \ \mathcal{J}(f) = \mathbb{S}^1.$$

4. $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, $f(z) = z^2 - 2$ [5].
   Preslikavanje $h(z) = z + 1/z$ je biholomorfizam $h : \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$ (pokažite!). Također, h konjugira f s z^2 na $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$:
   $$h^{-1} \circ f \circ h(z) = z^2, \ z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}.$$
   Kako je pokazano u Primjeru 3. gore, iteracije z^2 uniformno po kompaktima divergiraju na $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, tj. uniformno po kompaktima konvergiraju k ∞ na $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Kako je $h(\infty) = \infty$ i $f(\infty) = \infty$, iteracije of f uniformno po kompaktima konvergiraju k ∞ na $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-2, 2]$. Stoga je
   $$\overline{\mathbb{C}} \setminus [-2, 2] \subseteq \mathcal{F}(f).$$

[5] *Weierstrassov teorem o lokalno uniformnom limesu holomorfnih funkcija*: Neka niz $(f_n)_n$, $f_n : U^{\text{otv.}} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfne, konvergira uniformno po kompaktima na U, te neka je $f : U \to \mathbb{C}$ uniformni limes. Tada je f holomorfna na U. Nadalje, $f_n' \to f'$, $n \to \infty$, uniformno po kompaktima na U.

OPREZ! Dokaz se temelji na Cauchyjevoj integralnoj formuli u $\mathbb{C}$, te isti zaključak za realne funkcije jedne realne varijable NE vrijedi.

Kako je $f[-2,2] \subseteq [-2,2]$, argumentom kao u 3. preko Weierstrassovog teorema se pokazuje da $[-2,2] \in \mathcal{J}(f)$. Stoga je

$$\mathcal{F}(f) = \overline{\mathbb{C}} \setminus [-2,2],\ \mathcal{J}(f) = [-2,2].$$

Napomena 8.17. Funkcije $f(z) = z^2$ i $f(z) = z^2 - 2$ iz Primjera 9 su rijetki primjeri holomorfne funkcije na sferi sa glatkim Julievim skupom. Naime, takvi skupovi su obično fraktalni, *sebi-slični* skupovi, i to već u slučaju kvadratne funkcije:

$$F(z) = z^2 + c,\ c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Pokažimo nekoliko primjera takvih skupova nacrtanih pomoću paketa *Mandel*: SLIKE!!!

8.18 Svojstva i opis Fatouovih i Julievih skupova

Propozicija 8.19 (Invarijantnost, [8, 3])**.** *Neka je $\mathcal{S}$ kompaktna Riemannova ploha, te $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ holomorfna nekonstantna funkcija. Skupovi $\mathcal{F}(f)$ i $\mathcal{J}(f)$ su* pozitivno i negativno invarijantni za f*:*

1. $f^{\leftarrow}(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}(f)$, $f^{\leftarrow}(\mathcal{J}(f)) = \mathcal{J}(f)$,
2. $f(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}(f)$, $f(\mathcal{J}(f)) = \mathcal{J}(f)$,

Napomena 8.20. Drugim riječima, Propozicija 8.19 dokazuje da su $\mathcal{F}(f)$ i $\mathcal{J}(f)$ *potpuno invarijantni*[6] za f.

Dokaz. Dokazat ćemo gornje tvrdnje za $\mathcal{F}(f)$, a tvrdnje za $\mathcal{J}(f)$ tada direktno slijede komplementiranjem. Za pokazati tvrdnje 1. i 2., dovoljno je pokazati:

(a) $z \in \mathcal{F}(f) \ \Rightarrow f^{\leftarrow}(z) \subseteq \mathcal{F}(f)$,

(b) $z \in \mathcal{F}(f) \ \Rightarrow f(z) \in \mathcal{F}(f)$.

Neka je $z \in \mathcal{F}(f)$. Tada postoji otvorena okolina U točke z, te podniz familije iteracija $(f^{\circ n_k})_k$ koji na U konvergira uniformno po kompaktima.

(a) Zbog neprekidnosti funkcije f je skup $V := f^{\leftarrow}(U)$ otvorena okolina svake točke $f^{\leftarrow}(z)$. Kako je $f(V) = U$, slijedi da je $f^{\circ(n_k+1)}|_V = f^{\circ n_k}|_U$, te podniz $(f^{\circ(n_k+1)})_k$ na V konvergira uniformno po kompaktima (zbog neprekidnosti f, slika kompakta je kompakt).

(b) Po Teoremu 5.19, $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ je lokalno otvoreno preslikavanje (po kartama). Stoga, za dovoljno 'malu' otvorenu okolinu U oko z je $V := f(U)$ otvorena okolina od $f(z)$. Analogno kao i gore, podniz $(f^{\circ(n_k-1)})_k$ konvergira na V uniformno po kompaktima (zbog neprekidnosti f, praslika kompakta u V je kompakt u U).

U oba slučaja je V otvorena okolina $f^{\leftarrow}(z)$ resp. $f(z)$ na kojoj je familija iteracija $\{f^{\circ n} : \ n \in \mathbb{N}\}$ normalna, pa je $f^{\leftarrow}(z) \in \mathcal{F}(f)$ resp. $f(z) \in \mathcal{F}(f)$. $\square$

[6] Za skup $U \subseteq X$ kažemo da je *potpuno invarijantan* za $f : X \to X$ ako je $f(U) \subseteq U$ i $f(X \setminus U) \subseteq X \setminus U$. Ekvivalentno (pokažite!), ako je $f^{\leftarrow}(U) = U$ (što implicira i $f(U) = U$, pa je potpuna invarijantnost ekvivalentna pozitivnoj + negativnoj invarijantnosti). Vrijedi karakterizacija: U je potpuno invarijantan ako i samo ako vrijedi: $z \in U \ \Leftrightarrow \ f(z) \in U$.

Propozicija 8.21 ([8])**.** *Neka je $\mathcal{S}$ kompaktna Riemannova ploha, te $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ holomorfna nekonstantna funkcija. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:*

$$\mathcal{F}(f^{\circ n}) = \mathcal{F}(f), \quad \mathcal{J}(f^{\circ n}) = \mathcal{J}(f).$$

Dokaz. Dokaz slijedi direktno po definiciji Fatouovog skupa i normalnih familija. □

8.21.1 "Lokalna dinamika": periodičke i fiksne točke holomorfnih preslikavanja

U ovom poglavlju, prema [8], definirat ćemo tipove periodičnih i fiksnih točaka holomorfnog preslikavanja $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, te pokazati da tzv. *paraboličke* i *odbojne hiperboličke* fiksne i periodičke točke pripadaju skupu $\mathcal{J}(f)$, dok tzv. *privlačne (jako) hiperboličke* pripadaju skupu $\mathcal{F}(f)$. Razlog tome je vidljiv već u dinamici (ponašanju iteracija) u neposrednoj okolini tih točaka. Kod paraboličke fiksne točke, otvoreni disk oko točke može se prekriti preklapajućim naizmjenično privlačnim resp. odbojnim otvorenim sektorima na kojima se iteracije približavaju resp. udaljavaju od fiksne točke. Hiperboličke točke imaju na čitavom disku oko točke ili isključivo privlačnu ili isključivo odbojnu dinamiku. Detaljnije ćemo lokalnu dinamiku u okolini raznih tipova fiksnih točaka objasniti u Poglavlju 9.

Definicija 8.22 (Periodička točka)**.** *Neka je $\mathcal{S}$ Riemannova ploha, te $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ holomorfno preslikavanje. Točku $z_0 \in \mathcal{S}$ za koju postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $f^{\circ m}(z_0) = z_0$ nazivamo* periodičkom točkom *preslikavanja f. Najmanji takav $m \in \mathbb{N}$ nazivamo* temeljnim periodom[7] *točke z_0.*

Napomena 8.23.

1. Ako je $m = 1$, točku z_0 za koju vrijedi $f(z_0) = z_0$ nazivamo *fiksnom točkom* preslikavanja f.
2. Vidi se: z_0 je periodička točka preslikavanja $f : \mathcal{S} \to S$ perioda $m \in \mathbb{N}$ ako i samo ako je z_0 fiksna točka m.-te iteracije od f, $f^{\circ m} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$.
3. Neka je z_0 periodička točka od f temeljnog perioda $m \in \mathbb{N}$. Njezina orbita

$$\mathcal{O}^f(z_0) = \Big\{ z_0,\ f(z_0), \ldots, f^{\circ(m-1)}(z_0) \Big\}$$

   je konačna, te je nazivamo *periodičkom orbitom* preslikavanja f, temeljnog perioda m. Primijetimo da su sve točke te periodičke orbite periodičke točke od f temeljnog perioda m.
4. Multiplikator periodičke točke z_0 je *lokalno svojstvo* (tj. ovisi samo o *klici* funkcije f u proizvoljno maloj okolini z_0, v. Zadatak 8.26).

Definicija 8.24 (Multiplikator periodičke točke, [8])**.** *Neka je $z_0 \in \mathcal{S}$ periodička točka $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ temeljnog perioda $m \in \mathbb{N}$. Broj $\lambda \in \mathbb{C}$ definiran s:*

$$\lambda := (f^{\circ m})'(z_0) := f'(z_{m-1}) \cdot f'(z_{m-2}) \cdots f'(z_0),$$

[7]Primijetimo da su tada i km, $k \in \mathbb{N}$, periodi od z_0 ($f^{\circ km}(z_0) = z_0,\ k \in \mathbb{N}$).

gdje su $z_i := f^{\circ i}(z_0)$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$, *a* f *predstavlja preslikavanje na plohi u* bilo kojem *paru karata oko pojedinih točaka* z_i, *nazivamo* multiplikatorom *periodičke točke* z_0 (*ili: periodičke orbite* $\mathcal{O}^f(z_0)$, *vidi Zadatak 8.26*).

Sljedeća dva zadatka pokazuju da je Definicija 8.24 multiplikatora *dobra*:

Zadatak 8.25. *Pokažite da je definicija multiplikatora* λ *periodičke točke* z_0 *neovisna o izboru karata u okolini pojedinih točaka* z_i, $i = 0, \ldots, m-1$.

Zadatak 8.26. *Provjerite da je multiplikator* λ *jednak za sve točke periodičke orbite* $\mathcal{O}^f(z_0)$, *pa stoga naziv* multiplikator periodičke orbite *ima smisla, i jednak je multiplikatoru* bilo koje *točke orbite. Drugim riječima,*

$$\lambda = f'(z_i),\ i = 0, \ldots, m-1.$$

Specijalno, u slučaju $m = 1$ kad je z_0 *fiksna točka od* f, multiplikator fiksne točke z_0 je:

$$\lambda = f'(z_0)$$

(u proizvoljnom paru karata).

Klasifikacija periodičkih točaka prema multiplikatoru

Definicija 8.27 (Tipovi periodičkih točaka, [5, 8]). *Neka je* $z_0 \in \mathcal{S}$ *periodička točka preslikavanja* $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, *te neka je* $\lambda \in \mathbb{C}$ *multiplikator od* z_0. *Kažemo da je periodička točka* z_0 *ili periodička orbita* $\mathcal{O}^f(z_0)$:

- jako hiperbolička privlačna (engl. *attracting*) *ako je* $\lambda = 0$;
- hiperbolička privlačna *ako je* $0 < |\lambda| < 1$;
- hiperbolička odbojna (engl. *repelling*) *ako je* $|\lambda| > 1$;
- neutralna *ako je* $|\lambda| = 1$.

U neutralnom slučaju, kad je $|\lambda| = 1$, razlikujemo nekoliko slučajeva:

- *racionalno neutralna periodička točka*: $\lambda = e^{2\pi i \frac{p}{q}}$, $p, q \in \mathbb{Z}$ (λ korijen iz jedinice);
- *iracionalno neutralna periodička točka*: $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Definicija 8.28 (Parabolička periodička točka). *Za racionalno neutralnu periodičku točku* z_0 *preslikavanja* f *kažemo da je* parabolička *ako je* $f^{\circ n}(z_0) \neq \mathrm{id}$, $n \in \mathbb{N}$.

Napomena 8.29 (Taylorov razvoj oko fiksne točke). Neka je $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ s *fiksnom točkom* z_0 ($f(z_0) = z_0$) holomorfna na nekoj (proizvoljno maloj) okolini z_0. B.S.O.M.P.[8] $z_0 = 0$. Taylorov razvoj oko 0 nam daje:

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + a_2 z^2 + o(z^3) = \lambda z + a_2 z^2 + o(z^2),\ z \to 0,$$

[8]Promatramo $\tilde{f}$ holomorfnu u okolini 0, definiranu s:

$$\tilde{f}(z) := f(z + z_0) - z_0.$$

Očito je $\tilde{f}(0) = 0$ i $\tilde{f}'(0) = f'(z_0)$, pa multiplikator fiksne točke ostaje nepromijenjen.

gdje je $\lambda = f'(0)$ multiplikator fiksne točke $z_0 = 0$ iz Definicije 8.24.
Na primjer,

- $f(z) = \frac{z}{1-z} = z + z^2 + o(z^2)$, $z_0 = 0$ *parabolička fiksna točka*,

  $$f^{\circ n}(z) = \frac{z}{1-nz},\ n \in \mathbb{N},\quad z \approx 0;$$
  $$\Rightarrow f(-0.01) = -\frac{1}{101} > -0.01,\ f^{\circ n}(-0.01) \to 0-,\ n \to \infty,$$
  $$f(0.001) = \frac{1}{99} > 0.001,\ f^{\circ 100}(0.01) = +\infty,\ f^{\circ n}(0.01) \to 0-,\ n \to \infty.$$

  Primijetimo: negativna realna os je privlačni smjer, a pozitivna odbojni.
- $f(z) = \frac{1}{3}z$, $z_0 = 0$ *privlačna hiperbolička fiksna točka*,

  $$f^{\circ n}(z) = \frac{1}{3^n}z \to 0,\ n \to \infty,\ \forall z \approx 0,$$
- $f(z) = z^2$, $z_0 = 0$ *privlačna jako hiperbolička fiksna točka*,

  $$f^{\circ n}(z) = z^{2^n} \to 0,\ n \to \infty,\ \forall z \approx 0,$$
- $f(z) = e^{\sqrt{2}}z + z^3$, $z_0 = 0$ *iracionalno neutralna fiksna točka.*
  Linearni dio preslikavanja, $f_0(z) = e^{\sqrt{2}}z$, naziva se *iracionalnom rotacijom*, te je orbita $\mathcal{O}^{f_0}(z)$ svake točke $z \in \mathbb{C}$ gusta na kružnici radijusa $|z|$ (zadatak). No, ako dodamo nelinearne članove, dinamika oko 0 postaje vrlo složena te je uvelike neistražena, tzv. *hedgehog* dinamika [8].

Zadatak 8.30. *Odredite i klasificirajte (prema multiplikatorima) fiksne točke sljedećih holomorfnih preslikavanja Riemannove sfere:*

1. $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}},\ f(z) = 2z;$
2. $g : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}},\ g(z) = z^2 + z + 1.$

Rješenje.

1. Rješavanjem jednadžbe $f(z) = z$ na $\overline{\mathbb{C}}$ dobivamo dvije fiksne točke, $z_1 = 0$ i $z_2 = \infty$. Multiplikator od z_1 je $f'(0) = 2$, pa je $z_1 = 0$ hiperbolička odbojna fiksna točka. Multiplikator od z_2 računamo u karti oko ∞, kao $\tilde{f}'(0) = 1/2$, gdje je $\tilde{f}(w) = \frac{1}{2\frac{1}{w}} = \frac{1}{2}w$. Dakle, $z_2 = \infty$ je privlačna hiperbolička fiksna točka.

2. Rješavanjem jednadžbe $z^2 + z + 1 = z$ na $\overline{\mathbb{C}}$ dobivamo 3 fiksne točke: $z_{1,2} = \pm i$ i $z_3 = \infty$. Kao i u gornjem primjeru, multiplikatori točaka $\pm i$ su $\pm 2i + 1$, oboje modula $\sqrt{5}$, pa su $z_{1,2} = \pm i$ odbojne hiperboličke fiksne točke. Multiplikator točke ∞ je 0, pa je ∞ privlačna jako hiperbolička fiksna točka. □

Propozicija 8.31. *Neka je $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ holomorfna, te neka je $z_0 \in \mathcal{S}$ periodična točka od f temeljnog perioda $m \in \mathbb{N}$.*

1. Ako je z_0 privlačna (hiperbolička ili jako hiperbolička), postoji otvorena okolina $z_0 \in U$ takva da:

$$(f^{\circ m})^{\circ n}(z) = f^{\circ(mn)}(z) \to z_0,\ n \to \infty,$$

uniformno po kompaktima na U.

2. Ako je z_0 odbojna hiperbolička točka, postoji otvorena okolina $z_0 \in U$ takva da, za svaki $z \in U \setminus \{z_0\}$, postoji $n_z \in \mathbb{N}$ takav da

$$f^{\circ(mn)}(z) \notin U,\ n \geq n_z.$$

Dokaz. Funkcija $f^{\circ m} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ je holomorfna, s fiksnom točkom z_0 multiplikatora $\lambda = (f^{\circ m})'(z_0)$ (u kartama). Taylorovim razvojem $f^{\circ m}$ oko z_0 dobivamo:

$$f^{\circ m}(z) - z_0 = \lambda(z - z_0) + O((z - z_0)^2),\ z \to z_0. \tag{8.31.1}$$

1. Kako je $|\lambda| < 1$, uzmemo $\varepsilon > 0$ takav da $c := |\lambda| + \varepsilon < 1$. Za taj $\varepsilon > 0$ postoji otvorena okolina U od z_0 takva da je

$$|\mathcal{O}((z - z_0)^2| \leq \varepsilon |z - z_0|,\ z \in U. \tag{8.31.2}$$

Sada iz (8.31.1) slijedi:

$$|f^{\circ m}(z) - z_0| \leq (|\lambda| + \varepsilon)|z - z_0| = c|z - z_0|,\ z \in U.$$

Iteriranjem te nejednakosti dobivamo:

$$|f^{\circ(mn)}(z) - z_0| \leq c^n |z - z_0|,\ n \in \mathbb{N},\ z \in U.$$

Kako je $|z - z_0|$ omeđeno na kompaktima $z \in K \subseteq U$, te $c < 1$, slijedi da $f^{\circ(mn)}(z) \to z_0$, kad $n \to \infty$, uniformno po kompaktima na U.

2. Kako je $|\lambda| > 1$, uzmemo $\varepsilon > 0$ takav da $c := |\lambda| - \varepsilon > 1$. Kao i u 1., za taj $\varepsilon > 0$ postoji otvorena okolina U oko z_0 takva da vrijedi (8.31.2). Sad iz (8.31.1) slijedi

$$|f^{\circ m}(z) - z_0| \geq (|\lambda| - \varepsilon)|z - z_0| = c|z - z_0|,\ z \in U.$$

Iteriranjem dobivamo:

$$|f^{\circ(mn)}(z) - z_0| \geq c^n |z - z_0|,\ n \in \mathbb{N},\ z \in U.$$

Zbog $c > 1$, $c^n \to +\infty$ kad $n \to \infty$. Zbog $|z - z_0| \neq 0$ za svaki $z \in U \setminus \{z_0\}$, tvrdnja 2. slijedi. $\square$

Definicija 8.32 (Privlačni bazen periodičke točke/orbite)**.** *Neka je $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ holomorfna, te neka je $z_0 \in \mathcal{S}$ periodična točka od f temeljnog perioda $m \in \mathbb{N}$. Skup*

$$S(z_0) := \{z \in \mathcal{S} :\ f^{\circ(mn)}(z) \to z_0,\ n \to \infty\}$$

nazivamo privlačnim bazenom (*engl.* attracting basin) *ili* stabilnim skupom *periodičke točke z_0.*

Nadalje, skup

$$\mathcal{A} := \bigcup_{i=0,\dots,m-1} \{z \in \mathcal{S} :\ f^{\circ(mn)}(z) \to z_i\} = \bigcup_{i=0,\dots,m-1} S(z_i)$$

nazivamo privlačnim bazenom (stabilnim skupom) periodičke orbite $\mathcal{O}^f(z_0) = \{z_0, z_1, \dots, z_{m-1}\}$.

Primijetimo da je $f^{\circ(mn)}(z_0) = z_0,\ n \in \mathbb{N}$*, pa se* z_0 *uvijek nalazi u svom privlačnom bazenu. Nadalje, po Propoziciji 8.31, privlačni bazen privlačnih hiperboličkih periodičnih točaka sadrži i čitavi otvoreni disk oko te točke.*

Teorem 8.33 (Hiperboličke periodičke orbite i Juliev i Fatouov skup, [8])**.** *Neka je* $\mathcal{S}$ *kompaktna Riemannova ploha, te* $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ *holomorfna. Svaka privlačna (hiperbolička ili jako hiperbolička periodička orbita), kao i njezin privlačni bazen* $\mathcal{A}$*, sadržani su u Fatouovom skupu* $\mathcal{F}(f)$*. S druge strane, svaka odbojna hiperbolička periodička orbita sadržana je u* $\mathcal{J}(f)$*.*

Dokaz. Kako je z_0 periodička točka f temeljnog perioda m ako i samo ako je z_0 fiksna točka od $f^{\circ m}$, s istim multiplikatorom, te kako je, zbog kompaktnosti $\mathcal{S}$ (Propozicija 8.21), $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(f^{\circ m})$, dovoljno je teorem pokazati za fiksne točke.

Neka je z_0 privlačna (jako) hiperbolička fiksna točka od f. Po Propoziciji 8.31 1., postoji otvorena okolina U te točke na kojoj je konvergencija $f^{\circ n}(z) \to z_0$, uniformna po kompaktima na U, kad $n \to \infty$. Stoga je $\{f^{\circ n}|_U : \ n \in \mathbb{N}\}$ normalna familija, pa je $z_0 \in U \subseteq \mathcal{F}(f)$ po Definiciji 8.12.

Neka je sad $\mathcal{A}_{z_0} := \{z \in \mathcal{S} :\ f^{\circ n}(z) \to z_0\}$ atraktivni bazen od z_0. Neka je U okolina z_0 iz Propozicije 8.31 na kojoj je konvergencija iteracija k z_0 uniformna po kompaktima. Uzmimo $z \in \mathcal{A}_{z_0}$. Kako vrijedi $f^{\circ n}(z) \to z_0$, $n \to \infty$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $f^{\circ n}(z) \in U$, $n \geq n_0$. Upravo smo dokazali gore da je $U \subseteq \mathcal{F}(f)$. No $f^{\circ n_0}(z) \in U \subseteq \mathcal{F}(f)$ po Propoziciji 8.21 povlači da je i $z \in \mathcal{F}(f)$. Slijedi da je $\mathcal{A}_{z_0} \subseteq \mathcal{F}(f)$.

Konačno, neka je z_0 odbojna hiperbolička fiksna točka od f, te pretpostavimo suprotno: da je $z_0 \in \mathcal{F}(f)$. Tada postoji otvorena okolina V oko z_0 takva da $f^{\circ n}|_V$ konvergira uniformno po kompaktima, kad $n \to \infty$. Tada je, po Weierstrassovom teoremu,

$$g := \lim_{n\to\infty} f^{\circ n}|_V \tag{8.33.1}$$

holomorfna, specijalno neprekidna, funkcija na V, te je $z_0 \in V$. Međutim, $f^{\circ n}(z_0) = z_0$, $n \in \mathbb{N}$, pa je $g(z_0) = z_0$. Nadalje, po Propoziciji 8.31 2., postoji otvorena okolina U oko z_0 takva da iteracije svih točaka iz $U \setminus \{z_0\}$ u limesu napuštaju okolinu U. To je kontradikcija s neprekidnošću $g|_{U\cap V}$ definirane u (8.33.1). Dakle, $z_0 \in \mathcal{J}(f)$. □

Teorem 8.34 (Paraboličke periodičke orbite u Julievom skupu, [8])**.** *Neka je* $\mathcal{S}$ *kompaktna Riemannova ploha, te* $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ *holomorfna. Svaka parabolička periodička točka od* f *pripada Julievom skupu* $\mathcal{J}(f)$*.*

Dokaz. Kao i u dokazu prethodnog teorema, zbog Propozicije 8.21 dovoljno je teorem pokazati za paraboličku *fiksnu* točku. Dakle, neka je z_0 parabolička fiksna točka od f. Pokažimo: $z_0 \in \mathcal{J}(f)$.

Neka je $w = \varphi(z)$ lokalna karta oko $z_0 \in \mathcal{S}$ takva da $w = 0$ u $\mathbb{D}$ odgovara točki z_0, $\varphi(z_0) = 0$. Promatramo f u toj karti, $\tilde{f} := \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$, lokalno oko 0. Očito je $\tilde{f}(0) = 0$, te je $\tilde{f}$ holomorfna oko 0 kao kompleksna funkcija jedne kompleksne varijable.

Kako je z_0 parabolička fiksna točka, te je multiplikator neovisan o karti, postoje $p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^*$ takvi da je

$$\tilde{f}'(0) = e^{2\pi i \frac{p}{q}}.$$

Taylorov razvoj $\tilde{f}$ oko $w = 0$ daje:

$$\tilde{f}(w) = e^{2\pi i \frac{p}{q}} w + \sum_{k=2}^{\infty} a_k w^k,\ a_k \in \mathbb{C},$$

pri čemu red konvergira na nekom otvorenom disku oko 0, $w \approx 0$. Postoji $r \geq 2$ te $b_i \in \mathbb{C}$ takvi da je:

$$\tilde{f}^{\circ q}(w) = w + \sum_{i \geq r} b_i w^i,\ w \approx 0.$$

Pretpostavimo de je $b_r \neq 0$ (takav mora postojati jer $\tilde{f}^{\circ q} \neq \mathrm{id}$ po definiciji paraboličke točke). Iteracije $\tilde{f}^{\circ(qn)}$, $n \in \mathbb{N}$, su holomorfne klice oko 0, i vrijedi:

$$\tilde{f}^{\circ(qn)}(w) = w + n b_r w^r + o(w^r),\ w \approx 0.$$

Stoga

$$\frac{d^r}{dw^r} \tilde{f}^{\circ(qn)}|_{w=0} = r! \cdot n \cdot b_r \to \infty, \quad n \to \infty. \tag{8.34.1}$$

Zaključujemo da ne postoji otvorena okolina 0 i podniz niza $(\tilde{f}^{\circ(qn)})_n$ koji na toj okolini konvergira lokalno uniformno. Naime, u protivnom bi r.-te derivacije tog podniza u 0 konvergirale k r.-toj derivaciji njihovog limesa u 0, koji je po Weierstrassovom teoremu holomorfna funkcija, što je kontradikcija s (8.34.1). Po Definiciji 8.12, slijedi $0 \notin \mathcal{F}(\tilde{f})$, tj. $0 \in \mathcal{J}(\tilde{f})$. Dakle, $\{\tilde{f}^{\circ n} : n \in \mathbb{N}\}$ nije normalna familija na okolini 0. Stoga[9], niti $\{f^{\circ n} : n \in \mathbb{N}\}$ nije normalna familija na nekoj okolini z_0. Dakle, $z_0 \in \mathcal{J}(f)$. $\square$

Zadatak 8.35. *Ispitajte karakter fiksnih točaka racionalnog preslikavanja* $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, $f(z) = \frac{z}{z-1}$.

Rješenje. Rješavanjem jednadžbe $f(z) = z$ na sferi, izračunamo fiksne točke $z_1 = 0$ i $z_2 = 2$ preslikavanja f. Kako je $f'(0) = f'(2) = -1 = e^{2\pi i \frac{1}{2}}$, to su neutralne fiksne točke i kandidati za paraboličke fiksne točke. Ipak, primijetimo da je $f^{\circ 2} = \mathrm{id}$, pa je, po Propoziciji 8.21, $\mathcal{J}(f) = \mathcal{J}(f^{\circ 2}) = \mathcal{J}(\mathrm{id}) = \emptyset$. Neutralne fiksne točke zato nisu paraboličke, te Teorem 8.34 nije primijenjiv. $\square$

[9]Metrika $\varphi^* g$ koju gledamo na $\mathbb{D}$ je generirana Riemannovom metrikom g na $\mathcal{S}$, te ona očito inducira euklidsku topologiju na $\mathbb{D}$. Topologija lokalno uniformne konvergencije jednaka je compact-open topologiji, te po Napomeni 8.2 ne ovisi o izboru konkretne metrike koja generira euklidsku topologiju na $\mathbb{D}$, odnosno topologiju plohe $\mathcal{S}$ na kartama od $\mathcal{S}$, već samo o topologiji tih prostora.

8.35.1 Juliev i Fatouov skup holomorfnih funkcija na $\overline{\mathbb{C}}$

Prisjetimo se da su sve holomorfne funkcije $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ racionalne (Teorem 4.4). Sljedeća propozicija govori da Juliev i Fatouov skup mogu biti trivijalni *samo u slučaju racionalne funkcije stupnja* $\deg(f) = 1$.

Propozicija 8.36 (Racionalne funkcije stupnja ≥ 2, [8])**.** *Neka je $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ holomorfna t.d. je $\deg(f) \geq 2$. Tada je*

$$\mathcal{J}(f) \neq \emptyset.$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da je f racionalna funkcija takva da je $\deg(f) \geq 2$ te $\mathcal{F}(f) = \overline{\mathbb{C}}$. Tada postoji podniz niza iteracija $(f^{\circ n_k})_k$ koji konvergira, kad $k \to \infty$, uniformno na čitavoj sferi $\overline{\mathbb{C}}$, k holomorfnoj (*Weierstrass*), tj. racionalnoj, funkciji $g : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$. Razlikujemo dva slučaja:

- *g konstantna na* $\overline{\mathbb{C}}$. Neka je $g \equiv z_0$ na $\overline{\mathbb{C}}$, $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$. Zbog uniformne konvergencije na $\overline{\mathbb{C}}$, postoji disk $\mathbb{D}_{z_0}$ oko z_0 te $k_0 \in \mathbb{N}$ takvi da, za svaki $k \geq k_0$, $f^{\circ n_k}(\overline{\mathbb{C}}) \subseteq \mathbb{D}_{z_0}$ (za $z_0 = \infty$, sve gledamo u karti u ∞). Stoga su funkcije $f^{\circ n_k}|_{\mathbb{C}}$, $k \geq k_0$, omeđene, pa su, po *Liouvilleovom teoremu*, konstantne. To je kontradikcija, jer iteracije racionalne funkcije f ne mogu biti konstantne ako f nije konstantna.
- *g nije konstantna na* $\overline{\mathbb{C}}$. Pokažimo da tada, radi uniformne konvergencije na $\overline{\mathbb{C}}$, postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da, za sve $k \geq k_0$, je broj nultočaka od $f^{\circ n_k}$ na $\overline{\mathbb{C}}$ jednak broju nultočaka od g na $\overline{\mathbb{C}}$. S druge strane, za $\deg(f) \geq 2$ vrijedi da je $\deg(f^{\circ n_k}) = 2^{n_k} \to \infty$, kad $k \to \infty$. Iz toga slijedi da broj nultočaka of $f^{\circ n_k}$ na $\overline{\mathbb{C}}$ neograničeno raste kad $k \to \infty$, što je kontradikcija s konačnim brojem nultočaka od g.
  Gornju jednakost broja nultočaka pokazujemo preko *Principa argumenta*[10]. Gledamo u kartama na sferi. Lokalno oko svake točke, zbog uniformne konvergencije, postoji otvorena okolina U i indeks $k_0 \in \mathbb{N}$ takvi da je na U broj nultočaka od g jednak broju nultočaka od $f^{\circ n_k}$, za sve $k \geq k_0$. Naime, $\frac{(f^{\circ n_k})'}{f^{\circ n_k}} \to \frac{g'}{g}$ uniformo na $\overline{\mathbb{C}}$, pa tvrdnja slijedi po *Principa argumenta* budući da je broj nultočaka cjelobrojan. Familija okolina svih točaka čini pokrivač kompakta $\overline{\mathbb{C}}$, pa se pokrivač reducira na konačan potpokrivač. Zato postoji $\tilde{k}_0$, maksimum indeksa k_0 pridruženih elementima tog reduciranog pokrivača, takav da je broj nultočaka f^{n_k}, $k \geq \tilde{k}_0$, na $\overline{\mathbb{C}}$ jednak broju nultočaka od g na $\overline{\mathbb{C}}$.

□

[10] *Princip argumenta*: Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, te neka kontura γ (slika pozitivno orijentiranog zatvorenog puta bez samopresjeka) i njezina unutrašnjost leže u Ω. Neka je f holomorfna na Ω, bez nultočaka na γ. Tada je

$$N_\gamma(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz,$$

gdje N_γ označava broj nultočaka funkcije f strogo unutar γ.

Teorem 8.37 ([3, 8])**.** *Neka je $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ racionalna t.d.* $\deg(f) \geq 2$*. Tada je:*

- *ili $\mathcal{J}(f) = \overline{\mathbb{C}}$,*
- *ili $\mathcal{J}(f)$* tanak – $\mathrm{Int}(\mathcal{J}(f)) = \emptyset$.

Za dokaz je potrebna definicija iznimnog skupa *f (engl.* exceptional set*) i Lema 8.42 o njegovom kardinalitetu.*
Definirajmo relaciju ekvivalencije:

$$p,\, q \in \mathcal{S}, \quad p \sim q \quad \Leftrightarrow \quad \exists\; m,\; n \in \mathbb{N}_0 \;\; t.d. \;\; f^{\circ n}(p) = f^{\circ m}(q).$$

Klasu od p označavamo s $[p]$, i ona je jednaka tzv. dvostranoj f-orbiti (orbiti unaprijed i unazad[11] po f) od p*:*

$$[p] = \mathcal{O}^f(p) \cup \{q \in \mathcal{S} : f^{\circ n}(q) = p, \quad za \; neki \; n \in \mathbb{N}\}. \tag{8.37.1}$$

Propozicija 8.38. *Neka je $p \in \mathcal{S}$, $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$. Dvostrana f-orbita $[p]$ je najmanji[12] potpuno invarijantan skup koji sadrži p.*

Dokaz. Po definiciji $[p]$ (8.37.1) lako se pokaže da je potpuno invarijantan. Dalje pokazujemo da je svaki potpuno invarijantan skup koji sadrži p nadskup od $[p]$. To se lako vidi po karakterizaciji potpune invarijantnosti iz fusnote 6.

Korolar 8.39. *$U \subseteq \mathcal{S}$ potpuno invarijantan za $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ ako i samo ako*

$$U = \cup_{p \in U} [p].$$

Definicija 8.40 (Iznimna točka i skup, [3, 8, 20])**.** *Neka je $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$. Za točku $p \in \mathcal{S}$ kažemo da je* iznimna *ako joj je dvostrana orbita $[p]$ konačna. Skup svih iznimnih točaka od f nazivamo* iznimnim skupom *od f (engl.* exceptional set*), i označavamo s $\mathcal{E}(f) \subseteq \mathcal{S}$.*

Drugim riječima, po Korolaru 8.39, $\mathcal{E}(f)$ je unija svih konačnih potpuno invarijantnih skupova od f,

$$\mathcal{E}(f) = \bigcup_{p \in \mathcal{S},\ [p] \text{ konačan}} [p].$$

Propozicija 8.41. *Neka je $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$,* $\deg(f) \geq 2$*. Za $z \in \mathcal{E}(f)$ je $[z]$ periodička orbita, tj. postoji $k \in \mathbb{N}_0$ takav da je $f^{\circ k}(z) = z$ i*

$$[z] = \left\{ f^{\circ i}(z) : i \in \{0, 1, 2, \dots k\} \right\}.$$

Nadalje, ta periodička orbita je jako hiperbolička privlačna, te je $\mathcal{E}(f) \subseteq \mathcal{F}(f)$.

[11] f nije nužno bijekcija, pa orbita unazad nije jednoznačno određena!

[12] $[p]$ je presjek svih potpuno invarijantnih skupova koji sadrže p, tj. svaki drugi potpuno invarijantan skup koji sadrži p je nadskup od $[p]$

Dokaz. Lako se provjeri da je racionalna funkcija stupnja barem 2 surjekcija na sferi $\overline{\mathbb{C}}$ (provjerite!). Zato slijedi:

$$f([z]) = [z],\ \ z \in \overline{\mathbb{C}},$$

gdje surjektivnost osigurava $[z] \subseteq f([z])$, a suprotna nejednakost je istinita i bez pretpostavke surjektivnosti, po definiciji $[z]$. No $z \in \mathcal{E}(f)$, pa je $[z]$ konačan. Zato je $f|_{[z]} : [z] \to [z]$ permutacija. Kako je $[z]$ konačan skup iteracija, slijedi da je $[z]$ periodička orbita.

Kako je $[z]$ periodička orbita, svaka točka iz $[z]$ ima točno jednu prasliku, označimo je sa $\tilde{z} \in [z]$. S druge strane, zbog $\deg(f) = d \geq 2$, f je surjekcija na $\overline{\mathbb{C}}$ i svaka točka $z \in \overline{\mathbb{C}}$ ima točno $d \geq 2$ praslika u $\overline{\mathbb{C}}$ (s multiplicitetom, provjerite zašto!): za svaki $z \in \overline{\mathbb{C}}$ jednadžba

$$f(w) = z$$

ima točno $d \geq 2$ rješenja $w \in \overline{\mathbb{C}}$, računajući multiplicitet.

Stoga, $w = \tilde{z}$ je rješenje jednadžbe $f(w) = z$ *multipliciteta barem* 2, pa je $f'(\tilde{z}) = 0$ multiplikator periodičke točke $\tilde{z}$. No tada je po Zadatku 8.26 i multiplikator svih točaka u orbiti $[z]$, time i točke z, jednak 0. Dakle, orbita je jako hiperbolička privlačna. Sad po Teoremu 8.33 slijedi $\mathcal{E}(f) \subseteq \mathcal{F}(f)$. □

Lema 8.42 (O iznimnom skupu racionalnih preslikavanja sfere, [8])**.** *Neka je* $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ *racionalna t.d.* $\deg(f) \geq 2$*. Sve iznimne točke su jako hiperboličke privlačne periodičke točke, te vrijedi:*

$$\mathrm{card}(\mathcal{E}(f)) \leq 2.$$

Dakle, po Propoziciji 8.41 i Lemi 8.42, za racionalno presklikavanje sfere stupnja barem 2 je skup iznimnih točaka ili jako privlačna periodička orbita temeljnog perioda 2, ili se sastoji od jedne ili dvije jako privlačne fiksne točke, ili je prazan.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da je $\mathrm{card}(\mathcal{E}(f)) \geq 3$. Tada postoje barem 3 različite iznimne točke $z_{1,2,3} \in \mathcal{E}(f)$, $z_0 \neq z_1 \neq z_2$. Promotrimo skup

$$F := \bigcup_{i=1}^{3} [z_i].$$

Očito je U konačan, potpuno invarijantan skup koji sadrži točke $z_{1,2,3}$. Zbog surjektivnosti $[f]$, kao u dokazu Propozicije 8.41, dodatno vrijedi $f([z_i]) = z_i$, $i = 1, 2, 3$, pa je $f(F) = F$. Zbog potpune invarijantnosti je $f(\overline{\mathbb{C}} \setminus F) \subseteq \overline{\mathbb{C}} \setminus F$. Zbog $f(F) = F$ slijedi jednakost, $f(\overline{\mathbb{C}} \setminus F) = \overline{\mathbb{C}} \setminus F$. Skup F je konačan, pa i zatvoren jer je $\overline{\mathbb{C}}$ Hausdorffov prostor. Stoga je $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ otvoren podskup Riemannove sfere. Nadalje, po Propoziciji 6.31, $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ je hiperbolička ploha. Po Montelovom teoremu 8.10 je familija iteracija

$$\{f^{\circ n}|_{\overline{\mathbb{C}} \setminus F} :\ n \in \mathbb{N}_0\}$$

normalna familija. Stoga je, direktno po definiciji Fatouovog skupa,

$$\overline{\mathbb{C}} \setminus F \subseteq \mathcal{F}(f).$$

S druge strane, po Propoziciji 8.41 je $[z_i]$ jako hiperbolička periodička orbita, $i = 1, 2, 3$, pa je $[z_i] \subseteq \mathcal{F}(f)$, $i = 1, 2, 3$, po Teoremu 8.33. Stoga je

$$F = [z_1] \cup [z_2] \cup [z_3] \subseteq \mathcal{F}(f).$$

Dakle, $\mathcal{F}(f) = \overline{\mathbb{C}}$, što je kontradikcija s Propozicijom 8.36.

□

Zadatak 8.43 (Generalizacija Leme 8.42)**.** *Pokažite da zapravo vrijedi i sljedeća generalnija tvrdnja. Neka je* $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ *racionalna,* $\deg(f) \geq 2$*. Neka je* $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ *potpuno invarijantan i konačan. Tada je* $\mathrm{card}(U) \leq 2$*, te su sve točke u* U *jako hiperboličke privlačne periodičke točke te* $U \subseteq \mathcal{F}(f)$*.*

Uputa. Koristimo Korolar 8.39, te ponovimo i prilagodimo dokaz Leme 8.42 i Propozicije 8.41. Nemamo pretpostavku da je z iznimna točka, no $z \in U$ po Korolaru 8.39 mora biti periodička točka. Pokažite da je tada $[z]$ njezina periodička orbita (direktna generalizacija dokaza Propozicije 8.41).

Kao posljedicu Leme 8.42 i Zadatka 8.43, dobivamo neka svojstva Julievog skupa racionalnog preslikavanja sfere. Ta svojstva govore da je $\mathcal{J}(f)$ *velik*, usprkos tome što je po Teoremu 8.37 često *tanak*. Takva dihotomija je česta odlika samo-sličnih, fraktalnih skupova[13]. Osim sto su korolari od nezavisnog interesa, Korolare 8.44-8.45 također koristimo u dokazu Teorema 8.37 ispod.

Korolar 8.44 ([3])**.** *Neka je* $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ *racionalna,* $\deg(f) \geq 2$*. Tada je* $\mathcal{J}(f)$ *sadrži beskonačno mnogo različitih točaka.*

Dokaz. Po Napomeni 8.20 je $\mathcal{J}(f)$ potpuno invarijantan skup. Pretpostavimo suprotno, da je $\mathcal{J}(f)$ konačan. Tada se, po Zadatku 8.43, sastoji od jako hiperboličkih privlačnih periodičkih točaka, pa je, po Teoremu 8.33, podskup od $\mathcal{F}(f)$. Kontradikcija. □

Korolar 8.45 ([3])**.** *Neka je* $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ *racionalna,* $\deg(f) \geq 2$*. Tada* $\mathcal{J}(f)$ perfektan[14].

Dokaz. Neka je $J_0 \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ skup svih gomilišta $\mathcal{J}(f)$. Primijetimo, zbog zatvorenosti $\mathcal{J}(f)$ je $J_0 \subseteq \mathcal{J}(f)$. Kako je $\mathcal{J}(f)$ beskonačan i zatvoren, a $\overline{\mathbb{C}}$ kompaktan, po B-W karakterizaciji kompaktnosti slijedi da je $J_0 \neq \emptyset$. Po definiciji je J_0 zatvoren. Nadalje (provjerite!) je J_0 potpuno invarijantan, pa, po Zadatku 8.43, ne može biti konačan (jer bi ležao u $\mathcal{F}(f) \subseteq \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{J}(f)$). Sad je $J_0 \subseteq \mathcal{J}(f)$ beskonačan i potpuno invarijantan. Njegov komplement, $\overline{\mathbb{C}} \setminus J_0$, je po fusnoti

[13] Sjetite se Cantorovog skupa koji je i *velik* i *mali*: perfektan, neprebrojiv, no ujedno i Lebesqueove mjere 0!

[14] Za skup $U \subseteq X$, gdje je X topološki prostor, kažemo da je *perfektan* ako je svaka točka od U gomilište skupa U. Drugim riječima, ako U nema izoliranih točaka.

6. također potpuno invarijantan. Nadalje, on je otvoren i, zbog beskonačnosti J_0, ne sadrži barem tri različite točke $\overline{\mathbb{C}}$, pa je po Propoziciji 6.31 hiperbolička ploha. Zbog potpune invarijantnosti, $f^{\circ n}|_{\overline{\mathbb{C}}\setminus J_0} : \overline{\mathbb{C}} \setminus J_0 \to \overline{\mathbb{C}} \setminus J_0,\ n \in \mathbb{N}$. Po Montelovom teoremu slijedi da je familija iteracija normalna na $\overline{\mathbb{C}} \setminus J_0$, tj. $\overline{\mathbb{C}} \setminus J_0 \subseteq \mathcal{F}(f)$, pa je $J_0 \supseteq \mathcal{J}(f)$. Slijedi $J_0 = \mathcal{J}(f)$. □

Dokaz Teorema 8.37. (Po [3]). Stavimo

$$F := \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathrm{Int}(\mathcal{J}(f)).$$

Tad je

$$F = \mathcal{F}(f) \cup \partial\mathcal{J}(f),$$

gdje $\partial\mathcal{J}(f)$ označava rub Julievog skupa. Očito je $\partial\mathcal{J}(f) \subseteq \mathcal{J}(f)$ zbog zatvorenosti $\mathcal{J}(f)$. Očito je F zatvoren i potpuno invarijantan. Naime, $\mathcal{F}(f)$ je potpuno invarijantan i $\partial\mathcal{J}(f) = \mathcal{F}(f) \cap \mathcal{J}(f)$ je potpuno invarijantan kao presjek dva takva. Sad imamo dvije mogućnosti:

- F konačan. Po Zadatku 8.43 je $F \subseteq \mathcal{F}(f)$. Stoga je $\partial\mathcal{J}(f) = \emptyset$. No tad je $\mathcal{J}(f) = \mathrm{Int}(\mathcal{J}(f))$, pa je $\mathcal{J}(f)$ i otvoren i zatvoren u $\overline{\mathbb{C}}$. Dakle, $\mathcal{J}(f) = \emptyset$ ili $\mathcal{J}(f) = \overline{\mathbb{C}}$. Po Propoziciji 8.36 je $\mathcal{J}(f) \neq \emptyset$, pa slijedi $\mathcal{J}(f) = \overline{\mathbb{C}}$.
- F beskonačan. Kao u dokazu Korolara 8.45, njegov komplement $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ je otvoren, potpuno invarijantan skup (kao komplement potpuno invarijantnog) koji ne sadrži barem tri različite točke $\overline{\mathbb{C}}$, pa je $\overline{\mathbb{C}} \setminus F \subseteq \mathcal{F}(f)$. Tad je $F \supseteq \mathcal{J}(f)$, pa je $\mathcal{J}(f) \subseteq \partial\mathcal{J}(f)$. Slijedi $\mathrm{Int}(\mathcal{J}(f)) = \emptyset$.

□

8.45.1 Kako nacrtati Juliev skup racionalne funkcije na sferi na računalu?

Teorem 8.46 (Generiranje Julievog skupa, [3])**.** *Neka je* $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ *holomorfna,* $\deg(f) \geq 2$. *Ako* $z_0 \notin \mathcal{E}(f)$, *tada je*

$$\mathcal{J}(f) \subseteq \overline{\bigcup_{n\geq 0} (f^{\circ n})^{\leftarrow}(z_0)}.$$

Ako je dodatno $z_0 \in \mathcal{J}(f)$, *tada vrijedi skupovna jednakost.*

U dokazu koristimo sljedeću lemu:

Lema 8.47 (Topološka tranzitivnost f na $\mathcal{J}(f)$)**.** *Neka je* $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ *holomorfna,* $\deg(f) \geq 2$, *te neka je* $\mathcal{E}(f)$ *njezin iznimni skup. Neka je* $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ *otvoren takav da* $U \cap \mathcal{J}(f) \neq \emptyset$. *Vrijedi:*

$$\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E}(f) \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{\circ n}(U).$$

Napomena 8.48. Primijetimo da, zbog $\mathcal{J}(f) \subseteq \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E}(f)$, Lema 8.47 govori o *topološkoj tranzitivnosti* racionalne funkcije $f|_{\mathcal{J}(f)} : \mathcal{J}(f) \to \mathcal{J}(f)$ na Julievom skupu $\mathcal{J}(f)$. Naime, za proizvoljna dva otvorena skupa $U, V \subseteq \mathcal{J}(f)$ postoji $n \in \mathbb{N}_0$ takav da $U \cap f^{\circ n}(V) \neq \emptyset$. Topološka tranzitivnost, uz osjetljivost na početne uvjete, je jedna od karakteristika *kaotičkog ponašanja* funkcije.

Dokaz. Ako postoje barem 3 različite točke u komplementu skupa $\cup_{n=0}^{\infty} f^{\circ n}(U)$, tada je, po Montelovom teoremu 8.10, familija iteracija $\{f^{\circ n} : n \in \mathbb{N}\}$ normalna na U, pa je $U \subseteq \mathcal{F}(f)$, što je kontradikcija s $U \cap \mathcal{J}(f) \neq \emptyset$. Stoga je

$$\operatorname{card}(\overline{\mathbb{C}} \setminus \cup_{n=0}^{\infty} f^{\circ n}(U)) \leq 2. \tag{8.48.1}$$

Pretpostavimo sad suprotno, tj. da je $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \cup_{n=0}^{\infty} f^{\circ n}(U)$ te $z \notin \mathcal{E}(f)$. Tada je $[z]$ beskonačna, pa je skup $\cup_{m \in \mathbb{N}} (f^{\circ m})^{\leftarrow}(z)$ beskonačan. Zbog (8.48.1), postoje $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da $f^{-m}(z) \in f^n(U)$. No tada je $z \in f^{\circ(m+n)}(U)$, što je kontradikcija. □

Dokaz Teorema 8.46. Neka $z_0 \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E}(f)$. Uzmimo proizvoljnu $z \in \mathcal{J}(f)$, te dokažimo da je u zatvaraču skupa $\cup_{n \geq 0} (f^{\circ n})^{\leftarrow}(z_0)$. Neka je U proizvoljna otvorena okolinu točke z. Tada, po Lemi 8.47 postoji $n \in \mathbb{N}_0$ takav da je $z_0 \in f^{\circ n}(U)$. Stoga je $(f^{\circ n})^{\leftarrow}(z_0) \cap U \neq \emptyset$, tj.

$$\Big(\bigcup_{n \geq 0} (f^{\circ n})^{\leftarrow}(z_0) \Big) \cap U \neq \emptyset.$$

Dodatno, ako je $z_0 \in \mathcal{J}(f)$, zbog potpune invarijantnosti i zatvorenosti Julievog skupa slijedi da je i

$$\overline{\bigcup_{n \geq 0} (f^{\circ n})^{\leftarrow}(z_0)} \subseteq \mathcal{J}(f),$$

pa jednakost slijedi. □

Napomena 8.49 (Crtanje Julievog skupa)**.** Da bismo nacrtali skup $\mathcal{J}(f)$, krenemo od bilo koje točke iz $\mathcal{J}(f)$ (npr. paraboličke fiksne točke, ako postoji), te crtamo sve praslike, pa praslike praslika itd. U limesu dobivamo Juliev skup, a dobru aproksimaciju već velikim brojem iteracija.

Poglavlje 9

Lokalna dinamika u $\mathbb{C}$ oko fiksnih točaka

9.1 Jako hiperbolička fiksna točka

9.2 Hiperbolička fiksna točka

9.3 Parabolička fiksna točka i racionalno invarijantne fiksne točke

9.4 Iracionalno invarijantne fiksne točke

Bibliografija

[1] Ahlfors, L.V., *Complex Analysis, 3rd edition*, McGraw-Hill, Singapore (1979)

[2] Balser, W. *From divergent series to analytic differential equations*, Springer Lecture Notes in Mathematics, 1582, Springer-Verlag, Berlin (1994)

[3] Bullett, S., *Holomorphic dynamics and hyperbolic geometry*, Queen Mary University of London lecture notes, dostupno na: https://webspace.maths.qmul.ac.uk/s.r.bullett/LTCCcourse/index.html

[4] Climenhaga, V., Pesin, Y., *Lectures on fractal geometry and dynamical systems*, Student Math Library Vol. 52, AMS, USA (2009)

[5] Carleson, L., Gamelin, T.W., *Complex dynamics*, Springer New York (1993)

[6] Lang, S., *Complex analysis*, Springer New York (1998)

[7] Lee, J.M., *Introduction to Riemannian Manifolds*, Springer Cham (2019)

[8] Milnor, J" *Dynamics in one complex variable, 3rd edition*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press (2006)

[9] Mitschi, C., Sauzin, D., *Divergent series, summability and resurgence I, Momodromy and resurgence*, Springer (2016)

[10] Munkres, J., *The point-set topology, 2nd edition*, Pearson education limited (2014)

[11] Falconer, K.,*Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*, 3rd Edition, Willey (2014)

[12] Rudin, W., *Real and Complex analysis*, McGraw-Hill Professional Publishing (1986)

[13] Ungar, Š., *Matematička Analiza 4, skripta*, dostupna na: *https://web.math.pmf.unizg.hr/ ungar/nastava.html/MA/Analiza4.pdf*

[14] *https://dms.umontreal.ca/∼rousseac/divergent.pdf,*
https://dms.umontreal.ca/∼rousseac/Rousseau_ divergent_ series.pdf

[15] Tricot, C., *Curves and fractal dimension*, Springer Science Business Media (1994)

[16] Perko, L., *Differential equations and dynamical systems, 3rd edition*, Springer

[17] http://staff.ustc.edu.cn/ wangzuoq/Courses/16S-RiemGeom/Notes/Lec02.pdf

[18] https://idv.sinica.edu.tw/ftliang/diff$_g eom/ * diff_g eometry(I)/11.27/riemetric3.pdfhttps : //en.wikipedia.org/wiki/Poincar\%C3\%A9_h alf - plane_m odel\#/media/File : Distance_i n_t he_h alf - plane_m odel.png$

[19] https://en.wikipedia.org/wiki/Poincar%C3%A9$_h alf - plane_m odel/media/File : Parallel_r ays_i n_P oincare_m odel_o f_h yperbolic_g eometry.svghttps : //pi.math.cornell.edu/\ maru/documents/Fatou_a nd_J ulia_s ets.pdf$

[20] http://pi.math.cornell.edu/ erin/docs/iteration.pdf