

2. Algebarska topologija

- ▶ Homotopija i fundamentalna grupa
- ▶ Prostor natkrivanja.
- ▶ Geometrija simplicijalnih kompleksa, baricentrička subdivizija, simplicijalna aproksimacija, fundamentalna grupa simplicijalnog kompleksa

Literatura:

1. James R. Munkres, *Topology*, Second edition, Prentice Hall (2000) - Poglavlja 9 i 11
2. I. M. Singer, J.A. Thorpe, *Lecture notes on Elementary Topology and Geometry*, Springer (1967) - Poglavlje 3 i 4

Dodatna literatura:

3. A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002)

1. Fundamentalna grupa.

Motivacija: kako pokazati da dva prostora **nisu homeomorfna**?

- ▶ jedan kompaktan, drugi nije (npr. $[0, 1]$, $(0, 1)$)
- ▶ jedan *jednostavno povezan*, drugi nije (npr. \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 , sfera S^2 i torus T)
- ▶ torus T i dvostruki torus (s dvije rupe)?
 - *fundamentalna grupa* prostora poopćenje pojma jednostavne povezanosti (jednostavno povezani prostori imaju trivijalnu fundamentalnu grupu)
 - **homeomorfni prostori imaju izomorfne fundamentalne grupe**

Homotopija preslikavanja

Definicija

Ako su f i f' neprekidna preslikavanja sa prostora X u prostor Y , kažemo da je f **homotopno** s f' ako postoji neprekidno preslikavanje $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ takvo da je $F(x, 0) = f(x)$ i $F(x, 1) = f'(x)$ za svaki $x \in X$.

Preslikavanje F zovemo **homotopija** između f i f' .

Ako je f homotopno s f' pišemo $f \simeq f'$. Ako je $f \simeq f'$ i f' je konstanta, kažemo da je f **nul-homotopno**.

* Homotopija je neprekidna 1-parametarska familija preslikavanja

$\{x \mapsto F_t(x) := F(t, x) : t \in [0, 1]\}$ koja $f = F_0$ transformira u $f' = F_1$ u vremenu $t \in [0, 1]$.

Homotopija puteva

Ako je $f : [0, 1] \rightarrow X$ neprekidno preslikavanje takvo da je $f(0) = x_0$ i $f(1) = x_1$, kažemo da je f **put** u X od x_0 do x_1 ; x_0 zovemo **početna točka**, a x_1 **krajnja točka**.

Definicija

Za puteve $f, f' : [0, 1] \rightarrow X$ kažemo da su **putevima homotopni** ako imaju istu početnu točku x_0 i istu krajnju točku x_1 i ako postoji neprekidno preslikavanje $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ takvo da je:

1. $F(s, 0) = f(s), F(s, 1) = f'(s), s \in [0, 1]$,
2. $F(0, t) = x_0, F(1, t) = x_1, t \in [0, 1]$ ¹.

Preslikavanje F zovemo **homotopija puteva** između f i f' .

Ako je put f putevima homotopan s putem f' pišemo $f \simeq_p f'$.

Napomena

$f_t(s) := F(t, s)$ je put od x_0 do x_1 , za svaki $t \in [0, 1]$.

¹Tijekom neprekidne deformacije puta f u put f' početna i krajnja točka ostaju fiksirane!

Lema (51.1)

Relacije \simeq i \simeq_p su relacije ekvivalencije.

Dokaz.

Klasu ekvivalencije puta f nazivamo njegovom **homotopskom klasom** i označavamo s $[f]$.

Primjeri: homotopija puteva ovisi o ambijentnom prostoru.

Definicija

Ako je f put u X od x_0 do x_1 i g put u X od x_1 do x_2 , definiramo **produkt puteva f i g** , u oznaci $f * g$, kao put h dan s

$$h(s) := \begin{cases} f(2s), & s \in [0, \frac{1}{2}], \\ g(2s - 1), & s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

→ $f * g$ je put po lemi o lijepljenju!

Napomena

Operacija produkta puteva inducira dobro definiranu operaciju $*$ na klasama homotopije putevima danu s:

$$[f] * [g] := [f * g]. \text{ Dokaz (neovisnost o izboru predstavnika).}$$

Teorem (51.2, *Grupoidna² svojstva operacije $*$ na klasama*)

Operacija $*$ ima sljedeća svojstva:

1. (*Asocijativnost*) Ako je produkt $[f] * ([g] * [h])$ definiran, definiran je i $([f] * [g]) * [h]$ i oni su jednaki.
2. (*Desni i lijevi neutralni element*) Za dani x iz X neka e_x označava konstantni put $e_x : [0, 1] \rightarrow X$ koji svaki element od $[0, 1]$ preslikava na x . Ako je f put u X od x_0 do x_1 , tada je $[f] * [e_{x_1}] = [f]$ i $[e_{x_0}] * [f] = [f]$.
3. (*Inverz*) Za dani put f u X od x_0 do x_1 , neka je \bar{f} put definiran s $\bar{f}(s) = f(1 - s)$. Put \bar{f} zovemo **inverzni put** od f . Vrijedi $[f] * [\bar{f}] = [e_{x_0}]$ i $[\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}]$.

²Klase homotopije putevima na nekom prostoru X s operacijom $*$ ne čine grupu, jer $[f] * [g]$ nije definirano za svaki par klasa, samo za *ulančane* (za koje je $f(1) = g(0)$).

Dokaz: (1) Označimo s $p_{[a,b],[c,d]} : [a, b] \rightarrow [c, d]$ jedinstveni linearni homeomorfizam intervala $[a, b]$ i $[c, d]$.

Neka su f, g, h ulančani putevi u X . Definiramo **trostruki produkt** $f * g * h$. Neka su $0 < a < b < 1$. Definiramo put $k_{a,b} : [0, 1] \rightarrow X$ s:

$$k_{a,b} = \begin{cases} f \circ p_{[0,a],[0,1]}, & \text{na } [0, a], \\ g \circ p_{[a,b],[0,1]}, & \text{na } [a, b], \\ h \circ p_{[b,1],[0,1]}, & \text{na } [b, 1]. \end{cases}$$

Pokažite: **ako je $0 < c < d < 1$ neki drugi izbor točkaka, tada su $k_{a,b} : I \rightarrow X$ i $k_{c,d} : I \rightarrow X$ homotopni putevi.**

Zato možemo definirati (do na homotopiju puteva)

$$f * g * h := k_{a,b},$$

za bilo koji izbor točkaka $0 < a < b < 1$.

(2) i (3) Ako $f \simeq_p g$ u prostoru X , te ako $h : X \rightarrow Y$ neprekidna, tada u prostoru Y :

1. $h \circ f \simeq_p h \circ g$,

2. $h \circ (f * g) = (h \circ f) * (h \circ g)$.

Teorem (51.3, neovisnost klase produkta puteva o subdiviziji intervala)

Neka je f put u X i neka su $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$. Neka je $f_i : [0, 1] \rightarrow X$ put dan sa $f_i = f \circ p_{[0,1],[a_{i-1},a_i]}$. Tada je $[f] = [f_1] * \dots * [f_n]$.

Dokaz: $[f_1] * \dots * [f_n] = [f_1 * \dots * f_n]$ po definiciji produkta klasa, a redosljed uzimanja produkta nije bitan jer su svi takvi putevi homotopni!

Fundamentalna grupa prostora

Definicija

Neka je X prostor i x_0 točka od X . Put u X koji počinje i završava u x_0 zovemo **petlja** u x_0 . Skup homotopskih klasa petlji u x_0 s operacijom $*$ zovemo **fundamentalna grupa** od X u **baznoj točki** x_0 i označavamo s $\pi_1(X, x_0)$.

Napomena

Operacija $*$ restringirana na skup klasa petlji s fiksiранom baznom točkom x_0 zadovoljava aksiome **grupe**, po Teoremu 51.2!

Primjeri: trivijalne fundamentalne grupe $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0)$, $\pi_1(B^n, x_0)$

Ovisnost fundamentalne grupe prostora o baznoj točki

Definicija

Neka je α put u X od x_0 do x_1 . Definiramo preslikavanje $\hat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ s $\hat{\alpha}([f]) = [\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]$.

Teorem (52.1)

Ako postoji put α od x_0 do x_1 u X , preslikavanje $\hat{\alpha}$ je dobro definirano i izomorfizam je fundamentalnih grupa $\pi_1(X, x_0)$ i $\pi_1(X, x_1)$ (s operacijom produkta klasa $*$).

Dokaz.

Korolar (52.2)

Ako je X povezan putevima i x_0 i x_1 su točke od X , tada je $\pi_1(X, x_0)$ izomorfna s $\pi_1(X, x_1)$.

Ipak, izomorfizam tih grupa ovisi o izboru puta α i ne postoji kanonski izbor.

Napomena

Dovoljno se ograničiti na putevima povezane prostore X (inače prijedemo na komponentu povezanosti)! Naime, ako je C komponenta povezanosti putevima prostora X te $x_0 \in C$, tada sve petlje u X sa bazom x_0 moraju čitave biti sadržane u C , pa je $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(C, x_0)$.

Definicija

Za prostor X kažemo da je **jednostavno povezan** ako je povezan putevima i ako je $\pi_1(X, x_0)$ trivijalna³ za neki $x_0 \in X$ (i zato za svaki $x_0 \in X$).

To često pišemo kao $\pi_1(X, x_0) = 0$. Kažemo i da je svaka petlja **nul-homotopna** (slika joj se neprekidno deformira kroz X u točku).

Lema (52.3)

U jednostavno povezanom prostoru X , svaka dva puta koja imaju istu početnu i krajnju točku su homotopna.

Dokaz.

³jednočlana (sadrži samo neutralni element), tj. $\pi_1(X, x_0) = \{[e_{x_0}]\}$, e_{x_0} konstantna petlja.

Fundamentalna grupa je topološka invarijanta prostora X

Definicija

Neka je $h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ neprekidno preslikavanje ($h(x_0) = y_0$). Definiramo $h_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ s

$$h_*([f]) = [h \circ f].$$

Preslikavanje h_* zovemo **homomorfizam fundamentalnih grupa induciran neprekidnim preslikavanjem h u odnosu na x_0** .

→ h_* dobro definirano i homomorfizam (**Dokažite!**)

→ ovisnost h_* o izboru preslikavanja h i bazne točke x_0 ; precizna oznaka: $h_*^{x_0}$

Prostore (X, x_0) i (Y, y_0) zovemo **punktirani prostori**.

Teorem (52.4, svojstva induciranog homomorfizma)

1. Ako su $h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ i $k : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ neprekidna preslikavanja, tada je $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$.
2. Ako je $\text{id} : (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ identiteta, tada je homomorfizam id_* identiteta.

Dokaz sami, po definiciji induciranog homomorfizma.

Korolar (52.5, Homeomorfizam punktiranih prostora inducira izomorfizam pripadnih fundamentalnih grupa!)

Ako je $h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ homeomorfizam, tada je h_* izomorfizam sa $\pi_1(X, x_0)$ na $\pi_1(Y, y_0)$.

Dokaz sami. Neka je k inverz h . Pokazujemo da je k^* inverz h^* (svojstva).

\Rightarrow Fundamentalna grupa je topološka invarijanta.

Prostori natkrivanja

→ svaki konveksan potprostor od \mathbb{R}^n ima trivijalnu fundamentalnu grupu

→ prostori s netrivialnom fundamentalnom grupom?

Definicija

Neka je $p : E \rightarrow B$ neprekidna surjekcija. Za otvoreni skup U od B kažemo da je **jednoliko natkriven** s p ako $p^{-1}(U)$ možemo prikazati kao uniju disjunktih otvorenih skupova V_α u E takvih da je za svaki α restrikcija $p|_{V_\alpha}$ homeomorfizam s V_α na U . Familiju $\{V_\alpha\}$ zovemo particija od $p^{-1}(U)$ u **slojeve** (engl. *slices*).

Napomena

Ako je $U \subseteq B$ jednoliko natkriven s p i $W \subseteq U$ otvoren, tada je i W jednoliko natkriven s p .

Definicija

Neka je $p : E \rightarrow B$ neprekidna surjekcija. Ako svaka točka b od B ima okolinu U koja je jednoliko natkrivena s p , tada p zovemo **natkrivajućim preslikavanjem** ili **natkrivanjem**, a E zovemo **natkrivajućim prostorom** prostora B .

⁴tj. svaki V_α je jedna kopija U

Napomena

Neka je $p : E \rightarrow B$ natkrivajuće preslikavanje.

1. Za svaki $b \in B$ prostor $p^{-1}(b)$ je diskretan u E (svaka točka otvorena).
2. p je otvoreno preslikavanje.

Dokaz sami.

Primjer: trivijalni natkrivajući prostori prostora X

Teorem (53.1, natkrivanje jedinične kružnice)

Preslikavanje $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dano sa $p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ (namatanje pravca na kružnicu) je natkrivanje.

Dokaz.

Napomena

1. Restrikcija natkrivajućeg preslikavanja ne mora biti natkrivajuće preslikavanje!
2. Svako natkrivajuće preslikavanje $p : E \rightarrow B$ je lokalni homeomorfizam (svaka točka $y \in E$ ima okolinu koja se homeomorfno preslikava na otvoreni skup u B). Obrat ne vrijedi!

Kontraprimjer.

Teorem (53.2, Restrikcija natkrivajućeg preslikavanja)

Neka je $p : E \rightarrow B$ natkrivanje. Ako je B_0 potprostor od B i ako je $E_0 = p^{-1}(B_0)$, tada je restrikcija $p_0|_{E_0} : E_0 \rightarrow B_0$ natkrivanje.

Dokaz sami.

Teorem (53.3, Produkt natkrivajućih preslikavanja)

Ako su $p : E \rightarrow B$ i $p' : E' \rightarrow B'$ natkrivanja, tada je $p \times p' : E \times E' \rightarrow B \times B'$ natkrivanje.

Dokaz.

Primjeri natkrivajućih preslikavanja (natkrivanje torusa, osmice)

Veza fundamentalne grupe prostora i prostora natkrivanja

Definicija

Neka je $p : E \rightarrow B$ preslikavanje. Ako je f neprekidno preslikavanje s nekog prostora X u B , preslikavanje $\tilde{f} : X \rightarrow E$ za koje vrijedi $p \circ \tilde{f} = f$ (ako takvo postoji) zovemo **podizanje** od f .

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ \tilde{f} \nearrow & \downarrow p & \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Ako je p natkrivajuće preslikavanje i E prostor natkrivanja od B

→ postoji podizanje puteva i homotopija puteva iz prostora B u prostor natkrivanja E

Primjer.

Podizanje puteva i homotopija puteva u prostor natkrivanja

Lema (54.1, podizanje puteva)

Neka je $p : E \rightarrow B$ (B metrizable) natkrivanje i $p(e_0) = b_0$.

Svaki put $f : [0, 1] \rightarrow B$ koji počinje u b_0 ima jedinstveno podizanje do puta \tilde{f} u E koji počinje u e_0 . **Dokaz:** egzistencija i jedinstvenost.

Lema (54.2, podizanje homotopije puteva)

Neka je $p : E \rightarrow B$ (B metrizable) natkrivanje i $p(e_0) = b_0$. Neka je preslikavanje $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow B$ neprekidno i $F(0, 0) = b_0$.

Tada postoji jedinstveno podizanje od F do neprekidnog preslikavanja $\tilde{F} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow E$ takvog da je $\tilde{F}(0, 0) = e_0$. Ako je F homotopija puteva i \tilde{F} je homotopija puteva. **Dokaz sami.** Slično.

Teorem (54.3)

Neka je $p : E \rightarrow B$ natkrivanje i $p(e_0) = b_0$. Neka su f i g dva puta u B od b_0 do b_1 i neka su \tilde{f} i \tilde{g} njihova podizanja redom do puteva u E koji počinju u e_0 . Ako su f i g homotopni, tada \tilde{f} i \tilde{g} završavaju u istoj točki i homotopni su. **Dokaz sami.** Važno: jedinstvenost podizanja puteva iz Leme 54.1+Lema 54.2.

Fundamentalna grupa kružnice

Definicija

Neka je $p : E \rightarrow B$ natkrivanje i $b_0 \in B$. Izaberimo e_0 tako da je $p(e_0) = b_0$. Za dani element $[f]$ od $\pi_1(B, b_0)$, neka je \tilde{f} podizanje od f do puta u E koji počinje u e_0 . Neka $\phi([f])$ označava krajnju točku $\tilde{f}(1)$ od \tilde{f} , $\phi([f]) = \tilde{f}(1)$. Tada je ϕ dobro definirano (zbog Teorema 54.3) preslikavanje

$$\phi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0)$$

i zovemo ga **pridruživanje podizanjem** (engl. *lifting correspondence*) **izvedeno iz natkrivanja p** .

Primijetimo: preslikavanje ϕ ovisi o izboru točke e_0 !

Teorem (54.4)

Neka je $p : E \rightarrow B$ natkrivanje i $p(e_0) = b_0$. Ako je E povezan putevima, onda je $\phi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0)$ surjekcija, a ako je E jednostavno povezan, onda je ϕ bijekcija.

Dokaz.

Teorem (54.5, Fundamentalna grupa kružnice S^1)

Fundamentalna grupa od S^1 je izomorfna (obzirom na produkt klasa $*$) aditivnoj grupi cijelih brojeva $(\mathbb{Z}, +)$.

Dokaz:

- ▶ $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ natkrivanje kružnice iz Tm. 53.1 (namatanje pravca na kružnicu):

$$p(x) = (\cos(n\pi x), \sin(n\pi x)).$$

Uzmemo $e_0 = 0$, $b_0 = p(0) = (1, 0)$.

- ▶ Izomorfizam (bijekcija po Tm. 54.4+homomorfizam) je dano preslikavanjem pridruživanja podizanjem ϕ

$$\phi : \pi_1(S^1, (1, 0)) \rightarrow p^{\leftarrow}((1, 0)) \cong \mathbb{Z}, \quad \phi([f]) = \tilde{f}(1),$$

gdje je \tilde{f} (jedinствeno) podizanje petlje f u 0.

- ▶ Dokaz: ϕ homomorfizam!

Napomena

- ▶ Fundamentalna grupa kružnice $(\pi_1(S^1, (1, 0)), *)$ je *beskonačna ciklička grupa* (izomorfna $(\mathbb{Z}, +)$);
generator: $[p|_{[0,1]}]$ (klasa petlje koja jednom omota kružnicu)
- ▶ Izbor bazne točke $b_0 = (1, 0) \in S^1$ nije bitan jer S^1 *povezan putevima* \rightarrow fundamentalne grupe s raznim baznim točkama izomorfne!

Primjena: neki opći rezultati dobiveni poznavanjem fundamentalne grupe kružnice (Dokaze sami, Munkres Ch.9.55.)

Definicija

Neka je $A \subseteq X$. Neprekidno preslikavanje $r : X \rightarrow A$ takvo da je $r|_A$ identiteta na A zovemo **retrakcija** od X na A .

Ako takvo preslikavanje r postoji kažemo da je A **retrakt** od X .

Lema (55.1, za dokaz Teorema 55.2)

Ako je A retrakt od X tada je homomorfizam fundamentalne grupe inducirane inkluzijom $j : A \rightarrow X$ injekcija.

Dokaz sami ($r \circ j = \text{id}_A$).

Teorem (55.2)

Ne postoji retrakcija s B^2 (jedinični krug u \mathbb{R}^2) na S^1 .

Dokaz sami. Lema 55.1. Fundamentalna grupa kružnice netrivialna, a kruga trivijalna (1-povezan).

Lema (55.3, za dokaz Teorema 55.5, 55.6)

Neka je $h : S^1 \rightarrow X$ neprekidno preslikavanje. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

1. h je nul-homotopno (=homotopno konstantnom preslikavanju).
2. h se može proširiti do neprekidnog preslikavanja $k : B^2 \rightarrow X$.
3. h_* je trivijalan homomorfizam fundamentalnih grupa (slika mu je samo jedinični element - trivijalna grupa).

Korolar (55.4, za dokaz Teorema 55.5, 55.6)

Inkluzija $j : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nije nul-homotopna. Identiteta $i : S^1 \rightarrow S^1$ nije nul-homotopna.

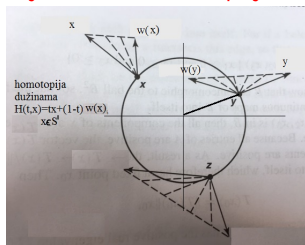
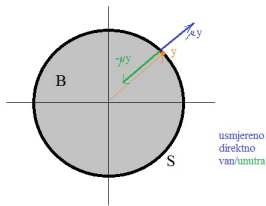
Dokaz: sami. $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$ je retrakcija $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ na S^1 . Leme 55.1. i 55.3.

Teorem (55.5, i za dokaz teorema 55.6)

Za neprekidno vektorsko polje $\mathbf{v} : B^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v}(x) = (v_1(x), v_2(x))$, takvo da je $\mathbf{v}(x) \neq 0$ za svaki $x \in B^2$, postoji točka na S^1 u kojoj je vektorsko polje usmjereno direktno unutra ($\mathbf{v}(y) = -\mu y$, $\mu > 0$) i točka na S^1 u kojoj je vektorsko polje usmjereno direktno van ($\mathbf{v}(z) = \mu z$, $\mu > 0$).

Dokaz: sami.

- ▶ Pp. suprotno, $\mathbf{v}(x)$ nije usmjereno direktno unutra niti za jedan $x \in S^1$
- ▶ $\mathbf{w} = \mathbf{v}|_{S^1} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ neprekidno i proširivo na B^2 do $\mathbf{v} \Rightarrow$ nul-homotopno (Lema 55.3)
- ▶ \mathbf{w} homotopno inkluziji $j : S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (homotopija dužinama, bitna pp. da $\mathbf{w}(x)$ nije usmjereno direktno unutra niti za jedan $x \in S^1$)
- ▶ inkluzija j nulhomotopna \Rightarrow kontradikcija s Kor. 55.4
- ▶ za usmjerenost direktno van primijenimo dokazano na polje $-\mathbf{v}$!



Teorem (55.6, Brouwerov teorem o fiksnoj točki za krug)

Ako je $f : B^2 \rightarrow B^2$ neprekidno preslikavanje, postoji točka $x \in B^2$ takva da je $f(x) = x$ (fiksna točka od f na B^2).

Dokaz: sami. Pp. $f(x) \neq x, \forall x \in B^2, \mathbf{v}(x) = f(x) - x$.

Homotopski tip

(=određivanje fundamentalne grupe svodimo na određivanje fundamentalne grupe nekog poznatog prostora istog *homotopskog tipa*)

Lema (58.1, za Teorem 58.2)

Neka su $h, k : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ neprekidna preslikavanja. Ako su h i k homotopni i ako slika bazne točke x_0 od X ostaje fiksirana i jednaka y_0 tijekom čitave homotopije, tada su inducirani homomorfizmi fundamentalnih grupa, $h_*, k_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$, jednaki.

Dokaz.

Teorem (58.2)

Inkluzija $j : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ inducira izomorfizam $j_* : \pi_1(S^n, x_0) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, x_0)$ fundamentalnih grupa.

Dokaz.

$\rightarrow \text{id}_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}$ homotopno (dužinskom homotopijom!) preslikavanju $j \circ r(x) = \frac{x}{\|x\|}$ koje $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ preslikava na S^n , a S^n ostavlja fiksnom; svaka točka $b_0 \in S^n$ fiksna tijekom dužinske homotopije

Generalnije,

Definicija

Neka je A potprostor od X . Kažemo da je A **deformacijski retrakt** od X ako je id_X homotopna retrakciji X na A i to tako da svaka točka od A ostaje fiksna tijekom homotopije.

To znači da postoji neprekidno preslikavanje $H : X \times I \rightarrow X$ takvo da je $H(x, 0) = x$, $H(x, 1) \in A$ za svaki $x \in X$ i $H(a, t) = a$ za svaki $a \in A$. Homotopiju H zovemo **deformacijska retrakcija** od X na A .

Napomena

(1) Preslikavanje $r : X \rightarrow A$, gdje je $r(x) := H(x, 1)$, je retrakcija od X na A .

(2) H je homotopija između identitete na X i preslikavanja $j \circ r : X \rightarrow X$, gdje je $j : A \rightarrow X$ inkluzija.

Teorem (58.3, generalizacija Teorema 58.2)

Neka je A deformacijski retrakt od X i $x_0 \in A$. Tada inkluzija $j : (A, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ inducira izomorfizam fundamentalnih grupa.

Primjeri: Deformacijski retrakti.

Homotopski tip prostora

Pokazali smo: ako je prostor homeomorfan deformacijskom retraktu nekog prostora, ta dva prostora imaju izomorfne fundamentalne grupe.

Pokazujemo generalnije: dovoljno da su prostori istog *homotopskog tipa*.

Definicija

Neka su $f : X \rightarrow Y$ i $g : Y \rightarrow X$ neprekidna preslikavanja.

Pretpostavimo da je preslikavanje $g \circ f \simeq \text{id}_X$ i $f \circ g \simeq \text{id}_Y$. Tada preslikavanja f i g zovemo **homotopske ekvivalencije** prostora X i Y resp. Y i X i za svako od njih kažemo da je **homotopski inverz** drugog. Za dva prostora X i Y za koje postoje homotopske ekvivalencije f i g kažemo da su **homotopski ekvivalentni**.

Homotopska ekvivalencija je rel. ekvivalencije. Za dva homotopski ekvivalentna prostora kažemo da imaju isti **homotopski tip**.

Napomena (Homotopski tip generalniji od pojma def. retrakta)

Neka je A deformacijski retrakt prostora X . Tada su X i A homotopski ekvivalentni.

Dokaz: $r : X \rightarrow A$ retrakcija, $j : A \rightarrow X$ inkluzija, $j \circ r \simeq \text{id}_X$, $r \circ j = \text{id}_A$.

Napomena

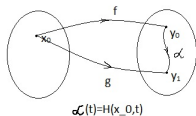
Ako su X i Y istog homotopskog tipa, ne možemo direktno primijeniti Lemu 58.1 i zaključiti izomorfizam fund. grupa jer bazna točka ne ostaje nužno fiksirana tijekom homotopije.

Lema (58.4, *popravak* Leme 58.1 za dokaz Teorema 58.7)

Neka su $h, k : X \rightarrow Y$ neprekidna preslikavanja i neka je $h(x_0) = y_0$ i $k(x_0) = y_1$. Ako su h i k homotopni, postoji put α u Y od y_0 do y_1 takav da je $k_* = \hat{\alpha} \circ h_*$.

Štoviše, ako je $H : X \times I \rightarrow Y$ homotopija između h i k , tada je α upravo put $\alpha(t) := H(x_0, t)$. **Dokaz ne.**

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{h_*} & \pi_1(Y, y_0) \\ & \searrow k_* & \downarrow \hat{\alpha} \\ & & \pi_1(Y, y_1) \end{array}$$



Korolar (58.5)

Neka su $h, k : X \rightarrow Y$ homotopna neprekidna preslikavanja i neka je $h(x_0) = y_0$ i $k(x_0) = y_1$. Ako je h_* injekcija ili surjekcija ili trivijalan, takav je i k_* . **Dokaz:** $\hat{\alpha}$ izomorfizam fund. grupa

Korolar (58.6)

Neka su $h : X \rightarrow Y$. Ako je h nul-homotopno, tada je h_* trivijalan homomorfizam. **Dokaz:** Homomorfizam ind. konstantnom funkcijom trivijalan.

Teorem (58.7)

Neka je $f : X \rightarrow Y$ neprekidno preslikavanje i $f(x_0) = y_0$. Ako je f homotopska ekvivalencija prostora, tada je inducirani homomorfizam $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ izomorfizam fundamentalnih grupa. **Dokaz.**

Posljedica: **prostori istog homotopskog tipa imaju izomorfne fundamentalne grupe.**

Teorem (M. Fuchs)

Dva prostora X i Y imaju isti homotopski tip **ako i samo ako** su homeomorfni deformacijskom retraktu jednog te istog prostora.

Dakle, ako je jedan prostor homeomorfan deformacijskom retraktu drugoga, tada su oni istog homotopskog tipa. Međutim, ako su dva prostora istog homotopskog tipa nije nužno jedan homeomorfan deformacijskom retraktu drugoga.

Npr. θ -prostor i osmica su def. retrakti $\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\}$. Dokaz teorema: nećemo.

Fundamentalna grupa sfere $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ za $n \geq 2$

Teorem (59.1, slaba verzija *Seifert-van Kampenovog teorema*)

Pretpostavimo da je $X = U \cup V$, gdje su U i V otvoreni skupovi od X (metrizabilan). Pretpostavimo da je $U \cap V$ putevima povezan i da je $x_0 \in U \cap V$. Neka su $i : U \rightarrow X$ i $j : V \rightarrow X$ inkluzije. Tada slike induciranih homomorfizama $i_* : \pi_1(U, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ i $j_* : \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ generiraju $\pi_1(X, x_0)$.

Drugim riječima, za svaki $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ postoje $n \in \mathbb{N}$ te $[g_i]$, $i = 1 \dots n$, u $\pi_1(U, x_0)$ ili u $\pi_1(V, x_0)$ takvi da vrijedi

$$[f] = [g_1] * [g_2] * \dots * [g_n].$$

Svaka petlja u X bazirana u $x_0 \in U \cap V$ putevima je homotopna konačnom produktu petlji baziranih u x_0 , od kojih svaka čitava leži ili u U ili u V .

Korolar (59.2)

Pretpostavimo da je $X = U \cup V$, gdje su U i V otvoreni skupovi od X . Pretpostavimo da je $U \cap V$ neprazan i putevima povezan. Ako su U i V jednostavno povezani, tada je X jednostavno povezan.

Teorem (59.3)

Ako je $n \geq 2$, n -sfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je jednostavno povezana. Dakle, fundamentalna grupa joj je trivijalna.

Dokaz:

$U := S^n \setminus \{(0, 0, \dots, 1)\}$, $V := S^n \setminus \{(0, 0, \dots, -1)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ homeomorfni \mathbb{R}^n (stereografska projekcija), $U \cup V = S^n$.

Korolar

$$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 2, \\ 0, & n > 2. \end{cases}$$

Dokaz: Teorem 58.2.

Korolar

\mathbb{R}^2 i \mathbb{R}^n za $n > 2$ nisu homeomorfni.

Dokaz: promatramo $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ i $\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$.

Fundamentalne grupe nekih 2-mnogostrukosti (=ploha)

TORUS

Podsjetimo se:

1. Ako su A i B grupe s operacijom \cdot , tada Kartezijev produkt $A \times B$ ima strukturu grupe uz operaciju

$$(a, b) \cdot (a', b') = (a \cdot a', b \cdot b').$$

2. Ako je C grupa te ako su $h : C \rightarrow A$ i $k : C \rightarrow B$ homomorfizmi grupa, tada je preslikavanje $\Phi : C \rightarrow A \times B$ definirano sa $\Phi(c) = (h(c), k(c))$ homomorfizam grupa.

Teorem (60.1)

$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ je izomorfna s $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

Dokaz. Izomorfizam $\Phi := (p_*, q_*) : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$,
 $p : X \times Y \rightarrow X$, $q : X \times Y \rightarrow Y$ su koordinatne projekcije. Detalje sami.

Korolar (60.2)

Fundamentalna grupa torusa $T = S^1 \times S^1$ izomorfna je grupi $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

PROJEKTIVNA RAVNINA

Definicija

Kvocijentni prostor dobiven od S^2 identifikacijom svake točke x od S^2 s njenom antipodnom točkom $-x$ zovemo **projektivna ravnina** P^2 .

Teorem (60.3)

- (1) Kvocijento preslikavanje $p : S^2 \rightarrow P^2$ je natkrivanje.
- (2) Projektivna ravnina P^2 je kompaktna ploha (2-mnogostrukost).

Dokaz sami.

Korolar (60.4)

$\pi_1(P^2, y)$ je ciklička grupa reda 2 (kardinaliteta 2, izomorfna sa $\mathbb{Z}/2$).

Dokaz.

Slično možemo definirati P^n za svaki $n \in \mathbb{N}$ kao prostor dobiven iz S^n identifikacijom svake točke x s njenom antipodnom točkom $-x$ i taj prostor zovemo **projektivni n -prostor**. Vrijedi da je $\pi_1(P^n, y)$ grupa reda 2 za $n \geq 2$.

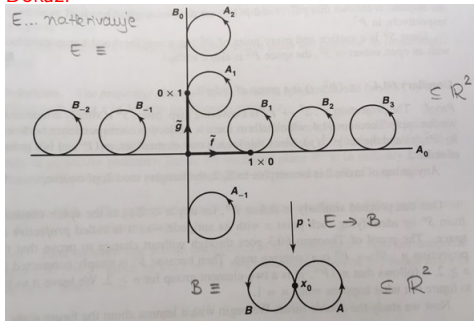
DVOSTRUKI TORUS (TORUS S DVIJE RUPE)

Potprostor \mathbb{R}^2 koji je unija dvije kružnice u \mathbb{R}^2 koje imaju jednu zajedničku točku zovemo *osmica*.

Lema (60.5)

Fundamentalna grupa *osmice* nije abelova (komutativna).

Dokaz.



* $f = p \circ \tilde{f}$, $g = p \circ \tilde{g}$ petlje u x_0 u *osmici*.

*Pokazujemo: $f * g$ i $g * f$ nisu homotopne putevima ($\Rightarrow [f] * [g] \neq [g] * [f]$).

*Pokazujemo: podizanja $f * g$ i $g * f$ do puteva u E s početkom u 0 nemaju istu krajnju točku!

Teorem (60.6)

Fundamentalna grupa dvostrukog torusa $T \# T$ nije abelova.

Dokaz: Osmica je retrakt $T \# T$. Lema 55.1.: inkluzija inducira monomorfizam fundamentalnih grupa.

Korolar (60.7, Primjeri nehomeomorfnih ploha)

Sfera S^2 , torus T , projektivna ravnina P^2 i dvostruki torus $T \# T$ su topološki različite plohe (nisu homeomorfni).

Dokaz: neizomorfne fundamentalne grupe.

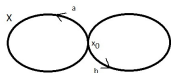
2. Seifert-van Kampenov teorem

- ▶ metoda za određivanje fundamentalne grupe prostora koji se mogu prikazati kao unija prostora s poznatim fundamentalnim grupama
- ▶ fundamentalna grupa prostora dana kao tzv. *slobodni produkt* grupa pojedinih dijelova
- ▶ odgovor na *pitanje realizacije* slobodnih grupa: svaka slobodna grupa G može se realizirati kao fundamentalna grupa nekog prostora.

Motivacijski primjer

Fundamentalna grupa osmice

1. Osmica $X =$ unija dvije kružnice A i B koje se sijeku u točki x_0
2. $\pi_1(A)$ beskonačna ciklička grupa (operacija $*$) generirana petljom a koja jednom obilazi kružnicu u pozitivnom smjeru; $\pi_1(B)$ generirana petljom b



3. Teorem 59.1 (slabiji SVK) $\rightarrow \pi_1(X, x_0)$ generirana s $\pi_1(A, x_0)$, $\pi_1(B, x_0)$ (operacija $*$)

Pitanje: detaljan opis generirane grupe

$\pi_1(X)$ je tzv. **slobodni produkt grupe** $\pi_1(A) * \pi_1(B) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ koji zadovoljava:

1. obje grupe $\pi_1(A)$ i $\pi_1(B)$ su podgrupe slobodnog produkta
2. elementi produkta su *riječi* - konačni nizovi petlji iz $\pi_1(A)$ i $\pi_1(B)$, tj. nizovi cjelobrojnih potencija a i b :
npr. riječ $ab^3a^{-1}b^2$ u slobodnom produktu predstavlja klasu petlje koja kreće u x_0 , jednom obiđe A u pozitivnom smjeru, zatim 3 puta B u pozitivnom smjeru, pa jednom A u negativnom smjeru i onda dva puta B u pozitivnom smjeru.
3. operacija na slobodnom produktu: *konkatenacija* riječi uz prirodna kraćenja
npr. $a^3b^3 \in \pi_1(A) * \pi_1(B)$ i $b^{-1}a^{-1}b^2 \in \pi_1(A) * \pi_1(B)$, konkatenacijom $a^3b^3b^{-1}a^{-1}b^2 = a^3b^2a^{-1}b^2 \in \pi_1(A) * \pi_1(B)$
4. produkt NIJE komutativna grupa (slobodna) - konkatenacija u obratnom redoslijedu daje: $b^{-1}a^{-1}b^2a^3b^3$.

- ▶ $\{G_\alpha, \alpha \in J\}$ neka familija grupa
- ▶ tražimo grupu koja sadrži sve grupe kao podgrupe
- ▶ takva je produktna grupa $\prod_\alpha G_\alpha$ (J -torke elemenata iz G_α) ili *direktna suma* $\bigoplus_\alpha G_\alpha$ (manja i jednostavnija, samo J -torke elemenata iz G_α koji su na konačno mjesta različiti od identitete), sa standardnom operacijom zbrajanja po komponentama
- ▶ obje konstrukcije imaju svojstvo: elementi različitih podgrupa G_α u sumi (produktu) komutiraju - nije prirodno za nekomutativne G_α
- ▶ za nekomutativne grupe G_α prirodno tražiti **nekomutativnu verziju direktne sume** \rightarrow tzv. *slobodni produkt grupa*

Direktna suma abelovih grupa

Pretpostavimo da je $(G, +)$ abelova grupa i da je $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ indeksirana familija podgrupa od G . Kažemo da grupe G_α **generiraju** G ako svaki element x od G možemo prikazati kao konačnu sumu elemenata grupa G_α ,

$$x = x_{\alpha_1} + \cdots + x_{\alpha_n},$$

gdje su indeksi α_j različiti. Često pišemo:

$$x = \sum_{\alpha \in J} x_\alpha,$$

i podrazumijevamo da je $x_\alpha = 0$ osim za konačno mnogo indeksa $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Ako grupe G_α generiraju G često kažemo da je G **suma** grupa G_α i pišemo $G = \sum_{\alpha \in J} G_\alpha$. Ako je, dodatno, za svaki $x \in G$, rastav $x = \sum_{\alpha \in J} x_\alpha$ jedinstven, tada za G kažemo da je **direktna suma** grupa G_α i pišemo

$$G = \bigoplus_{\alpha \in J} G_\alpha.$$

Primjer: \mathbb{R}^ω sa zbrajanjem po koordinatama, \mathbb{R}^∞ .

Lema (67.1, Uvjet proširenja homomorfizama sa komponentnih grupa na direktne sume)

Neka je G abelova grupa i $\{G_\alpha\}$ familija podgrupa od G . Ako je G direktna suma grupa G_α , tada G zadovoljava sljedeći uvjet:

- (*) Za svaku abelovu grupu H i svaku familiju homomorfizama $h_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$, postoji homomorfizam $h : G \rightarrow H$ čija je restrikcija na G_α jednaka h_α , za svaki α .

Nadalje, h je jedinstven. Obratno, ako grupe G_α generiraju G i uvjet proširenja (*) vrijedi, tada je G direktna suma grupa G_α .

Dokaz sami (elementarno). (\Rightarrow) $h(x) := \sum_\alpha h_\alpha(x_\alpha)$ za $x = \sum_\alpha x_\alpha$.

Korolar (67.2)

Neka je $G = G_1 \oplus G_2$. Pretpostavimo da je G_1 direktna suma podgrupa H_α , za $\alpha \in J$, i G_2 direktna suma podgrupa H_β , za $\beta \in K$, gdje su indeksni skupovi J i K disjunktni. Tada je G direktna suma podgrupa H_γ , za $\gamma \in J \cup K$.

Dokaz: dva puta primjena leme.

Posljedica (asocijativnost direktne sume):

$$(G_1 \oplus G_2) \oplus G_3 = G_1 \oplus (G_2 \oplus G_3) = G_1 \oplus G_2 \oplus G_3.$$

Korolar (67.3)

Ako je $G = G_1 \oplus G_2$, tada je G/G_2 izomorfna s G_1 . **Dokaz.**

Definicija

Neka je $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ indeksirana familija abelovih grupa.

Pretpostavimo da je G abelova grupa i da je $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow G$ familija monomorfizama takva da je G direktna suma grupa $i_\alpha(G_\alpha)$,

$$G = \bigoplus_{\alpha \in J} i_\alpha(G_\alpha).$$

Tada kažemo da je G **vanjska direktna suma** grupa G_α u odnosu na monomorfizme i_α .

$i_\alpha|_{G_\alpha} : G_\alpha \rightarrow i_\alpha(G_\alpha)$ izomorfizam. Vanjska suma G je direktna suma *kopija* od G_α .

Teorem (67.4)

Za svaku familiju abelovih grupa $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ postoji abelova grupa G i familija monomorfizama $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow G$ takva da je G direktna suma grupa $i_\alpha(G_\alpha)$.

Dokaz konstruktivan.

- ▶ G je podgrupa Kartezijevog produkta $\prod_{\alpha \in J} G_\alpha$ (grupa uz zbrajanje po komponentama) koja sadrži J -torku (x_α) takve da je $x_\alpha = 0_\alpha$ osim za eventualno konačno mnogo indeksa α ,
- ▶ $i_\beta : G_\beta \rightarrow G$, $i_\beta(x)$ je J -torka s x na mjestu β , a 0_α na ostalim.

Lema (67.5, Uvjet proširenja za vanjsku direktnu sumu)

Neka je G abelova grupa, $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ indeksirana familija abelovih grupa i $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow G$ familija homomorfizama. Ako je svaki i_α monomorfizam i G direktna suma grupa $i_\alpha(G_\alpha)$, tada G zadovoljava sljedeći uvjet:

- (*) Za svaku abelovu grupu H i svaku familiju homomorfizama $h_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$, postoji homomorfizam $h : G \rightarrow H$ takav da je $h \circ i_\alpha = h_\alpha$, za svaki α .

Nadalje, h je jedinstven. Obratno, pretpostavimo da grupe $i_\alpha(G_\alpha)$ generiraju G i da uvjet proširenja (*) vrijedi. Tada je svaki i_α monomorfizam i G je direktna suma grupa $i_\alpha(G_\alpha)$.

Dokaz sami. Lema 67.1, ostaje dokazati samo i_α injekcija pomoću uvjeta proširenja.

Teorem (67.6, Jedinственost direktnih suma)

Neka je $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ familija abelovih grupa. Pretpostavimo da su G i G' abelove grupe i $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow G$ i $i'_\alpha : G_\alpha \rightarrow G'$ familije monomorfizama takvih da je

$$G = \bigoplus_{\alpha \in J} i_\alpha(G_\alpha), \quad G' = \bigoplus_{\alpha \in J} i'_\alpha(G_\alpha).$$

Tada postoji jedinstveni izomorfizam $\phi : G \rightarrow G'$ takav da je $\phi \circ i_\alpha = i'_\alpha$ za svaki α .

Dokaz. 4 puta primjena uvjeta proširenja za vanjsku direktnu sumu.

Slobodne abelove grupe

Definicija

Neka je G abelova grupa i $\{a_\alpha\}$ indeksirana familija elemenata od G . Neka je G_α podgrupa od G generirana elementom a_α . Ako grupe G_α generiraju G kažemo i da elementi a_α generiraju G . Ako je svaka grupa G_α beskonačna ciklička (izomorfna \mathbb{Z}) i ako je G direktna suma grupa G_α , tada za G kažemo da je **slobodna abelova grupa s bazom** $\{a_\alpha\}$.

Lema (67.7, Uvjet proširenja homomorfizama)

Neka je G abelova grupa i $\{a_\alpha\}_{\alpha \in J}$ familija elemenata od G koji generiraju G . Tada je G slobodna abelova grupa s bazom $\{a_\alpha\}$ ako i samo ako za svaku abelovu grupu H i familiju $\{y_\alpha\}$ elemenata od H , postoji homomorfizam h sa G na H takav da je $h(a_\alpha) = y_\alpha$ za svaki α . Također, h je jedinstven. **Dokaz. Lema 67.1.**

Teorem (67.8)

Ako je G slobodna abelova grupa s bazom $\{a_1, \dots, a_n\}$, tada je n jedinstveno određen s G i zovemo ga **rang** od G . **Dokaz.**

Primjer:

$$\pi_1(T, p) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Fundamentalna grupa torusa je **slobodna abelova grupa ranga 2**.

Nekomutativne (ne-abelove) grupe

→ (G, \cdot) , 1 neutralni element, x^{-1} inverz (pišemo ih **multiplikativno!**)

- ▶ Neka je G grupa (**ne nužno abelova**). Za familiju $\{G_\alpha\}$ podgrupa od G kažemo da **generiraju** G ako se svaki element $x \in G$ može prikazati kao produkt konačnog broja elemenata grupa G_α . Dakle, ako za svaki $x \in G$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_i \in G_{\alpha_i}$, $i = 1, \dots, n$, takvi da je

$$x = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n.$$

- ▶ Konačan niz (x_1, \dots, x_n) elemenata podgrupa G_α nazivamo **riječ duljine n** sastavljena od elemenata G_α . Kažemo da riječ (x_1, \dots, x_n) **reprezentira** element $x \in G$.
- ▶ Kako G nije komutativna grupa, ne možemo kao prije grupirati faktore koji pripadaju istoj G_α !
Reducirana riječ je konačan niz (y_1, \dots, y_n) , $n \in \mathbb{N}$, elemenata grupa G_α takav da niti jedan susjedni par y_i, y_{i+1} ne pripada istoj G_α i takav da $y_i \neq 1$, $i = 1, \dots, n$. Iznimka je riječ (1) duljine 1 koja predstavlja neutralni element od G , a smatramo je reduciranom. Možemo je smatrati i praznom riječi \emptyset .
- ▶ Ako grupe G_α generiraju grupu G , svaki element $x \in G$ može se reprezentirati reduciranom riječi.

Slobodni produkt grupa

Definicija

Neka je G grupa i $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ familija podgrupa od G koje generiraju G . Neka je $G_\alpha \cap G_\beta = \{1\}$, $\alpha \neq \beta$. Kažemo da je G **slobodni produkt** grupa G_α ako za svaki $x \in G$ postoji samo jedna reducirana riječ u grupama G_α koja reprezentira x . U tom slučaju pišemo $G = \prod_{\alpha \in J}^* G_\alpha$, ili, u konačnom slučaju, $G = G_1 * \cdots * G_n$.

Za nekomutativne grupe *slobodni produkt* je po definiciji koncept sličan direktnoj sumi za abelove grupe!

Napomena (Dovoljan uvjet slobodnog produkta)

Neka je G grupa i $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ familija podgrupa od G koje generiraju G , sa svojstvom $G_\alpha \cap G_\beta = \{1\}$ za $\alpha \neq \beta$. Ako $1 \in G$ ima jednoznačnu reduciranu reprezentaciju u elementima G_α (kao prazna riječ \emptyset), tada je G slobodni produkt grupa G_α . **Dokaz.**

Primjer: grupa permutacija tri elementa s kompozicijom.

Svojstva kao kod direktnog produkta

Lema (68.1, Uvjet proširenja za slobodni produkt)

Neka je G grupa i $\{G_\alpha\}$ familija podgrupa od G takva da je $G_\alpha \cap G_\beta = \{1\}$ za $\alpha \neq \beta$. Ako je G slobodni produkt grupa G_α , tada G zadovoljava sljedeći uvjet:

- (*) Za svaku grupu H i svaku familiju homomorfizama $h_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$, postoji homomorfizam $h : G \rightarrow H$ čija je restrikcija na G_α jednaka h_α , za svaki α .

Nadalje, h je jedinstven. Vrijedi i obrat.

Dokaz.

- ▶ Ako takav h postoji, dan je jednoznačno s $h(x) = h_{\alpha_1}(x_1) \cdots h_{\alpha_n}(x_n)$, gdje je $x = x_1 \cdots x_n$ reducirana reprezentacija, a α_i indeks takav da je $x_i \in G_{\alpha_i}$ (jedinstven jer $x_i \neq 1$)
- ▶ Pokazuje se: h homomorfizam. Prelazimo na ψ definiranu na riječima iz G_α , ne nužno reduciranim, $\psi((x_1, \dots, x_n)) := h_{\alpha_1}(x_1) \cdots h_{\alpha_n}(x_n)$. Pokazuje se: ψ invarijantan na redukciju. Stoga

$$h(x) = \psi(\text{bilo koja reprezentacija, ne nužno reducirana}).$$

- ▶ S druge strane, za konkatenciju riječi w, w' vrijedi: $\psi((w, w')) = \psi(w) \cdot \psi(w')$ u H , trivijalno po definiciji ψ .
- ▶ dokaz obrata kasnije (koristi se Teorem 68.4)

Definicija

Neka je $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ indeksirana familija grupa. Pretpostavimo da je G grupa i da je $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow G$ familija monomorfizama takva da je G slobodni produkt grupa $i_\alpha(G_\alpha)$. Tada kažemo da je G **vanjski slobodni produkt** grupa G_α u odnosu na monomorfizme i_α .

Teorem (68.2, Analogon 67.4 za direktne sume)

Za svaku familiju grupa $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ postoji grupa G i familija monomorfizama $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow G$ takva da je G slobodni produkt grupa $i_\alpha(G_\alpha)$.

Dokaz konstruktivan:

- ▶ G : sve reducirane riječi u elementima grupa G_α , s operacijom množenja definiranom konkatencijom riječi jedne na drugu i redukcijom, identiteta je prazna riječ \emptyset
- ▶ Svaka G_α je podgrupa od G sastavljena od prazne riječi i riječi duljine 1 oblika (x) , $x \in G_\alpha$, $x \neq 1_\alpha$.

Vrlo teško: provjeriti svojstva grupe za G . Nećemo (alternativni dokaz *Munkres*).

Lema (68.3, Uvjet proširenja za vanjski slobodni produkt)

Neka je G grupa, $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ familija grupa i $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow G$ familija homomorfizama. Ako je svaki i_α monomorfizam i G slobodni produkt grupa $i_\alpha(G_\alpha)$, tada G zadovoljava sljedeći uvjet:

- (*) Za svaku grupu H i svaku familiju homomorfizama $h_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$, postoji homomorfizam $h : G \rightarrow H$ takav da je $h \circ i_\alpha = h_\alpha$, za svaki α .

Nadalje, h je jedinstven.

Obratno, ako vrijedi uvjet (*), tada je svaki i_α monomorfizam i G je slobodni produkt grupa $i_\alpha(G_\alpha)$.

Dokaz direktno iz Leme 68.1. Obrat kasnije, koristeći Teorem 68.4.

Teorem (68.4, Jedinstvenost slobodnog produkta)

Neka je $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ familija grupa. Pretpostavimo da su G i G' grupe i $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow G$ i $i'_\alpha : G_\alpha \rightarrow G'$ familije monomorfizama takvih da familije $i_\alpha(G_\alpha)$ i $i'_\alpha(G_\alpha)$ generiraju G i G' redom. Ako i G i G' zadovoljavaju uvjet proširenja (*) iz prethodne leme (specijalno, ako je $G = \prod_\alpha^* i_\alpha(G_\alpha)$ i $G' = \prod_\alpha^* i'_\alpha(G_\alpha)$), tada postoji jedinstveni izomorfizam $\phi : G \rightarrow G'$ takav da je $\phi \circ i_\alpha = i'_\alpha$ za svaki α .

Dokaz obrata Leme 68.1 i 68.3.

Korolar (68.6)

Neka je $G = G_1 * G_2$, gdje je G_1 slobodni produkt podgrupa $\{H_\alpha\}_{\alpha \in J}$ i G_2 slobodni produkt podgrupa $\{H_\beta\}_{\beta \in K}$. Ako su indeksni skupovi J i K disjunktni, tada je G slobodni produkt podgrupa $\{H_\gamma\}_{\gamma \in J \cup K}$.

Dokaz: kopija dokaza Korolara 67.2 za direktne sume, 4 primjene uvjeta proširenja.

Specijalno, $G_1 * G_2 * G_3 = (G_1 * G_2) * G_3 = G_1 * (G_2 * G_3)$.

Neka je G grupa. Kažemo da su $x \in G$ i $y \in G$ **konjugirani** ako postoji $c \in G$ takav da je $y = cxc^{-1}$. Podgrupu od G koja je zatvorena na konjugiranje (sadrži sve konjugate svih svojih elemenata) nazivamo **normalnom podgrupom**.

Neka je S podskup grupe G . Presjek svih normalnih podgrupa od G koje sadrže S i sam je normalna podgrupa od G i zovemo je **najmanja normalna podgrupa od G koja sadrži S** .

Ako je N normalna podgrupa od G , s G/N označavamo particiju G obzirom na relaciju:

$$x \sim y \text{ ako } Nx = Ny$$

(particija G u skup svih desnih ko-skupova Nx , $x \in G$). To je grupa s operacijom: $(Nx) \cdot (Ny) := N(xy)$.

Projekcija $p : G \rightarrow G/N$ dana s $p(x) = Nx$ je epimorfizam s jezgrom N .

Teorem (68.7)

Neka je $G = G_1 * G_2$. Neka je N_i normalna podgrupa od G_i za $i = 1, 2$. Ako je N najmanja normalna podgrupa od G koja sadrži N_1 i N_2 , tada je $G/N \cong (G_1/N_1) * (G_2/N_2)$. **Dokaz.**

Korolar (68.8, analogon Korolara 67.3 za direktne sume)

Ako je N najmanja normalna podgrupa od $G_1 * G_2$ koja sadrži G_1 , tada je $(G_1 * G_2)/N \cong G_2$.

Dokaz: Stavimo $N_1 = G_1$ i $N_2 = \{1_{G_2}\}$.

Lema (68.9)

Neka je S podskup grupe G . Ako je N najmanja normalna podgrupa od G koja sadrži S , tada je N generirana svim konjugiranim elementima svih elemenata iz S .

Jasno: N sadrži konjugate elemenata iz S , pokazujemo da su to baš generatori. **Dokaz.**

Slobodne grupe

Definicija

Neka je $\{a_\alpha\}$ familija elemenata grupe G . Pretpostavimo da svaki a_α generira beskonačnu cikličku podgrupu G_α od G . Ako je G slobodni produkt grupa $\{G_\alpha\}$, tada kažemo da je G **slobodna grupa**, a familiju $\{a_\alpha\}$ zovemo **sustav slobodnih generatora** za G .

Specijalan slučaj slobodnog produkta grupa, za beskonačne cikličke grupe. Analogon *slobodne Ablove grupe* za direktne sume.

Napomena

Svaki $x \in G$ iz slobodne grupe G može se na jedinstven način zapisati kao (reducirani) produkt

$$x = (a_{\alpha_1})^{n_1} \cdots (a_{\alpha_k})^{n_k},$$

gdje su $a_{\alpha_i} \in G_{\alpha_i}$, $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ (no ne i sve G_{α_i} nužno različite), te $n_i \in \mathbb{Z}$, $n_i \neq 0$.

Lema (69.1, Uvjet proširenja za slobodnu grupu)

Neka je G grupa i $\{a_\alpha\}_{\alpha \in J}$ familija elemenata od G . Ako je G slobodna grupa sa sustavom slobodnih generatora $\{a_\alpha\}$, tada G zadovoljava sljedeći uvjet:

- (*) Za svaku grupu H i svaku familiju $\{y_\alpha\}$ elemenata od H , postoji homomorfizam $h : G \rightarrow H$ takav da je $h(a_\alpha) = y_\alpha$, za svaki α .

Nadalje, h je jedinstven. Obratno, ako uvjet (*) vrijedi, tada je G slobodna grupa sa sustavom slobodnih generatora $\{a_\alpha\}$.

Dokaz: Primjena Leme 68.1 za slobodne produkte (spec. slučaj slobodnih grupa).

- ▶ Zadamo homomorfizme $h_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$ sa $h_\alpha(a_\alpha) = y_\alpha \in H$ (potpuno zadani jer G_α beskonačna ciklička grupa s generatorom a_α),
- ▶ Obrat: uzmemo za fiksni $\beta \in J$ homomorfizam $h : G \rightarrow \mathbb{Z}$ t.d. $h(a_\beta) = 1$, $h(a_\alpha) = 0$, $\alpha \neq \beta \Rightarrow G_\beta$ generirana s a_β je beskonačna ciklička.

Teorem (69.2)

Neka je $G = G_1 * G_2$, gdje su G_1 i G_2 slobodne grupe sa sustavima slobodnih generatora $\{a_\alpha\}_{\alpha \in J}$ i $\{a_\beta\}_{\beta \in K}$ redom. Ako su J i K disjunktni, tada je G slobodna grupa sa sustavom slobodnih generatora $\{a_\gamma\}_{\gamma \in J \cup K}$. Dokaz: Korolar 68.6.

Definicija

Neka je $\{a_\alpha\}_{\alpha \in J}$ proizvoljna indeksirana familija. Neka G_α označava skup svih simbola oblika a_α^n za $n \in \mathbb{Z}$. Tada G_α postaje grupa uz definiranje $a_\alpha^n \cdot a_\alpha^m = a_\alpha^{n+m}$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Vanjski slobodni produkt $G = \prod_{\alpha} i_\alpha(G_\alpha)$ grupa $\{G_\alpha\}$ zovemo **slobodna grupa na elementima** a_α .

Napomena

Često identificiramo grupu G_α s $i_\alpha(G_\alpha) \subseteq G$ u vanjskom slobodnom produktu i smatramo G slobodnim produktom grupa $\{G_\alpha\}$, a familiju $\{a_\alpha\}$ sistemom slobodnih generatora od G .

Slobodne abelove grupe iz slobodnih dobivamo kvocijentiranjem po grupi komutatora!

Definicija

Neka je G grupa. Ako su $x, y \in G$, označimo sa $[x, y]$ element $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ od G kojeg zovemo **komutator** od x i y . Podgrupu od G generiranu sa skupom svih komutatora od G zovemo **komutatorska podgrupa** od G i označavamo sa $[G, G]$.

Za Abelove grupe G , komutatorska grupa $[G, G] = \{1_G\}$ trivijalna. Veličina komutatorske grupe govori 'koliko je G ne-abelova'.

Lema (69.3)

Za svaku grupu G , komutatorska podgrupa $[G, G]$ je normalna podgrupa od G , a kvocijentna grupa $G/[G, G]$ je abelova. Ako je $h : G \rightarrow H$ bilo koji homomorfizam sa G u abelovu grupu H , tada jezgra od h sadrži $[G, G]$ pa h inducira homomorfizam $k : G/[G, G] \rightarrow H$.

Dokaz nećemo (algebra).

Teorem (69.4)

Ako je G slobodna grupa sa slobodnim generatorima a_α , tada je $G/[G, G]$ slobodna abelova grupa s bazom $[a_\alpha]$, gdje $[a_\alpha]$ označava desni ko-skup od a_α , $a_\alpha[G, G] \in G/[G, G]$.

Dokaz. Lema 67.7.

Korolar (69.5)

Ako je G slobodna grupa s n slobodnih generatora, tada svaki sustav slobodnih generatora za G ima n elemenata.

Dokaz. Po Teoremu 69.4. $G/[G, G]$ je slobodna abelova grupa ranga n , rang slobodne abelove grupe jedinstven po Teoremu 67.8.

Seifert-van Kampenov teorem

Teorem (70.2, Seifert-van Kampenov teorem, klasična verzija)

Neka je $X = U \cup V$, gdje su U i V otvoreni u X . Pretpostavimo da su U , V i $U \cap V$ putevima povezani. Neka je $x_0 \in U \cap V$.

Neka je $j : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ homomorfizam slobodnog produkta koji proširuje homomorfizme

$j_1 : \pi_1(U, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ i $j_2 : \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ inducirane inkluzijama U i V u X .

Tada je j surjektivna i njena jezgra je najmanja normalna podgrupa N slobodnog produkta koja sadrži sve elemente reprezentirane riječima oblika $i_1(g)^{-1}i_2(g)$, $g \in \pi_1(U \cap V, x_0)$, gdje su i_1 i i_2 homomorfizmi inducirani inkluzijama $U \cap V$ u U i V .

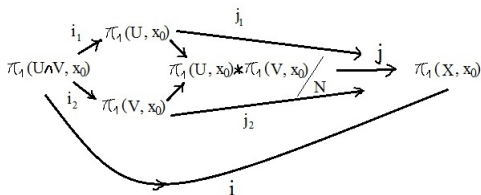
Drugim riječima, j inducira izomorfizam

$$(\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)) / N \simeq \pi_1(X, x_0).$$

Dokaz.

- Teorem 59.1. $\Rightarrow \pi_1(U, x_0)$ i $\pi_1(V, x_0)$ (pod izomorfizmima i_1 i i_2 induciranim inkluzijama U i V u X) generiraju $\pi_1(X, x_0) \Rightarrow j$ surjektivna.

- Pokazujemo $N \subseteq \text{Ker}(j) \Rightarrow j$ inducira epimorfizam
 $k : (\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)) / N \rightarrow \pi_1(X, x_0)$.



Zašto $N \subseteq \text{Ker}(j)$?

$j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2 = i$, gdje je i homomorfizam fundamentalnih grupa induciran ulaganjem $U \cap V$ u X . Očekivano:

$$i_1(g)i_2^{-1}(g) \in \text{Ker}(j).$$

Nadalje, jezgra je normalna.

- Pokazujemo: k injektivan (izomorfizam), pa je $N = \text{Ker}(j)$ (Munkres, tehnički.)

Korolar (70.3)

Neka vrijede pretpostavke Seifert-van Kampenovog teorema. Ako je $U \cap V$ jednostavno povezan, tada postoji izomorfizam $k : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$.

Korolar (70.4)

Neka vrijede pretpostavke Seifert-van Kampenovog teorema. Ako je V jednostavno povezan, tada postoji izomorfizam $k : \pi_1(U, x_0)/N \rightarrow \pi_1(X, x_0)$, gdje je N najmanja normalna podgrupa od $\pi_1(U, x_0)$ koja sadrži sliku homomorfizma $i_1 : \pi_1(U \cap V, x_0) \rightarrow \pi_1(U, x_0)$.

Generalizacija SVK teorema za proizvoljne unije

Teorem (Hatcher, Teorem 1.20)

Neka je prostor X unija putevima povezanih, otvorenih (u X) skupova A_α , $\alpha \in J$, takvih da svaki sadrži točku x_0 i takvih da je $A_\alpha \cap A_\beta$ povezan putevima za $\alpha \neq \beta$. Tada je homomorfizam $j : \prod_{\alpha}^* \pi_1(A_\alpha, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ koji proširuje homomorfizme j_α inducirane ulaganjem A_α u X surjektivan.

Štoviše, ako je svaki presjek $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ za $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ povezan putevima, tada je $\text{Ker}(j)$ normalna podgrupa N generirana svim elementima oblika

$$i_{\alpha\beta}(g)i_{\beta\alpha}^{-1}(g), \quad g \in \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta, x_0),$$

gdje $i_{\alpha\beta}$, $i_{\beta\alpha}$ redom označavaju homomorfizme inducirane inkluzijama A_α u $A_{\alpha\beta}$, odnosno A_β u $A_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta \in J$, $\alpha \neq \beta$.

Drugim riječima, j inducira izomorfizam

$$\prod_{\alpha \in J}^* \pi_1(A_\alpha, x_0) \simeq \pi_1(X, x_0).$$

Dokaz nećemo.

Primjena SVK teorema: određivanje fundamentalne grupe za *wedge* kružnica

Definicija (Wedge konačnog broja kružnica)

Neka je X Hausdorffov prostor koji je unija potprostora S_1, \dots, S_n , od kojih je svaki homeomorfan jediničnoj kružnici S^1 .

Pretpostavimo da postoji točka p od X takva da je $S_i \cap S_j = \{p\}$ za $i \neq j$. Tada X zovemo **wedge** kružnica S_1, \dots, S_n ili **jednotočkovna unija** kružnica S_1, \dots, S_n , u oznaci $X = \bigvee_i S_i$.

Napomena

X se može smjestiti u \mathbb{R}^2 : X homeomorfan $C_1 \cup \dots \cup C_n \subset \mathbb{R}^2$, C_i kružnica s centrom $(i, 0)$ radijusa i , $p \leftrightarrow (0, 0)$.

Definicija

Neka je X prostor koji je unija potprostora X_α , za $\alpha \in J$. Za topologiju od X kažemo da je **koherentna** ili **usklađena** s potprostorima X_α ako vrijedi da je podskup F od X zatvoren u X ako i samo ako⁵ je $F \cap X_\alpha$ zatvoren u X_α za svaki $\alpha \in J$. Ekvivalentni uvjet je da je skup otvoren u X ako je njegov presjek sa svakim X_α otvoren u X_α .

Definicija (Wedge proizvoljnog broja kružnica)

Neka je X prostor koji je unija potprostora S_α , za $\alpha \in J$, od kojih je svaki homeomorfan jediničnoj kružnici S^1 . Pretpostavimo da postoji točka p od X takva da je $S_\alpha \cap S_\beta = \{p\}$ za $\alpha \neq \beta$. Ako je topologija od X koherentna s potprostorima S_α , tada X zovemo **wedge** kružnica S_α , u oznaci $X = \bigvee_{\alpha \in J} S_\alpha$.

⁵samo ako znači da je topologija na svakom X_α relativna topologija naslijeđena od X

Napomena (Wedge proizvoljnog broja kružnica je generalizacija konačnog wedge-a)

- ▶ Topologija je za konačni wedge automatski koherentna. S_i , $i = 1, \dots, n$, su zatvoreni skupovi zbog Hausdorffovosti X (kompaktni kao neprekidna slika kompaktnih). Ako je $S_i \cap F$ zatvoren u S_i , $i = 1, \dots, n$, zatvoren je i u X . Stoga je $F = \cup_{i=1}^n (S_i \cap F)$ zatvoren u X kao **konačna!** unija zatvorenih u X .
- ▶ U definiciji beskonačnog wedge-a uvjet Hausdorffovosti nije potreban jer slijedi iz koherentnosti (Lema 71.2).

Lema (71.2)

Neka je X wedge kružnica S_α za $\alpha \in J$ (uz uvjet koherentnosti topologije). Tada je X normalan.

Dokaz.

Teorem (71.3, fundamentalna grupa za wedge kružnica)

Neka je X wedge kružnica S_α za $\alpha \in J$ i neka je p zajednička točka tih kružnica. Tada je $\pi_1(X, p)$ slobodna grupa. Ako je f_α petlja u S_α koja reprezentira generator od $\pi_1(S_\alpha, p)$, tada petlje $\{f_\alpha\}$ reprezentiraju sustav slobodnih generatora za $\pi_1(X, p)$.

Dokaz: Hatcher, Example 1.21.

- ▶ Wedge $X = \bigvee_\alpha S_\alpha$ = kvocijentni prostor unije disjunktnih kopija kružnice $U_\alpha S_\alpha$ sa baznim točkama x_α poistovjećenim u p
- ▶ Kvocijentna topologija na wedge-u je koherentna
- ▶ Točka x_α deformacijski retracts neke svoje otvorene okoline, nazovimo U_α
- ▶ $\Rightarrow A_\alpha := S_\alpha \bigvee_{\beta \neq \alpha} U_\beta$ otvorena okolina S_α u wedge-u X ; U_α je deformacijski retracts te okoline ($\bigvee_{\beta \neq \alpha} U_\beta$ kontrahira u točku spoja p , S_α ostaje na miru), pa je $\pi_1(A_\alpha, x_\alpha) = \pi_1(S_\alpha, x_\alpha)$
- ▶ $X = \bigvee_\alpha A_\alpha$; svi konačni presjeci različitih A_α jednaki $\bigvee_\alpha U_\alpha$ - deformacijski retracts točke (kontrahira u spoj p), pa fund. grupa trivijalna (1-povezan)!
- ▶ \Rightarrow Van Kampen: $\pi_1(X, p) \simeq \prod_{\alpha \in J}^* \pi_1(A_\alpha, p) = \prod_{\alpha}^* \pi_1(S_\alpha, p) = \prod_{\alpha}^* \mathbb{Z}$.

Dakle, za wedge kružnica $X = \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}$, $\pi_1(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}, p)$ je slobodni produkt kopija \mathbb{Z} , svaka kopija za jednu kružnicu S_{α} . $\{s_{\alpha}\}$ je sustav slobodnih generatora $\pi_1(X, p)$, gdje s_{α} predstavlja petlju koja kružnicu S_{α} obilazi u pozitivnom smjeru (s_{α}^{-1} u negativnom, s_{α}^2 dva puta u pozitivnom smjeru, itd.)

Specijalno, $\pi_1(S^1 \vee S^1, p) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, slobodna grupa sa slobodnim generatorima $\{a, b\}$ (a petlja koja obilazi prvu kružnicu u poz. smjeru, b drugu kružnicu).

Primjeri: fundamentalna grupa *theta*-prostora i havajske naušnice

Primjer: tzv. **Havajska naušnica**

- ▶ $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$, C_n kružnice radijusa $1/n$ sa središtem $(1/n, 0)$, gledano kao potprostor od \mathbb{R}^2 (s relativnom topologijom)
- ▶ NIJE wedge kružnica u **relativnoj topologiji** jer relativna topologija na X nije koherentna s potprostorima C_n .
- ▶ Fundamentalna grupa joj nije slobodna.

Primjer: **fundamentalna grupa θ -prostora alternativno preko Van Kampenovog teorema**

Znamo otprije: homotopskog tipa osmice koja je $S^1 \vee S^1$, fundamentalna grupa slobodna grupa $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

Lema (71.4, Realizacija bilo koje slobodne grupe kao fundamentalne grupe nekog prostora)

Za dani skup J postoji prostor X koji je wedge kružnica S_α za $\alpha \in J$.

Dokaz konstruktivan. Napraviti sami!

3. Simplicijalni kompleksi.

- ▶ prostori dobiveni od elementarnih topoloških gradivnih elemenata, *simpleksa*: točka, segment, trokut, tetraedar itd., do na homeomorfizam
- ▶ 1. *triangulacija prostora* - dekompozicija u male simplekse (pokazujemo *Teorem o simplicijalnoj aproksimaciji*: svako neprekidno preslikavanje s jednog na drugi kompleks može se aproksimirati homotopnim po dijelovima linearnim preslikavanjem na triangulaciji.)
- ▶ pomoću *baricentričkih subdivizija*, triangulaciju možemo postići proizvoljno malog dijametra i aproksimaciju po volji dobrom
- ▶ 2. razvijamo 'alate' za određivanje njihove fundamentalne grupe

Definicija

Neka je V vektorski prostor nad \mathbb{R} te neka je $C \subseteq V$ neki njegov podskup. Kažemo da je C konveksan ako

$$c_1, c_2 \in C \Rightarrow tc_1 + (1-t)c_2 \in C, t \in [0, 1].$$

Definicija

Neka je V vektorski prostor nad \mathbb{R} . Za skup vektora $\{v_0, \dots, v_k\}$ od V kažemo da je **geometrijski (ili konveksno) nezavisan** ako je skup $\{v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_k - v_0\}$ linearno nezavisan. Ekvivalentno, ako

$$\sum_{i=0}^k a_i v_i = 0, \sum_{i=0}^k a_i = 0 \Rightarrow a_i = 0, i = 1 \dots k.$$

Definicija ne ovisi o tome koji vektor zovemo v_0 .

Primjer. Konveksno nezavisan skup $\{v_0, v_1, v_2\}, \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ u \mathbb{R}^3 .

Teorem (4.1.1)

Pretpostavimo da je $\{v_0, \dots, v_k\}$ konveksno nezavisan skup. Neka je C konveksni skup generiran s $\{v_0, \dots, v_k\}$ (najmanji konveksan skup koji sadrži $\{v_0, \dots, v_k\}$, tj. presjek svih konveksnih skupova koji sadrže $\{v_0, \dots, v_k\}$). Tada se C sastoji od svih vektora oblika

$$\sum_{i=0}^k a_i v_i, \text{ gdje su } a_i \geq 0 \text{ za sve } i \text{ i } \sum_{i=0}^k a_i = 1$$

(tzv. *konveksnih kombinacija* vektora $\{v_0, \dots, v_k\}$). Nadalje, svaki $v \in C$ se na jedinstveni način može prikazati u tom obliku.

Dokaz sami. Stavimo

$$C_1 = \{\sum_{i=0}^k a_i v_i, \sum_{i=0}^k a_i = 1, a_i \geq 0\}.$$

- ▶ $C \subseteq C_1$ jer C_1 konveksan i sadrži v_0, \dots, v_k .
- ▶ $C_1 \subseteq C$ induktivno (po k , gdje k broj ne-nul koeficijenata a_i u elementu iz C_1).
- ▶ Jedinstvenost: suprotnom pretpostavkom, kontradikcija s konveksnom nezavisnošću.

k -simpleks

Definicija

Neka je V vektorski prostor nad \mathbb{R} . Konveksni skup generiran konveksno nezavisnim vektorima $\{v_0, \dots, v_k\}$ zovemo (zatvoreni) **k -simpleks** i označavamo $[v_0, \dots, v_k]$.

Broj $k \in \mathbb{N}_0$ zovemo **dimenzija** simpleksa.

Za $v \in [v_0, \dots, v_k]$, koeficijente a_i takve da je $v = \sum_{i=0}^k a_i v_i$, $a_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^k a_i = 1$ (jedinostveni po Teoremu 4.1.1), zovemo **baricentričke koordinate** od v .

Primjeri.

Definiramo **baricentričke koordinatne projekcije**

$p_i : [v_0, \dots, v_k] \rightarrow [0, 1]$, $p_i(v) = a_i$, $i = 0 \dots k$.

Napomena

- (1) k -simpleks $[v_0, \dots, v_k] \subseteq \mathbb{R}^n$, $k \leq n$, je kompaktan m.p.
- (2) Baricentričke projekcije p_i , $i = 0, \dots, k$, su neprekidne funkcije.

Dokaz: preko baricentričkih koordinata.

- ▶ $\Delta := \{(a_1, \dots, a_k) : a_1, \dots, a_k \geq 0, \sum_{i=1}^k a_i \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^k$. Kpt (omeđen, zatv.)
- ▶ $f : \Delta \rightarrow [v_0, \dots, v_k]$, $f((a_1, \dots, a_k)) = (1 - \sum_{i=1}^k a_i)v_0 + a_1v_1 + \dots + a_kv_k$
homeomorfizam (u relativnim topologijama euklidske).
- ▶ $p_i = \pi_i \circ f^{-1}$, $i = 1, \dots, k$; $p_0 = 1 - \sum_{i=1}^k p_i$, $\pi_i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ projekcije na i -tu koordinatu.

Definicija

Neka je $\{v_0, \dots, v_k\}$ konveksno nezavisan skup u \mathbb{R}^n , $k \leq n$. Skup

$$\{v \in [v_0, \dots, v_k] : p_i(v) > 0, i = 0, \dots, k\}$$

zovemo **otvoreni k -simpleks** i označavamo (v_0, \dots, v_k) .

Također ćemo otvoreni simpleks označavati sa (s) , a njegov pripadni zatvoreni simpleks sa $[s]$.

Neka je $[s] = [v_0, \dots, v_k] \subseteq \mathbb{R}^n$ zatvoreni simpleks. Točke v_0, \dots, v_k zovemo **vrhovi** od $[s]$, zatvorene simplekse $[v_{j_0}, \dots, v_{j_h}]$, gdje je $\{j_0, \dots, j_h\}$ neprazan podskup od $\{0, \dots, k\}$, zovemo **zatvorene stranice** od $[s]$, a otvorene simplekse $(v_{j_0}, \dots, v_{j_h})$ zovemo **otvorene stranice** od $[s]$.

Primjer: npr. (v_0, v_1, v_2, v_3) u \mathbb{R}^3 i njegove stranice.

Napomena

- (1) Vrh v_i je 0-dimenzionalna i zatvorena i otvorena stranica simpleksa.
- (2) Otvoreni simpleks (s) je otvoren skup. Njegov zatvarač je $[s]$. Također, $(s) = \text{Int}([s])$, tj. otvoreni simpleks (s) je zatvoreni simpleks $[s]$ bez svih njegovih otvorenih pravih stranica.
- (3) Zatvoreni simpleks $[s]$ je unija svih svojih otvorenih stranica.
- (4) Različite otvorene stranice simpleksa su disjunktne.

Dokaz: baricentričke koordinate.

Definicija

Neka je $[s] = [v_0, \dots, v_k]$ k -simpleks. **Baricentar simpleksa** $[s]$, kojeg označavamo s $b(s)$, je točka u otvorenom simpleksu (s) s baricentričkim koordinatama $(\frac{1}{k+1}, \dots, \frac{1}{k+1})$, tj.

$$b(s) = \sum_{i=0}^k \frac{v_i}{k+1} \in (s).$$

Simplicijalni kompleksi

Definicija

Konačnu familiju otvorenih simpleksa u \mathbb{R}^n zovemo (euklidski) **simplicijalni kompleks** K ako vrijedi:

1. Ako je $(s) \in K$, tada je $i[s]$ u K (tj. i sve otvorene stranice od (s) su u K).
2. Ako su $(s_1), (s_2) \in K$ i $(s_1) \cap (s_2) \neq \emptyset$, tada $(s_1) = (s_2)$ (tj. otvoreni podsimpleksi se ne sijeku.)

Dimenzija od K je maksimalna dimenzija simpleksa od K .

Primjeri i kontraprimjeri simplicijalnih kompleksa.

Neka je K simplicijalni kompleks. Neka $[K]$ označava **točkovnu uniju** otvorenih simpleksa od K . Tada je $[K]$ kompaktan i

$$[K] = \bigcup_{(s) \in K} (s) = \bigcup_{(s) \in K} [s].$$

Napomena

Simplicijalni kompleks ima jaču strukturu od svoje točkovne unije! Drugim riječima, postoje $K_1 \neq K_2$ takvi da je $[K_1] = [K_2]$. **Primjer.**

Ako je $[s]$ zatvoreni simpleks, familija njegovih otvorenih stranica je simplicijalni kompleks koji ćemo označavati sa s .

Definicija

Neka je K simplicijalni kompleks. Simplicijalni kompleks L takav da $(s) \in L$ implicira $(s) \in K$ zovemo **podkompleks** od K .

Napomena

Neka je K simplicijalni kompleks. Za svaki otvoreni simpleks $(s) \in K$, vrijedi da je kompleks s podkompleks od K .

Definicija

Neka je K kompleks. Neka je $r \in \mathbb{N}_0$, $r \leq \dim K$. Familiju $K^r = \{(s) \in K : \dim s \leq r\}$ zovemo **r -dimenzionalni kostur** ili **r -kostur** od K .

Napomena

r -kostur K_r kompleksa K , $r \leq \dim K$, je podkompleks od K .

Definicija

Neka je $v \in \mathbb{R}^n$ i $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Kažemo da je par (v, A) u **općoj poziciji** ako $v \notin A$ i za svaki $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$, vrijedi $[v, a_1] \cap [v, a_2] = \{v\}$.

Primjeri.

Definicija

Neka su (v, A) u općem položaju. Skup $v * A = \bigcup_{a \in A} [v, a]$ zovemo **konus** s vrhom v i bazom A ili **spoj** (join) od v i A .

Teorem (4.2.1)

Neka je $[s] = [v_0, \dots, v_k]$ k -simpleks i $v \in (s)$. Tada su $(v, [s^{k-1}])$ u općem položaju i $v * [s^{k-1}] = [s]$.

Dokaz. Nap. s^{k-1} označava $(k-1)$ -skelet od s kao simplicijalni kompleks, a $[s^{k-1}]$ je kompleks promatran kao skup (točkovna unija otvorenih simpleksa). Tehnički, preko baricentričkih koordinata (*Singer, Thorpe, Tm. 4.2.1*).

Definicija

Neka je K simplicijalni kompleks. **Subdivizija** od K je simplicijalni kompleks K' za koji vrijedi:

1. $[K'] = [K]$ (K' je skupovno isti kao K)
2. Ako je $(s) \in K'$, tada je (s) sadržan u nekom otvorenom simpleksu od K .

Primjeri.

Teorem (4.2.2)

Neka je s k -simpleks, K' subdivizija od s^{k-1} i $v \in (s)$. Tada su $(v, [K'])$ u općem položaju. Nadalje, $v * [K']$ je skup točaka kompleksa \tilde{K} (tj. $[\tilde{K}] = v * [K']$) definiranog sa

$$\tilde{K} = K' \cup \left(\bigcup_{s' \in K'} (s', v) \right) \cup (v),$$

gdje je $(s', v) = (v_0, \dots, v_r, v)$ za $(s') = (v_0, \dots, v_r) \in K'$. Kompleks \tilde{K} je subdivizija od s .

Dokaz.

Baricentričke subdivizije.

Definicija

Neka je K simplicijalni kompleks. Na K definiramo parcijalni uređaj sa $s_1 \leq s_2$ ako i samo ako je s_1 stranica od s_2 .

Strogi uređaj $s_1 < s_2$ znači: s_1 je stranica od s_2 i $s_1 \neq s_2$.

Teorem (4.2.3)

Neka je K simplicijalni kompleks. Neka je

$$K^{(1)} = \{(b(s_0), \dots, b(s_k)) : s_0, \dots, s_k \in K, s_0 < \dots < s_k\},$$

gdje je $b(s_i)$ baricentar od s_i . Tada je $K^{(1)}$ subdivizija od K .

Dodatno, za svaki $s_0, \dots, s_r \in K$ sa $s_0 < \dots < s_r$ vrijedi $(b(s_0), \dots, b(s_r)) \subset (s_r)$.

Subdiviziju $K^{(1)}$ zovemo **prva baricentrička subdivizija** od K . Induktivno, $K^{(n)} = (((K^{(1)})^{(1)}) \dots)^{(1)}$ je subdivizija od K koju zovemo **n -ta baricentrička subdivizija** od K .

Dokaz. Nećemo, indukcijom po dimenziji kompleksa. Pr. baricentričke subdivizije.

Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ simplicijalni kompleks. Definiramo:

$$\text{mesh } K = \max_{(s) \in K} \text{diam}[s],$$

gdje su (s) simpleksi od K , a na \mathbb{R}^n podrazumijevamo euklidsku metriku.

Lema

Ako je s simpleks u \mathbb{R}^n , tada je $\text{diam}[s] = d(v_1, v_2)$ za neki par vrhova v_1, v_2 od s , pri čemu je d euklidska metrika na \mathbb{R}^n .

Ako je K simplicijalni kompleks, tada je $\text{mesh } K = d(v_1, v_2)$, gdje su v_1, v_2 vrhovi nekog simpleksa od K .

Dokaz.

Teorem (4.2.4)

Neka je K simplicijalni kompleks dimenzije m . Tada je $\text{mesh } K^{(1)} \leq \frac{m}{m+1} \text{mesh } K$. Posebno, $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{mesh } K^{(n)} = 0$.

Dokaz. Tehnički, igranje sa sumacijom, sami.

Simplicijalno preslikavanje i simplicijalna aproksimacija

Definicija

Neka su K i L simplicijalni kompleksi. Preslikavanje $\varphi : [K] \rightarrow [L]$ zovemo **simplicijalno preslikavanje** ako vrijedi:

1. Za svaki vrh $v \in K$, $\varphi(v)$ je vrh u L .
2. Za svaki simpleks $(s) = (v_0, \dots, v_k) \in K$, vrhovi $\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_k)$ svi leže u nekom zatvorenom simpleksu od L (tj. skup $\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_k)$, kad se uklone sve točke koje se ponavljaju, je skup vrhova nekog simpleksa u L).
3. Za svaki $(s) = (v_0, \dots, v_k) \in K$ i $p = \sum_{i=0}^k a_i v_i \in (s)$, slika od p je dana sa $\varphi(p) = \sum_{i=0}^k a_i \varphi(v_i)$ (po dijelovima linearno (na svakom otvorenom simpleksu)).

Zbog linearnosti, simplicijalno preslikavanje **zadajemo na vrhovima** K^0 te proširujemo jednoznačno na K po linearnosti!

Primjeri: simplicijalna preslikavanja.

Napomena

- ▶ Kako simplicijalno preslikavanje ovisi o K i L , a ne samo o $[K]$ i $[L]$, označavat ćemo ga sa $\varphi : K \rightarrow L$.
- ▶ Simplicijalno preslikavanje neprekidno (zadajemo na vrhovima i po neprekidnosti proširujemo; lema o lijepljenju).

Teorem o simplicijalnoj aproksimaciji

Definicija

Neka je K simplicijalni kompleks i neka je v vrh od K . **Zvijezdom** od v zovemo skup točaka

$$\text{St}(v) := \bigcup_{v \in [s], (s) \in K} (s).$$

Teorem (4.3.1, za 4.3.5)

Neka je K simplicijalni kompleks. Za vrh v od K , $\text{St}(v)$ je otvoreni skup u $[K]$ koji sadrži v i v je jedini vrh od K koji leži u $\text{St}(v)$.

Familija $\{\text{St}(v)\}_{v \in K^0}$ je otvoreni pokrivač od $[K]$.

Dokaz.

Definicija

Neka su K i L simplicijalni kompleksi. Neka je $f : [K] \rightarrow [L]$ neprekidno. Simplicijalno preslikavanje $\varphi : K \rightarrow L$ zovemo **simplicijalna aproksimacija** od f ako je $f(\text{St}(v)) \subset \text{St}(\varphi(v))$ za svaki vrh v od K .

Teorem (4.3.2, za 4.3.5)

Neka je $\varphi : K \rightarrow L$ simplicijalna aproksimacija od $f : [K] \rightarrow [L]$. Tada, za svaki $p \in [K]$, $f(p)$ i $\varphi(p)$ leže u zajedničkom zatvorenom simpleksu od $[L]$.

Dokaz.

Korolar

Neka je $\varphi : K \rightarrow L$ simplicijalna aproksimacija od $f : [K] \rightarrow [L]$. Tada je $D(f, \varphi) \leq \text{mesh } L$, gdje $D(f, \varphi) = \sup_{p \in [K]} d(f(p), \varphi(p))$.

Lema

Pretpostavimo da je $f : K \rightarrow L$ simplicijalno preslikavanje i φ simplicijalna aproksimacija od f . Tada je $\varphi = f$. Dokaz.

Teorem (4.3.3, za 4.3.5)

Neka je φ simplicijalna aproksimacija od $f : [K] \rightarrow [L]$. Neka je K_1 podkompleks od K i pretpostavimo da je restrikcija od f na $[K_1]$ simplicijalno preslikavanje. Tada postoji homotopija između f i φ koja je stacionarna na $[K_1]$.

Dokaz. Koristi se gornja lema. Homotopija

$F : [K] \times [0, 1] \rightarrow [L]$, $F(p, t) = t\varphi(p) + (1 - t)f(p)$ dobro definirana, $\varphi \equiv f$ na K_1

Teorem (4.3.4, za 4.3.5)

Neka je $f : [K] \rightarrow [L]$ neprekidno i $\varphi : K^0 \rightarrow L^0$ preslikavanje vrhova. Tada φ može biti prošireno do simplicijalne aproksimacije od f ako i samo ako $f(\text{St}(v)) \subset \text{St}(\varphi(v))$ za sve $v \in K^0$.

Dokaz sami.

Teorem (4.3.5, Teorem o simplicijalnoj aproksimaciji)


Neka je $f : [K] \rightarrow [L]$ neprekidno. Neka je $\{K_n\}$ niz subdivizija od K takvih da $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{mesh } K_n = 0^6$. Tada, za dovoljno veliki n , postoji simplicijalno preslikavanje $\varphi : K_n \rightarrow L$ takvo da je φ simplicijalna aproksimacija od f .

Dokaz.

Korolar

Neka je $f : [K] \rightarrow [L]$ neprekidno. Tada, za svaki $\epsilon > 0$, postoje subdivizije K_n od K i L_n od L i simplicijalna aproksimacija $\varphi : K_n \rightarrow L_n$ od f takvi da je $d(f, \varphi) < \epsilon$.

Dokaz sami. Teorem 4.3.5 i Korolar Teorema 4.3.2.

⁶Jedan takav niz su npr. *baricentričke subdivizije* po Teoremu 4.2.4. 

Fundamentalna grupa simplicijalnog kompleksa

Definicija

Neka su K i L simplicijalni kompleksi i $\varphi_1, \varphi_2 : K \rightarrow L$ simplicijalna preslikavanja. Za φ_1 i φ_2 kažemo da su **susjedna** ako za svaki simpleks $(v_0, \dots, v_k) \in K$ postoji simpleks $(t) \in L$ takav da su $\varphi_1(v_0), \dots, \varphi_1(v_k)$ i $\varphi_2(v_0), \dots, \varphi_2(v_k)$ vrhovi od t .

Napomena

Svojstvo *biti susjedan* **nije relacija ekvivalencije** na skupu simplicijalnih preslikavanja sa K u L !

Definicija

Za simplicijana preslikavanja $\varphi, \psi : K \rightarrow L$ kažemo da su **susjedno ekvivalentna** i označavamo \simeq_c , ako postoji konačan niz $\varphi_0, \dots, \varphi_k : K \rightarrow L$ simplicijalnih preslikavanja takvih da $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_k = \psi$ i φ_i je susjedno sa φ_{i-1} za svaki $i \in \{1, \dots, k\}$.

Napomena

\simeq_c je relacija ekvivalencije na skupu svih simplicijalnih preslikavanja sa K u L .

Primjer.

Teorem (4.4.1)

Neka su K i L simplicijalni kompleksi i neka je $f : [K] \rightarrow [L]$.
Pretpostavimo da su $\varphi_1, \varphi_2 : K \rightarrow L$ simplicijalne aproksimacije od f . Tada su φ_1 i φ_2 susjedna preslikavanja.

Dokaz.

Teorem (4.4.2)

Pretpostavimo da su $\varphi_1, \varphi_2 : K \rightarrow L$ susjedna simplicijalna preslikavanja. Tada su φ_1 i φ_2 homotopna.

Dokaz. $H : [K] \times [0, 1] \rightarrow [L]$, $H(p, t) = t\varphi_1(p) + (1 - t)\varphi_2(p)$, $p \in [K]$.

Provjeriti : dobro definirano (slika H u $[L]$), koristi se susjedstvo!

Korolar

Susjedno ekvivalentna simplicijalna preslikavanja su homotopna.

Teorem (4.4.3)

Neka je K simplicijalni kompleks. Neka su $\alpha_0, \alpha_1 : I \rightarrow [K]$ putevi u $[K]$. Pretpostavimo $\alpha_0 \simeq_p \alpha_1$. Tada postoji subdivizija I' od I i simplicijalna preslikavanja $\varphi_1, \varphi_2 : I' \rightarrow K$ takva da vrijedi:

1. φ_j je simplicijalna aproksimacija od α_j , $j \in \{0, 1\}$.
2. $\varphi_1 \simeq_c \varphi_2$.

Štoviše, subdivizija I' može biti izabrana da bude finija od svake dane simplicijalne subdivizije od I .

Općenitije, ako su K i L simplicijalni kompleksi i $f_0, f_1 : [K] \rightarrow [L]$ homotopna preslikavanja, tada postoji subdivizija K' od K i simplicijalna preslikavanja $\varphi_1, \varphi_2 : K' \rightarrow L$ koja zadovoljavaju uvjete (1) i (2) Teorema 4.4.3.

Dokaz nećemo.

Definicija

Neka je K simplicijalni kompleks.

Brid u K je uređeni par $e = |v_1, v_2|$ vrhova u K , takvih da v_1 i v_2 leže u istom simpleksu od K ; v_1 je **početak** od e i v_2 je **završetak** od e .

Ako je $e = |v_1, v_2|$, brid $|v_2, v_1|$ označavamo s e^{-1} .

Staza u K je konačni niz $\omega = e_1 \cdots e_k$ bridova u K takvih da je za svaki $i \in \{1, \dots, k-1\}$ završetak od e_i početak od e_{i+1} . Početak od ω je početak od e_1 , a završetak od ω je završetak od e_k .

Za staze $\omega = e_1 \cdots e_k$ i $\tau = e'_1 \cdots e'_m$ u K , takve da je završetak od ω jednak početku od τ , definiramo **produkt staza** s

$$\omega\tau = e_1 \cdots e_k e'_1 \cdots e'_m.$$

Inverz staze $\omega = e_1 \cdots e_k$ je staza $\omega^{-1} := e_k^{-1} \cdots e_1^{-1}$.

Na skupu svih staza u K definiramo relaciju ekvivalencije na sljedeći način: Ako su $e = |v_1, v_2|$ i $f = |v_2, v_3|$ takvi da su v_1, v_2, v_3 vrhovi simpleksa, tada je produkt ef **bridno ekvivalentan** bridu $|v_1, v_3|$.

Staze ω i τ su **bridno ekvivalentne**, oznaka $\omega \simeq_E \tau$, ako τ može biti dobiven od ω nizom takvih elementarnih ekvivalencija.

Napomena

Bridna ekvivalencija je relacija ekvivalencije na skupu svih staza u K .

Primjeri bridnih ekvivalencija.

Teorem (4.4.4)

Neka je K simplicijalni kompleks i neka je v_0 vrh od K . Neka je $E(K, v_0)$ skup klasa ekvivalencije zatvorenih staza u K s početkom v_0 i krajem v_0 . Tada je $E(K, v_0)$ **grupa** s identitetom $|v_0, v_0|$ i operacijom množenja za staze i inverzom definiranima u prethodnoj definiciji.

Dokaz trivijalan, zatvorene staze s istim početkom uvijek možemo množiti u grupi.

Teorem (4.4.5, Fundamentalna grupa simplicijalnog kompleksa)

Neka je K simplicijalni kompleks i neka je v_0 vrh od K . Tada je fundamentalna grupa $\pi_1([K], v_0)$ izomorfna s $E(K, v_0)$.

Dokaz.

- ▶ Definiramo $h : E(K, v_0) \rightarrow \pi_1([K], v_0)$.
 $\omega = |v_0, v_1| \cdots |v_{k-1}, v_k| \in E(K, v_0)$ (staza u K koja počinje i završava u v_0);
subdivizija intervala $[0, 1]$ na k jednakih dijelova: $I = \{0, 1/k, \dots, (k-1)/k, 1\}$;
zadamo simplicijalno preslikavanje pridruženo stazi ω na vrhovima:

$$\varphi_\omega : I \rightarrow K, \varphi_\omega(j/k) = v_j, j = 0, \dots, k.$$

gdje je I subdivizija intervala promatrana kao simplicijalni kompleks.
Očito, $[\varphi_\omega] \in \pi_1([K], v_0)$.

Stavimo:

$$h(\omega) := [\varphi_\omega] \in \pi_1([K], v_0),$$

gdje $[\cdot]$ označava klasu homotopije putevima.

- ▶ h je dobro definirano: $\omega \simeq_E \tau \Rightarrow \varphi_\omega \simeq_p \varphi_\tau$ (ravninska homotopija zbog konveksnosti simpleksa).
- ▶ h je homomorfizam, injekcija, surjekcija (detalji: *Singer, Thorpe*).

Primjeri određivanja fundamentalnih grupa simplicijalnih kompleksa

1. SFERA

Napomena

Neka je $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ n -sfera, $n > 1$. Rekonstruiramo poznati rezultat $\pi_1(S^n, p)$ trivijalna, $p \in S^n$.

Dokaz.

- ▶ s ($n + 1$)-simpleks u \mathbb{R}^n ;
- ▶ sfera S^n homeomorfna n -kosturu $[s^n]$ (upišemo $[s]$ u sferu tako da je baricentar u središtu i projiciramo $[s^n]$ prema van na sferu);
- ▶ Teorem 4.4.5. $\pi_1(S^n, p) = \pi_1([s^n], v_0) = E(s^n, v_0)$. Svaka klasa homotopije petlji u $[s^n]$ s početkom u v_0 ima predstavnika stazu ω (φ_ω) koja leži u 1-kosturu $[s^1]$.
- ▶ zbog $n > 2$ postoji $p \in [s^n]$ takav da $p \notin [s^1]$, a $[s^n] \setminus p \simeq \mathbb{R}^n$ (1-povezan)

2. GRAF (simplicijalni kompleks dimenzije < 2)

Definicija

Graf je simplicijalni kompleks dimenzije manje od 2 (dim 0 ili 1).

Stablo je putevima povezan graf T takav da za svaki 1-simpleks $s \in T$, $[T] \setminus (s)$ nije povezan.

Krajnjom točkom grafa nazivamo vrh (0-simpleks) koji je vrh najviše jednog 1-simpleksa.

Primjer stabla.

Nap. Svako stablo ima krajnju točku. **Dokaz.**

Teorem (4.4.7)


Svako stablo je kontraktibilno.⁷

Dokaz. Indukcijom po broju vrhova.

Korolar

Neka je T stablo i v_0 vrh od T . Tada

$\pi_1([T], v_0) = E(T, v_0) = \{e\}$ trivijalna.

⁷Topološki prostor X je *kontraktibilan* ako je id_X nulhomotopna (homotopna konstantnom preslikavanju). Lako se pokaže: prostor je kontraktibilan akko je istog homotopskog tipa kao točka. 

Definicija

Neka je K graf, α_0 broj vrhova od K i α_1 broj 1-simpleksa. Tada je $\chi(K) = \alpha_0 - \alpha_1$ i $\chi(K)$ zovemo **Eulerova karakteristika** od K .

Napomena

Eulerova karakteristika je invarijantna na subdivizije.

(umetnemo vrh, ali podijelimo 1-simpleks na dva 1-simpleksa)

Teorem (4.4.8)

Neka je T stablo. Tada je $\chi(T) = 1$.

Dokaz lagan, indukcija po broju vrhova (micanjem krajnjeg vrha i priležećeg 1-simpleksa).

Teorem (4.4.9)

Neka je K putevima povezan graf. Neka je n najveći broj otvorenih 1-simpleksa koji mogu biti maknuti iz K bez da prostor postane nepovezan. Tada je $\chi(K) = 1 - n$.

Dokaz lagan, micanjem 1-simpleksa dok ne dobijemo stablo i primjenom Tm-a 4.4.8.

Teorem (4.4.10)

Neka je K putevima povezan graf i neka je v_0 vrh od K . Tada je $\pi_1([K], v_0)$ izomorfna slobodnoj grupi od $n = 1 - \chi(K)$ generatora.

Nap. Po Teoremu 4.4.9. n je **maksimalni broj 1-simpleksa koje možemo maknuti iz grafa da ostane povezan** (dok ne dobijemo stablo!)

Primjer.

3. SIMPLICIJALNI KOMPLEKSI VEĆE DIMENZIJE

Korolar

Neka je K simplicijalni kompleks. Tada je fundamentalna grupa $\pi_1([K], v_0)$ (v_0 je vrh od K) kvocijentna grupa slobodne grupe (na 'prirodan' način).

Dokaz. BSOMP K putevima povezan (inače po komponentama!)

- ▶ $i : K^1 \rightarrow K$ inkluzija generira homomorfizam fundamentalnih grupa
 $i_* : \pi_1([K^1], v_0) \rightarrow \pi_1([K], v_0)$
- ▶ Zbog Tm-a 4.4.5 $\pi_1([K^1], v_0)$, $\pi_1([K], v_0)$ izomorfne s $E(K^1, v_0)$, $E(K, v_0)$ pa i_* surjeksija.
- ▶ Stavimo $n := 1 - \chi(K^1)$, Teorem 4.4.10 $\Rightarrow \pi_1([K^1], v_0) = F_n$, gdje F_n slobodna grupa u n generatora
- ▶ $i_* : F_n \rightarrow \pi_1([K], v_0)$ epimorfizam, $H := \text{Ker}(i_*)$ (podgrupa)
- ▶ $\pi_1([K], v_0) \simeq F_n / H$
- ▶ **Opis H :** preko definicije bridnih ekvivalencija, H je podgrupa $E(K^1, v_0)$ koja je generirana stazama oblika $\omega|v_1, v_2||v_2, v_3||v_3, v_1|\omega^{-1}$, gdje (v_1, v_2, v_3) 2-simpleks u K , a ω staza od v_0 do v_1 .