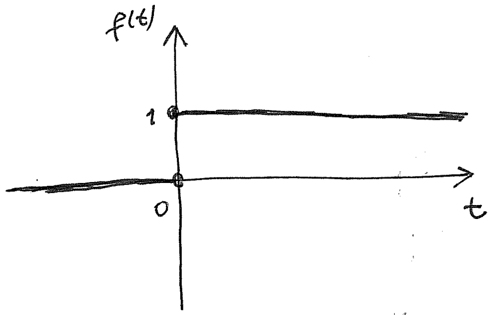
0. UVOD

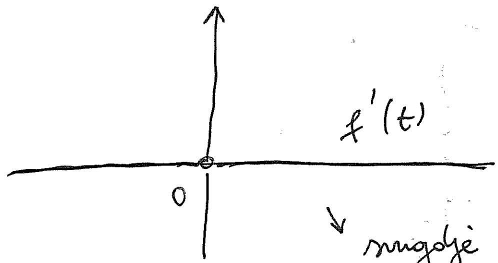


FIZIKALNO: konstantni signal koji se javlja od trenutka $t=0$

MATEMATIČKI: Heavisideova funkcija

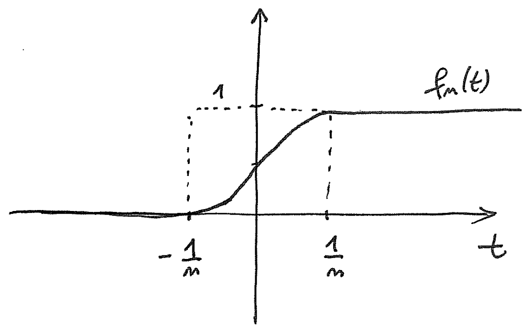
↳ prekid u $t=0$

↓ der.

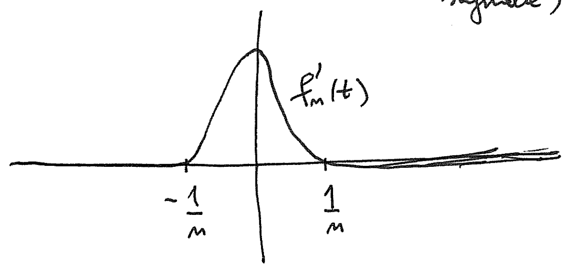


↘ svugdje 0, osim u 0 nije def.

U stvarnosti se ne može dogoditi u ~~fiz~~ fizikalnim procesima takav skok. Zato aproksimiramo



↓ derivacija (računanje impulsa signala)



SVOJSTVA:

(i) $f_n'(t) \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}$

(ii) $f_n'(t) = 0, \quad |t| > \frac{1}{n}$

(iii) $\int_{\mathbb{R}} f_n'(t)\,dt = 1$

Htjeli bismo da na limesu svojstva ostanu očuvana zbog fizikalne interpretacije:

(i) $f'(t) \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}$

(ii) $f'(t) = 0, \quad t \neq 0$

(iii) $\int_{\mathbb{R}} f'(t)\,dt = 1$

} takva f-ja ne postoji

⇓

potreba za novim objektima

(DISTRIBUCIJE)

Ponovimo osnovne rezultate koji su nam potrebni za proučavanje distribucija.

$$C_c^\infty(\Omega) := \{ u \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{supp} u \in K(\Omega) \}$$

$\hookrightarrow$ funkcije od interesa (test f-je)

- Postoji li netrivijalna f-ja iz $C_c^\infty(\Omega)$?
  ($0 \in C_c^\infty(\Omega)$, to je trivijalno)

DA.

$$\rho(x) = \begin{cases} C e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

$\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, ali ρ nije <u>analitička</u> (problem u $|x| = 1$)

$\hookrightarrow$ inače, da je funkcija nula na nekom otv. skupu i analitička bila bi nula pa je to dodatno objašnjenje

<u>SVOJSTVA</u>:

(i) $\rho \geq 0$

(ii) $\operatorname{supp} \rho = K[0, 1]$

(iii) $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)\,dx = 1$ (tako biramo C)

$\rho_n(x) := n^d \rho(nx)$,

(i) $\rho_n \geq 0$

(ii) $\operatorname{supp} \rho_n = K[0, \frac{1}{n}]$

(iii) $\int \rho_n = 1$

$$u_n(x) := (u * \rho_n)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u(y)\rho_n(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} u(x - z/n)\rho(z)\,dz.$$

<u>TEOREM 1</u>. Neka je $u \in L^1(\Omega)$, $\operatorname{supp} u \in K(\Omega)$. Tada je $u_n \in C_c^\infty(\Omega)$ ako je $1/n < d(\operatorname{supp} u, \operatorname{Fr} \Omega)$.

Ako je u neprekinuta, onda $u_n \rightrightarrows u$, dok u slučaju da je $u \in L^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty\rangle$, vrijedi $\|u_n - u\|_{L^p} \to 0$.

preskočiti

KOROLAR 2. Ako je μ Radonova mjera na Ω koja se poništava na $C_c^\infty(\Omega)$, onda je $\mu = 0$.

Dz. Treba dokazati da je $C_c^\infty(\Omega)$ gust u $C_c(\Omega)$, ali u topologiji prostora $C_c(\Omega)$!

$\operatorname{supp} u_{n+1} \subseteq \operatorname{supp} u_n$, u_n kao prije

$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) \ \operatorname{supp} u_n \subseteq \operatorname{supp} u_1$

- $u \in C_c(\Omega) \Rightarrow u \in L^1(\Omega)$ i ima kompaktan nosač $\Rightarrow \operatorname{supp} u_n \in K(\Omega)$
- $u \in C_c(\Omega) \Rightarrow u$ nepr. $\Rightarrow u_n \rightrightarrows u$ (na svakom ~~po~~ kompaktu)

To je upravo konvergencija u $C_c(\Omega)$ (pogledati u skripti).

LEMA 2. $K \in K(\Omega)$. Postoji $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ t.d.:

(i) $0 \le \psi \le 1$

(ii) $(\exists U \in \mathcal{T})(K \subseteq U) \ \psi|_U \equiv 1$.

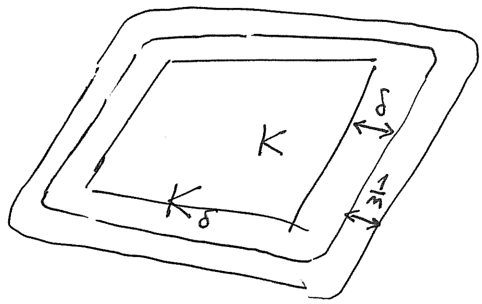
Dz.

$d(K, Fr\,\Omega) > 0 \Rightarrow (\exists \delta > 0) \ d(K, Fr(\Omega)) > \delta > 0$

$(\exists n \in \mathbb{N}) \quad 0 < \frac{1}{n} < \delta < \frac{1}{n} + \delta < d(K, Fr\,\Omega)$.

$K_\delta := \{x \in \Omega : d(x, K) \le \delta\}$

↳ kompakt



$u := \chi_{K_\delta}$

$\psi := u_n$ (u_n kao prije)

- Iz dokaza T-1 $\Rightarrow \operatorname{supp} \psi = K_{\delta + \frac{1}{n}} \subseteq \Omega$

T-1 $\Rightarrow \psi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$|\psi(x)| \le \int_{\mathbb{R}^d} |u(x - \tfrac{z}{n})| \, |\rho(z)| \, dz \le \int_{\mathbb{R}^d} \rho(z) \, dz = 1$$

očito je $\psi \ge 0$.

$x \in K \Rightarrow x - z/n \in K_{\frac{1}{n}} \subseteq K_\delta \Rightarrow \psi(x) = 1, \ x \in K.$

1. DISTRIBUCIJE

Distribucija T je antilinearan funkcional na prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$ koja zadovoljava:

$$(\forall K \in K(\Omega))(\exists m \in \mathbb{N}_0)(\exists C > 0)(\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega))$$

$$\operatorname{supp} \varphi \subseteq K \implies |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(K)}$$

NAJPRIJE OVO:

↓

DEF. Za niz $(\varphi_n) \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ kažemo da je konvergentan k $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ako:

(i) $\exists$ kompakt $K \subseteq \Omega$ t.d. $\operatorname{supp} \varphi_n \subseteq K$, $\forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $\partial^\alpha \varphi_n \longrightarrow \partial^\alpha \varphi$ uniformno na $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$

Pišemo: $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi$.

DEF. Distribucija na Ω je linearan funkcional L u $\mathcal{D}(\Omega)$ koji je neprekinut u smislu da $L(\varphi_n) \longrightarrow L(\varphi)$ kada $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi$.

ISTAKNUTI:
- def. ekvivalentne
- ne možemo govoriti o omeđenost T kad $C_c^\infty(\Omega)$ nije normiran prostor

NA PREDAVANJIMA POKAZALI:

- $f \in L^1_{loc}(\Omega) \implies T_f(\varphi) := \int_\Omega f(x)\bar{\varphi}(x)\,dx$ je distribucija reda 0
- $f \longmapsto T_f$ je injekcija, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$\implies L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$

RADIMO POISTOVJEĆIVANJE f-ja i distribucija

$T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ regularna ako $(\exists f \in L^1_{loc}(\Omega))$ $T_f = T$.

$\delta_{\mathbf{x}} \varphi := \varphi(\mathbf{x})$ ... distribucija reda 0

TVRDNJA $\delta_{\mathbf{x}}$ nije regularna.

(BSO) $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Neka je $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ t.d.

$$(\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)) \int_{\mathbb{R}^d} f \bar{\varphi} = \bar{\varphi}(0).$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) \bar{\rho}(n\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \bar{\rho}(0)$$

$$\Rightarrow 0 < |\bar{\rho}(0)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})| \bar{\rho}(n\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{K[0,\frac{1}{n}]} |f(\mathbf{x})| \bar{\rho}(n\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leqslant$$

$$\leqslant C \int_{K[0,\frac{1}{n}]} |f(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow \Leftarrow$$

■

ZAKLJUČAK: Ulaganje $L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ nije surjekcija.

ZAD. 1 Jesu li sljedeći funkcionali distribucije?

a) $T(\varphi) = |\varphi(0)|$,

b) $T(\varphi) = a, \ a \in \mathbb{C}$,

c) $T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} |x|^\alpha \bar{\varphi}(x)\, dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Rj:

a) i b) nisu linearni $\Rightarrow$ NE

c) Treba provjeriti kada je $|x|^\alpha \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Problem je samo u kompaktima koji sadrže nulu, a kako je funkcija parna, dovoljno je gledati

$$\int_0^a |x|^\alpha dx = \underset{\substack{\downarrow \\ \alpha \neq -1}}{\int_0^a x^\alpha dx} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_0^a = \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad \underline{\text{DA za } \alpha > -1}$$

za $\alpha < -1$ nije

$\underline{\alpha = -1}$ $\quad \ln x \Big|_0^a = \ln a - \ln 0 = +\infty$ $\quad$ nije

OPERACIJE NA DISTRIBUCIJAMA

- $\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle$
- $\langle \psi T, \varphi \rangle = \langle T, \overline{\psi} \varphi \rangle$, $\psi \in C^\infty(\Omega)$
- $\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \langle T, \tilde{\varphi} \rangle$, $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$ ... refleksija (može i oznaka φ_σ)
- $\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a} \varphi \rangle$, $\tau_a \varphi(x) = \varphi(x-a)$ ... translacija

ZAD. 2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.
Naći f', f'' i f''' u smislu distribucija.

Rj: Označimo s T_f distribuciju pridruženu f-ji f.

$$\langle T_f', \varphi \rangle = - \langle T_f, \varphi' \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \varphi'(x)\,dx = - \int_{-\infty}^{0} (-x) \varphi'(x)\,dx - \int_0^{+\infty} x \varphi'(x)\,dx$$

$$= \underbrace{x\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{0}}_{=0} - \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\,dx - \underbrace{x\varphi(x)\Big|_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sign}(x) \varphi(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad T_f' = \operatorname{sign}(x)$$

$$\langle T_f'', \varphi \rangle = - \langle T_f', \varphi' \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sign}(x) \varphi'(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} \varphi'(x)\,dx - \int_0^{+\infty} \varphi'(x)\,dx$$

$$= \varphi(x)\Big|_{-\infty}^{0} - \varphi(x)\Big|_0^{+\infty} = 2\varphi(0) = \langle 2\delta_0, \varphi \rangle$$

$$\Rightarrow \quad T_f'' = 2\delta_0$$

$$T_f''' = 2\delta_0' \qquad \left(\langle 2\delta_0', \varphi \rangle = - \langle 2\delta_0, \varphi' \rangle = -2\varphi'(0) \right).$$

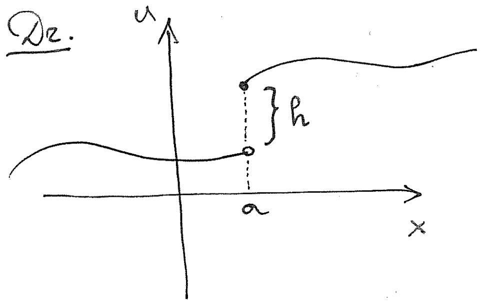
NAP. Od sad poistovjećujemo $f = T_f$.

LEMA 1. Neka je $u \in C^1$ na $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, a u točki $x = a$ ima prekid prve vrste. Tada vrijedi:

$$u'(x) = \{u(x)\} + h\,\delta(x-a), \quad h = u(a+) - u(a-),$$

gdje je $\{u(x)\}$ funkcija koja je jednaka u' tamo gdje postoji i naziva se regularni dio poopćene derivacije (derivacije u smislu distribucija) $u'(x)$.

<u>Dz.</u>



Poistovjećujemo $u = T_u$.

$$\langle u', \varphi\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} u\varphi'\,dx = -\int_{-\infty}^{a} u\varphi'dx - \int_{a}^{+\infty} u\varphi'dx$$

$$= -u\varphi\Big|_{-\infty}^{a} + \int_{-\infty}^{a} u'\varphi\,dx - u\varphi\Big|_{a}^{+\infty} + \int_{a}^{+\infty} u'\varphi\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \{u'\}\varphi\,dx + \big(u(a+) - u(a-)\big)\,\varphi(a)$$

<u>ZAD. 3.</u> Naći derivaciju f-je u smislu distribucija f-je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \le 0 \\ \sin x, & x \in \langle 0, \pi\rangle \\ x^2, & x \ge \pi \end{cases},$$

a) po definiciji,

b) koristeći LEMU 1.

<u>Rj:</u> a) ...

b) $f'(x) = g(x) + 0\cdot\delta_0 + (\pi^2 - 0)\,\overset{\delta_0(x-\pi)}{\delta_\pi} = g(x) + \pi^2\delta_\pi$, gdje je

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ \cos x, & x \in \langle 0, \pi\rangle \\ 2x, & x > \pi \end{cases}$$

nije bitno što je u točkama prekida

<u>ZAD. 4.</u> a) Pokažite: $\tau_a \delta_b = \delta_{a+b}$,

b) $T := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{na}$

Argumentirajte zašto je T distribucija i pokažite T periodička ($\exists a \ni \tau_a T = T$).

c) $\langle T, \varphi\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\varphi}^{(n)}(n)$

Argumentirajte zašto je T distribucija i odredite red distribucije.

<u>Rj:</u> a) $\langle \tau_a\delta_b, \varphi\rangle = \langle \delta_b, \tau_{-a}\varphi\rangle = (\overline{\tau_{-a}\varphi})(b) = \overline{\varphi}(b-(-a)) = \overline{\varphi}(a+b)$

$= \langle \delta_{a+b}, \varphi\rangle$.

b) $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n > n_0)\ na, -na \notin \operatorname{supp}\varphi$

$\langle T, \varphi\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi}(na) = \sum_{n=-n_0}^{n_0} \overline{\varphi}(na) < \infty \Rightarrow$ T je dobro def

$$|\langle T,\varphi\rangle| \le \sum_{n=-n_0}^{n_0} |\overline{\varphi}(na)| \le (2n_0+1)\,\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

$\Rightarrow$ T je distribucija (reda 0).

$$\langle \tau_a T,\varphi\rangle = \langle T, \tau_{-a}\varphi\rangle = \sum_{n=-n_0}^{n_0} \overline{\varphi}(na+a) = \sum_{n=-n_0+1}^{n_0+1}\overline{\varphi}(na) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\overline{\varphi}(na) = \langle T,\varphi\rangle \quad \checkmark$$

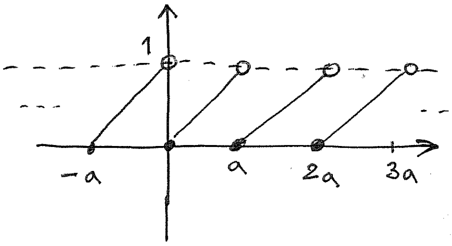
c) $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow (\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n>n_0)\ \overset{n\notin \operatorname{supp}\varphi}{\varphi(n)=0}$ (onda je naravno i $n\notin\operatorname{supp}\varphi^{(k)}$)

$$\langle T,\varphi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\varphi}^{(n)}(n) = \sum_{n=1}^{n_0}\overline{\varphi}^{(n)}(n)$$

$\Rightarrow |\langle T,\varphi\rangle| \le n_0 \max\limits_{n\le n_0}\|\varphi^{(n)}\|_{L^\infty}$

$\Rightarrow$ T je distribucija besk. reda jer n_0 ovisi o kompaktu.

ZAD. 5 Beskonačno prekidne periodičke f-je



$f(x) = \frac{1}{a}x + (-k)$, $x\in[ka,(k+1)a\rangle$

$\hookrightarrow$ klasična derivacija nije definirana u točkama ka, $k\in\mathbb{Z}$, a jednaka je $f'(x)=\frac{1}{a}$ (tj. $\{f'(x)\}=\frac{1}{a}$).

Derivacija u smislu distribucije:

$$f' = \frac{1}{a} - \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta_{na}}$$

$$\left.\begin{matrix} f(ka+)=0 \\ f(ka-)=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow h=-1$$

NAPOMENA. Odredite f-ju kojoj je distribucija iz ZAD.4. b) derivacija.

Tj. $f(x)=\left\lfloor \frac{x}{a}\right\rfloor$.

$\boxed{\text{DZ}}$ $g\in C^\infty(\Omega)$

$$\langle g\delta_a,\varphi\rangle = \langle g(a)\delta_a,\varphi\rangle$$

KONVERGENCIJA DISTRIBUCIJA

$$\underbrace{T_m \xrightarrow{*} T}_{T_m, T \in \mathcal{D}'(\Omega)} \quad (T_m \xrightarrow{\mathcal{D}'} T) \overset{def}{\iff} (\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)) \quad \langle T_m, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle .$$

PRIMJER.

a) $u_m \in C(\mathbb{R}^d)$, $u_m \rightrightarrows u$, $m \to \infty$ $\Rightarrow$ $u_m \xrightarrow{\mathcal{D}'} u$, $m \to \infty$

Uistinu, neka je $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$,

$$|\langle u_m, \varphi\rangle - \langle u, \varphi\rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} u_m(x)\bar\varphi(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^d} u(x)\bar\varphi(x)\,dx \right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} |u_m(x) - u(x)|\,|\varphi(x)|\,dx$$

$$\leq \underbrace{\|u_m - u\|_{L^\infty}}_{\to 0} \operatorname{vol}(\operatorname{supp}\varphi)\,\|\varphi\|_{L^\infty}$$

b) $u_m \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $u_m \to u$ u $L^2(\mathbb{R}^d)$ $\Rightarrow$ $u_m \xrightarrow{\mathcal{D}'} u$.

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$,

$$|\langle u_m, \varphi\rangle - \langle u, \varphi\rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u_m(x) - u(x)|\,|\varphi(x)|\,dx$$

$$\leq \|u_m - u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

$$\leq \operatorname{vol}(\operatorname{supp}\varphi)\,\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \underbrace{\|u_m - u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}_{\to 0}$$

Zapravo imamo da konvergencija u svim promatranim prostorima povlači konvergenciju u smislu distribucija.

- Je li kvg. u smislu distribucije uistinu najslabija kvg.?

PRIMJER.

$f_m(x) := \sin(mx)$. Očito je $f_m \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \Rightarrow f_m \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle f_m, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \sin(mx)\bar\varphi(x)\,dx \overset{P.I.}{=} \underbrace{-\frac{\cos(mx)}{m}\bar\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(mx)}{m}\bar\varphi(x)\,dx$$

$$\Rightarrow |\langle f_m, \varphi\rangle| \leq \frac{1}{m}\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \operatorname{vol}(\operatorname{supp}\varphi) \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow \sin(mx) \xrightarrow{*} 0$$

Ali je jasno da $\sin(mx) \not\rightrightarrows 0$, $\sin(mx) \overset{L^2}{\not\longrightarrow} 0$.

ZAD. 6. Dokažite da $\rho_m \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta_0$.

Rj:

$$|\langle \rho_m, \varphi\rangle - \langle \delta_0, \varphi\rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \rho_m(x)\overline{\varphi(x)}\,dx - \overline{\varphi}(0) \right|$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \rho_m(x)\left(\overline{\varphi}(x) - \overline{\varphi}(0)\right) dx \right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} \rho_m(x)\,|\varphi(x) - \varphi(0)|\,dx$$

$$= m^d \int_{K[0,\frac{1}{m}]} C \underbrace{e^{-\frac{1}{1-|mx|^2}}}_{\leq 1} |\varphi(x) - \varphi(0)|\,dx$$

$$\leq C\omega_d \int_{K[0,\frac{1}{m}]} |\varphi(x) - \varphi(0)|\,dx \longrightarrow 0$$

NAP. Deriviranje distribucija je neprekinuto.

$T_m, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $T_m \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$. $(\Omega \subseteq \mathbb{R}^d)$.

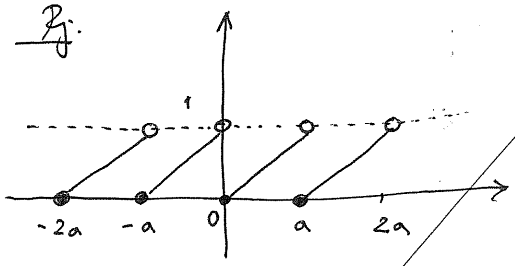
$$\langle \partial^\alpha T_m, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T_m, \underset{\mathcal{D}(\Omega)}{\underset{\cap}{\partial^\alpha \varphi}}\rangle \longrightarrow (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha \varphi\rangle = \langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle$$

$$\Rightarrow T_f' = T_{f'} + \lambda\delta_a + \mu\delta_b \quad , \quad \lambda = f(a+) - f(a-)$$
$$\mu = f(b+) - f(b-)$$

ZAD. 5. Naći derivaciju f-je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 0 \\ \sin x, & x \in \langle 0, \pi\rangle \\ x^2, & x \ge \pi \end{cases}$ a) po definiciji b) koristeći poznata svojstva za derivaciju prekidne f-je

ZAD. 6 Beskonačno prekida periodičke funkcije.

Rj.



$$f(x) = \frac{1}{a}x - k \ , \ x \in [ka, (k+1)a\rangle$$

↳ klasična derivacija nije definirana u točkama ka, $k\in\mathbb{Z}$ i jednaka je $f'(x) = \frac{1}{a}$

Derivacija u smislu distribucija:

$$f' = \frac{1}{a} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta_{na}$$

↳ $\left.\begin{array}{l} f(ka+) = 0 \\ f(ka-) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = -1$

KOMENTAR: Odredite f-ju kojoj je distribucija iz ZAD. 3. b) derivacija.

ZAD. ~~7~~. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$, $x\neq 0$

Pokušati naći ~~derivaciju u smislu distribucija~~. pripadnu distribuciju.

Rj. Funkcija f nije integrabilna u okolini ishodišta pa joj ne možemo pridružiti distribuciju.
Budući da na distribucije gledamo kao poopćenja f-ja, željeli bismo ipak naći način da f-ju f promatramo kao distribuciju.
(isti problem bi se javio sa svakom racionalnom f-jom koja ima realni pol)

$F(x) = \ln|x|$ ... primitivna f-ja

- $F \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

(BSO) gledamo integral na $[-1,1]$ jer je ionako samo problem u 0.

$$\int_{-1}^{1}\ln|x|\,dx = \int_{-1}^{0}\ln(-x)\,dx + \int_0^1 \ln x\,dx = x\ln(-x)\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0}dx + x\ln x\Big|_0^1 - \int_0^1 dx$$
$$= 0 - 1 + 0 - 1 = -2 < \infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0$$

Dobro je definirano F' u smislu distribucija (kao i derivacija bilo kojeg reda).

$$pv\left(\tfrac{1}{x}\right) := F' \quad \text{(za sada samo oznaka)}$$

$$\langle pv\left(\tfrac{1}{x}\right), \varphi \rangle = \, ?$$

$$\langle p\left(\tfrac{1}{x}\right), \varphi \rangle = \langle T_F', \varphi \rangle = - \langle T_F, \varphi' \rangle = - \int_{\mathbb{R}} \ln|x| \, \overline{\varphi'(x)} \, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon$$

$$J_\varepsilon := - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln|x| \, \overline{\varphi'(x)} \, dx - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \ln|x| \, \overline{\varphi'(x)} \, dx \qquad \text{(PARCIJALNA INTEGRACIJA)}$$

$$= - \ln|x| \, \overline{\varphi(x)} \Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\overline{\varphi(x)}}{x} dx - \ln|x| \, \overline{\varphi(x)} \Big|_{\varepsilon}^{+\infty} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\overline{\varphi(x)}}{x} dx$$

$$\overset{\operatorname{supp}\varphi \in K(\mathbb{R})}{=} \left(\overline{\varphi(\varepsilon)} - \overline{\varphi(-\varepsilon)} \right) \ln \varepsilon + \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\overline{\varphi(x)}}{x} dx$$

$$\overline{\varphi(\varepsilon)} - \overline{\varphi(-\varepsilon)} = 2\varepsilon \, \overline{\varphi'(c_\varepsilon)}, \quad |c_\varepsilon| < \varepsilon \ \ldots \text{ teorem srednje vrijednosti.}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} 2\varepsilon \ln \varepsilon \, \overline{\varphi'(c_\varepsilon)} = 2 \overline{\varphi'(0)} \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \langle pv\left(\tfrac{1}{x}\right), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\overline{\varphi(x)}}{x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\overline{\varphi(x)} - \overline{\varphi(-x)}}{x} dx \qquad (*)$$

NAPOMENA.

1) $\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ općenito ne postoji, ali simetrični limes $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ postoji i to se zove glavna vrijednost integrala (eng. „principal value") pa to objašnjava oznaku pv

2) $x \cdot pv\left(\tfrac{1}{x}\right) = 1$

samo se ~~uvrsti~~ uvrsti u $(*)$.

3) Sada možemo promatrati $\left(\tfrac{1}{x}\right)^{(m)}$ tako da gledamo $\left(pv\left(\tfrac{1}{x}\right)\right)^{(m)}$.

TVRDNJA: $pv\left(\frac{1}{x}\right)$ je distribucija reda 1.

1) $$\left|\langle pv(\tfrac{1}{x}), \varphi\rangle\right| = \left|\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}dx\right| = \lim_{\varepsilon\to 0}\left|\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{2x\,\varphi'(c_x)}{x}dx\right|$$

$$\leq 2\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{+\infty}|\varphi'(c_x)|\,dx = 2\int_0^{+\infty}|\varphi'(c_x)|\,dx$$

$$\leq C\,\|\varphi'\|_{L^\infty}$$

$\longrightarrow$ φ je s kompaktnim nosačem, pa je i φ'

Zašto nije prošao račun bez korištenja teorema srednje vrijednosti?

$$\left|\langle pv(\tfrac{1}{x}), \varphi\rangle\right| = \left|\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}dx\right| \leq 2\|\varphi\|_{L^\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\cancel{+\infty}\ M}\frac{dx}{x}$$

$$= 2\|\varphi\|_{L^\infty}\underbrace{\left(\ln M - \lim_{\varepsilon\to 0}\ln\varepsilon\right)}_{=+\infty}$$

φ je s kompaktnim nosačem, ali smo uzeli $0\in \operatorname{supp}\varphi$ jer inače imamo dobru situaciju

2) $\forall \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \not\ni 0$

$$\langle pv(\tfrac{1}{x}), \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(x)}{x}dx$$

pa zato $pv(\frac{1}{x})$ zovemo poopćenje (proširenje) funkcije $\frac{1}{x}$.
Za takve φ očito imamo da je $pv(\frac{1}{x})$ reda 0.

3) Iz jedan vidimo da je red ≤ 1. Time smo pokazali i da je $pv(\frac{1}{x})$ distribucija. Kad bi bila reda 0, onda bi bila mjera pa bi $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx$ bilo definirano za sve neprekinute omeđene funkcije na $\mathbb{R}$ što nije slučaj.

Za funkciju koja u okolini nule izgleda kao $\frac{H(x)}{\ln x}$ integral nije definiran.

$\longrightarrow$ SOCHOZKIJEVE FORMULE, Vladimirov

4) $pv(\frac{1}{x})$ je neparna distribucija $\langle \widetilde{pv(\tfrac{1}{x})}, \varphi\rangle = \langle pv(\tfrac{1}{x}), \tilde{\varphi}\rangle = -\langle pv(\tfrac{1}{x}), \varphi\rangle$

DEF. $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ je nula na $\Omega \overset{otv}{\subseteq} \mathbb{R}^d$ ako $\langle T, \varphi \rangle = 0$, za $\operatorname{supp} \varphi \subseteq \Omega$.

DEF. $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\operatorname{supp} T$ je komplement najvećeg otvorenog skupa gdje je $T = 0$.

PROBLEM: Riješiti u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ jednadžbu $fT = 0$, gdje je $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.
$\hookrightarrow$ posebno će nam od interesa biti polinomi

ZAD. 8. Riješite jednadžbu u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$xT = 0.$$

Rj: Trebamo pomoćne tvrdnje.

1) $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\chi(0) = 0 \Rightarrow (\exists \Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}))\ \chi = x\Psi$

$\Psi(x) := \dfrac{\chi(x)}{x}$ $\to$ očito je $\operatorname{supp} \Psi$ kompaktan i Ψ klase C^∞ svugdje osim u nuli

$\lim\limits_{x \to 0} \Psi(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\chi(x)}{x} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x \to 0} \chi'(x) = \chi'(0)$ $\Rightarrow$ limes postoji pa možemo dodefinirati Ψ do nepr. f-je na $\mathbb{R}$

$\to$ analogno bi se dobilo da je i C^∞ u nuli (Leibnizova formula)

BOLJE: Taylorov razvoj

$\chi(x) = \underbrace{\chi(0)}_{=0} + x\chi'(0) + \dfrac{x^2}{2!}\chi''(0) + \ldots$ $\leftarrow$ IPAK NIJE DOBRO JER F-JA NE MORA BITI ANALITIČKA OKO 0

$\dfrac{\chi(x)}{x} = \chi'(0) + \dfrac{x}{2!}\chi''(0) + \ldots$ pa je funkcija analitička oko nule, a time i C^∞

2) Neka je $\Theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ t.d. $\Theta(0) = 1$.
$(\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}))(\exists \Psi_\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}))\quad \varphi = \varphi(0)\Theta + x\Psi_\varphi$

[Tvrdnju 1) primijenimo na $\varphi - \varphi(0)\Theta$

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ i Ψ_φ kao u 2)

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi(0)\Theta + \Psi_\varphi x \rangle = \overline{\varphi(0)}\langle T, \Theta \rangle + \langle T, \Psi_\varphi x \rangle$$
$$= \overline{\varphi(0)}\langle T, \Theta \rangle + \underbrace{\langle \underbrace{xT}_{=0}, \Psi_\varphi \rangle}_{=0} = \overline{\varphi(0)}\underbrace{\langle T, \Theta \rangle}_{=C \text{ (ne ovisi o } \varphi)}$$

$\Rightarrow T = C\delta_0$ (T mora biti tog oblika)

Provjerimo da je to i dovoljni uvjet za rješenje

$$\langle xT, \varphi \rangle = \langle xC\delta_0, \varphi \rangle = C\langle \delta_0, x\varphi \rangle = 0 \Rightarrow \forall C \in \mathbb{C} \text{ je } C\delta_0 \text{ rj.}$$

Uočimo $\operatorname{supp} T \subseteq \{0\}$ (za $C = 0$ je $\operatorname{supp} T = \emptyset$)

RASIPISIVANJE da je $\psi(x) := \frac{\chi(x)}{x} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ za $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\chi(0)=0$.

14B

Vidjeli smo da je ψ neprekinuta u 0. Pogledajmo što je s n-tom derivacijom koristeći Leibnizovu formulu.

$$\psi^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \chi^{(n-k)}(x) (-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}} \qquad \left(\left(\frac{1}{x}\right)^{(k)} = (-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{x^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \chi^{(n-k)}(x) (-1)^k k!\, x^{n-k}$$

Kada pustimo $x \to 0$, na desnoj strani dobivamo neodređeni oblik $\frac{0}{0}$ jer je $\chi(0)=0$. Funkcije u brojniku i nazivniku su diferencijabilne pa primjenimo L'hospitalovo pravilo

$$\lim_{x\to 0} \psi^{(n)}(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(n+1)x^n} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k k!\, \chi^{(n-k+1)}(x)\, x^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^k k!\, (n-k)\, \chi^{(n-k)}(x)\, x^{n-k-1} \right)}_{:=(\Delta)}$$

$$(\Delta) = \chi^{(n+1)}(x)\, x^n + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\binom{n}{k+1} (-1)^{k+1} (k+1)! + \binom{n}{k} (-1)^k k!\, (n-k) \right) \chi^{(n-k)}(x)\, x^{n-k-1}$$

iz prve sume smo izdvojili član za $k=0$, te smo spustili indeks sumacije za 1

Računom i/ili kombinatornim argumentom se dobiva da je $\binom{n}{k+1}(k+1) = \binom{n}{k}(n-k)$

$$\Rightarrow (-1)^k k! \left(-\binom{n}{k+1}(k+1) + \binom{n}{k}(n-k) \right) = 0$$

$$\Rightarrow (\Delta) = \chi^{(n+1)}(x)\, x^n$$

Konačno,

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \psi^{(n)}(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\chi^{(n+1)}(x)}{n+1} = \frac{\chi^{(n+1)}(0)}{n+1}}$$

OBAVEZNO NAPISATI JER TREBA U ZADACIMA

$\Rightarrow \psi^{(n)}$ je neprekinuta u nuli za svaki n

$\Rightarrow \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

14C

TEOREM. $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, (samo se poznati na predavanju; KOR. 5.)

$$T' = 0 \iff T = \text{konst.}, \text{ tj. } \langle T, \varphi \rangle = C \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \, dx$$

Dz.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle = - C \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi' dx = 0 \Rightarrow T' = 0$$

- $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Rightarrow \varphi' \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$
- $\int_a^b \varphi' dx = \varphi(b) - \varphi(a) = 0$ kad $b \to +\infty$, $a \to -\infty$

jer φ ima kompaktan nosač

$\boxed{\Rightarrow}$ $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ t.d. $\int_{\mathbb{R}} \psi \, dx = 0$

$$\varphi(x) := \int_{-\infty}^{x} \psi(t) \, dt$$

- $\varphi \in C^\infty$ & $\varphi' = \psi$
- neka je $\operatorname{supp} \psi \subseteq [-a, a]$, $a > 0$

$b > a$, $\varphi(b) = \int_{-\infty}^{b} \psi(t) dt = \int_{-\infty}^{a} \psi(t) dt + \underbrace{\int_a^b \psi(t) dt}_{=0}$

$= \varphi(a)$

$$\varphi(a) = \int_{-\infty}^{a} \psi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$$

$\Rightarrow \varphi(x) = 0$, $x \in [a, +\infty\rangle$

Analogno $\varphi(x) = 0$, $x \in \langle -\infty, -a]$

$\Rightarrow \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\mathcal{D}_0(\mathbb{R}) := \{ \varphi' \mid \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \} = \{ \psi \mid \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} \psi = 0 \}$$

$\boxed{\supseteq}$ $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} \psi = 0$

$$\varphi(x) := \int_{-\infty}^{x} \psi(t) dt \Rightarrow \varphi' = \psi \ \& \ \varphi' \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

$\boxed{\subseteq}$ $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\psi := \varphi' \Rightarrow \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \ \& \ \int_{\mathbb{R}} \psi = 0$

Tada imamo :

$$(\forall \psi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})) \qquad \langle T, \psi \rangle = 0 .$$

$\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} \theta = 1$, $\operatorname{supp}\theta \subseteq \langle -1, 1 \rangle$ ... standarni izgladivač je jedna takva f-ja

$\hookrightarrow$ proizvoljna, ali fiksna

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\psi_\varphi := \varphi - I(\varphi)\,\theta$, gdje je $I(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi$

$$\Rightarrow \quad \psi_\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \psi_\varphi = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \varphi}_{=I(\varphi)} - I(\varphi) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \theta}_{=1} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \psi_\varphi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$$

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \psi_\varphi + I(\varphi)\,\theta \rangle = \underbrace{\langle T, \psi_\varphi \rangle}_{=0} + \overline{I(\varphi)}\, \langle T, \theta \rangle$$

$$= \langle T, \theta \rangle \overline{\int_{\mathbb{R}} \varphi}$$

$$= \langle C, \varphi \rangle$$

$\downarrow$ konstanta $\langle T, \theta \rangle$

$\Rightarrow \quad T =$ konst.

ZAKLJUČAK: $fT=0 \not\Rightarrow T=0$.

NEHOMOGENA JEDNADŽBA: $fT=g$, $f\in C^\infty$, $g\in \mathcal{D}'$

1. Riješimo pripadnu homogenu $fT_H=0$.
2. Nađemo jedno partikularno rj. $fT_P=g$.
3. $T=T_P+T_H$.

ZAD. 9. $xT=\delta_0$

Rj: Isti postupak kao u ZAD.8

$$\begin{aligned}
\langle T,\varphi\rangle &= \overline{\varphi(0)}\,\langle T,\Theta\rangle + \langle \delta_0, \psi_\varphi\rangle \\
&= \overline{\varphi(0)}\,\langle T,\Theta\rangle + \overline{\psi_\varphi(0)} \\
&= \overline{\varphi(0)}\,\langle T,\Theta\rangle + \overline{\varphi'(0)} - \overline{\varphi(0)}\,\overline{\Theta'(0)} \\
&= \Big(\underbrace{\langle T,\Theta\rangle - \overline{\Theta'(0)}}_{=:C \ldots \text{konst.}}\Big)\overline{\varphi(0)} + \overline{\varphi'(0)} \\
&= C\,\overline{\varphi(0)} + \overline{\varphi'(0)} \\
&= C\,\langle\delta_0,\varphi\rangle + \langle \delta_0,\varphi'\rangle \\
&= \langle C\delta_0 - \delta_0', \varphi\rangle
\end{aligned}$$

ili pogoditi partikularno npr. na sljedeći način:

$x\delta_0=0 \Rightarrow (x\delta_0)'=0$

$\Rightarrow x\delta_0'+\delta_0=0$

$\Rightarrow x(-\delta_0')=\delta_0$

$\Rightarrow T=C\delta_0-\delta_0'$ ... nužan uvjet

Pokažimo da su uistinu sve distribucije gornjeg oblik rješenje:

$$\begin{aligned}
\langle x(C\delta_0-\delta_0'),\varphi\rangle &= \underbrace{C\langle\delta_0, x\varphi\rangle}_{=0} - \langle\delta_0', x\varphi\rangle \\
&= \langle\delta_0,(x\varphi)'\rangle = \underbrace{\langle\delta_0, x\varphi'\rangle}_{=0} + \langle\delta_0,\varphi\rangle \\
&= \langle\delta_0,\varphi\rangle \checkmark
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ budući da smo rješavajući nehomogenu j. dobili sva rješenja (pojavio se $C\delta_0$ što je rješenje homogene), ne trebamo više računati homogenu j.

ZAD. 10. $xT = 1$.

Rj: ZAD. 8. $\Rightarrow T_H = C\delta_0$, $C \in \mathbb{C}$

ZAD. 7., NAP. 2. $\Rightarrow T_P = pv\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\Rightarrow T = pv\left(\tfrac{1}{x}\right) + C\delta_0, \quad C \in \mathbb{C}.$$

ZAD. 11. $(1+x^2)(1-x^2)T = 0$

Rj: $U := (1-x^2)T$

$\boxed{(1+x^2)U = 0}$, $\frac{1}{1+x^2} \in C^\infty(\mathbb{R})$ pa možemo množiti s njom distribuciju $(1+x^2)U$

$$\Rightarrow U = 0 \cdot \frac{1}{1+x^2} = 0$$

$$\Rightarrow (1-x^2)T = 0$$

$$(1-x)(1+x)T = 0$$

$V := (1+x)T$

$\Rightarrow \boxed{(1-x)V = 0}$ $\frac{1}{1-x} \notin C^\infty(\mathbb{R})$ pa ne možemo množiti s njom

$$(x-1)V = 0$$

$$(\tau_1 x)V = 0$$

$$\tau_1(x(\tau_{-1}V)) = 0 \quad / \tau_{-1}$$

$$x(\tau_{-1}V) = 0$$

$$\Rightarrow \tau_{-1}V = C\delta_0, \quad C \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow V = C\tau_1\delta_0 = C\delta_1, \quad C \in \mathbb{C}$$

$$(1+x)T = C\delta_1$$

$$(\tau_{-1}x)T = C\delta_1$$

$$x(\tau_1 T) = C\delta_2$$

$S := \tau_1 T$

$\boxed{xS = C\delta_2}$

$\hookrightarrow$ možemo riješiti istim postupkom kao ZAD. 8., a možemo probati pogoditi jedno partikularno tj. budući da rješenje homogene znamo

$$S_P = D\delta_2$$

$$\langle xS_P, \varphi\rangle = D\langle \delta_2, x\varphi\rangle = 2D\overline{\varphi(2)} = 2D\langle \delta_2, \varphi\rangle$$

$$\Rightarrow D = \frac{C}{2}$$

$$S = S_P + S_H = \frac{C}{2}\delta_2 + B\delta_0$$

$$\Rightarrow T = \tau_{-1}S = \frac{C}{2}\delta_1 + B\delta_{-1}, \quad C, B \in \mathbb{C}$$

tj. $\boxed{T = C\delta_1 + B\delta_{-1}, \quad C, B \in \mathbb{C}}$

Provjera:

$$\langle (1+x^2)(1-x^2)T, \varphi\rangle = C\underbrace{\langle \delta_1, (1+x^2)(1-x^2)\varphi\rangle}_{=0} + B\underbrace{\langle \delta_{-1}, (1+x^2)(1-x^2)\varphi\rangle}_{=0} = 0 \checkmark$$

ZAKLJUČAK: $fT = g$, $f \in C^\infty$, $g \in \mathcal{D}'$

Ako je $\frac{g}{f} \in \mathcal{D}'$, onda je $\frac{g}{f}$ jedno partikularno rj.
Posebno, za f polinom bez <u>realnih</u> nultočaka imamo da gornje vrijedi (jer $\frac{1}{f} \in C^\infty$).

Podsjetiti na $T' = 0 \iff T = \text{konst.}$ (str. 14c)

<u>ZAD. 12.</u> $T'' = \delta_0$

<u>Rj.</u> $U := T' \Rightarrow U' = \delta_0$

$$\text{supp}\, U' = \{0\} \Rightarrow U(x) = \begin{cases} A, & x<0 \\ B, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{--- } \underline{\text{funkcija}}$$

$$\Rightarrow T' = \begin{cases} A, & x<0 \\ B, & x\geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T(x) = \begin{cases} Ax+C, & x<0 \\ Bx+D, & x\geq 0 \end{cases}$$

drugi način bi bio da se T derivira dva puta po LEMI i da tražimo da zadovoljava $T'' = \delta_0$

Kako odrediti konstante A, B, C, D?

- T je neprekinuta u 0 jer se ne javlja δ_0'

$$\Rightarrow C = D$$

- T' ima „skok" $+1$ u 0

$$\Rightarrow T'(0+) - T'(0-) = 1$$
$$\Rightarrow B - A = 1$$
$$\Rightarrow B = 1 + A$$

$$\Rightarrow T(x) = \begin{cases} Ax + C, & x<0 \\ (1+A)x + C, & x \geq 0 \end{cases}$$

<u>NAPOMENA</u>. Jednadžba $T' = f$, $f \in \mathcal{D}'$ ima rješenje u $\mathcal{D}'$ i damo je s $T = F + C$, $C = \text{konst}$, gdje je $F \in \mathcal{D}'$ antidistribucija od f, tj. $F' = f$.

$\boxed{DZ}$ a) $xT' = 0 \qquad [U := T']$

b) $x^2 T = \delta_0 \qquad [U := xT]$

c) $xT' = \delta_0 \qquad [U := T']$

d) $x^2 T = 0 \qquad [U := xT]$

e)* $x^2 T = 1 \qquad$ [gledati derivaciju od $\mathrm{pv}(\frac{1}{x})$]

$\boxed{DZ}$ a) $\frac{d^k}{dx^k}|x|^m$, za proizvoljni k i fiksni $m \in \mathbb{N}$,

b) Pokazati da vrijedi $\quad |\sin x|'' + |\sin x| = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k\pi)$.

KONVOLUCIJA

$S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$
$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ $\quad , \quad \langle S * T, \varphi \rangle := \langle S \boxtimes T, \Phi_\varphi \rangle,$

gdje je $\Phi_\varphi(x, y) := \varphi(x + y)$.

Naravno, $S * T$ nije uvijek definirano jer Φ_φ ne mora imati kompaktan nosač. Međutim, ako S ili T imaju kompaktan nosač, $S * T$ je dobro definirano.

Općenito, $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$,

$$\langle S \boxtimes T, \Phi \rangle = \langle S, \overline{\langle T, \Phi(x, \cdot)\rangle} \rangle$$
$$= \langle T, \overline{\langle S, \Phi(\cdot, y)\rangle} \rangle.$$

PRIMJER.

- $\delta_0 * T = T$ ... δ_0 jedinica u konvolucijskoj algebri
- $\delta_a * T = \tau_a T$
- f, g funkcije:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)\, g(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, g(x - y)\, dy$$

SVOJSTVA:

i) $\|f*g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$

ii) $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = \frac{1}{\tau} + 1$, $\|f*g\|_{L^\tau(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}$ ... YOUNG-ova NEJEDNAKOST

$\Rightarrow$
- $L^1 * L^1 \subseteq L^1$ (s ovom operacijom L^1 postaje algebra)
- $L^1 * L^\infty \subseteq L^\infty$
- $L^2 * L^2 \subseteq L^\infty$
- $L^r * L^1 \subseteq L^r$

PRIMJER. $f = g = \chi_{[0,1]}$

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\, g(t)\, dt = \int_0^1 \chi_{[0,1]}(x-t)\, dt = \lambda\big([0,1] \cap [x-1,x]\big)$$

$$\Rightarrow (f*g)(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \leq 0 \\ x & , \ 0 < x \leq 1 \\ 2-x & , \ 1 < x \leq 2 \\ 0 & , \ x > 2 \end{cases}$$

$\boxed{DZ}$ $$(\chi_{[-a,a]} * \sin)(x) = \int_{\mathbb{R}} \sin(x-y)\, \chi_{[-a,a]}(y)\, dy = \int_{-a}^{a} \sin(x-y)\, dy = \cos(x-y)\Big|_{-a}^{a}$$
$$= \cos(x-a) - \cos(x+a) = 2 \sin a \sin x .$$

TVRDNJA: $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ & $\exists\, S*T$

$$\Rightarrow \exists\, (\partial^\alpha S)*T,\ S*(\partial^\alpha T) \quad i$$
$$\partial^\alpha(S*T) = (\partial^\alpha S)*T = S*(\partial^\alpha T).$$

Dz.

$$\langle \partial^\alpha(S*T), \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle S*T, \partial^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle S \boxtimes T, \Phi_{\partial^\alpha \varphi} \rangle$$
$$= (-1)^{|\alpha|} \langle S, \overline{\langle T, \Phi_{\partial^\alpha \varphi}(*,\cdot) \rangle} \rangle$$
$$= (-1)^{|\alpha|} \langle S, \overline{\langle T, \partial_y^\alpha \Phi_\varphi(*,\cdot) \rangle} \rangle$$
$$= (-1)^{|\alpha|} (-1)^{|\alpha|} \langle S, \overline{\langle \partial^\alpha T, \Phi_\varphi(*,\cdot) \rangle} \rangle$$
$$= \langle S \boxtimes \partial^\alpha T, \Phi_\varphi \rangle$$
$$= \langle S * \partial^\alpha T, \varphi \rangle$$, analogno za $\partial^\alpha S * T$.

MOTIVACIJA

$m \in \mathbb{N}$, $P := \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \partial^\alpha$ ... linearni parcijalni diferencijalni op. reda m

Želimo riješiti: $Pu = f$. $(\bullet)$

Neka je Φ rješenje jednadžbe $P\Phi = \delta_0$.

Tada je $\Phi * f$ ako postoji rješenje $(\bullet)$:

$$P(\Phi * f) \underset{\substack{\uparrow \\ P \text{ je linearan.}}}{=} (P\Phi) * f = \delta_0 * f = f \quad \checkmark$$

Φ zovemo elementarno rješenje

PRIMJER. Gornje posebno vrijedi kad je P obični dif. op. pa rješenje jed. $u'' = f$ dobivamo pomoću rješenje $\Phi'' = \delta_0$.

ZAD. 12. $\Rightarrow$
$$\Phi(x) = \begin{cases} Ax + C, & x < 0 \\ (1+A)x + C, & x \ge 0 \end{cases}$$

Dovoljno nam je jedno rj. pa uvrstimo $A = -\frac{1}{2}$, $C = 0$

$$\Rightarrow \Phi(x) = \frac{1}{2}|x|$$

$$\Rightarrow u(x) = (\Phi * f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}|x-y| \, f(y) \, dy.$$

Postoji li neki jednostavniji način računanje elementarnog rješenje?

a) PDJ

Da, pomoću Fourierove pretvorbe (poslije).

b) ODJ

Također može F. pretvorba, ali može i na sljedeći način:

$$P = \sum_{k=0}^{m} a_k \frac{d^k}{dx^k}.$$

Pretpostavimo rješenje ~~[illegible]~~ jednadžbe $P\Phi = \delta_0$ u obliku

$$\Phi = Hf, \quad H \text{ Heavisideova f-ja, a}$$

f je rj.:
$$\begin{cases} Pf = 0, & x > 0 \\ f(0) = \ldots = f^{(m-2)}(0) = 0 \\ f^{(m-1)}(0) = \frac{1}{a_m} \end{cases}$$

TVRDNJA: Φ je elem. rj.

Dz. $\phi' = H'f + Hf' = \delta_0 f + Hf' = f(0)\delta_0 + Hf' = Hf'$

$\phi'' = H'f' + Hf'' = f'(0)\delta_0 + Hf'' = Hf''$

$\vdots$

$\phi^{(k)} = Hf^{(k)}$

$\phi^{(k+1)} = H'f^{(k)} + Hf^{(k+1)} = f^{(k)}(0)\delta_0 + Hf^{(k+1)}$

$\vdots$

$\phi^{(m-1)} = Hf^{(m-1)}$

$\phi^{(m)} = f^{(m-1)}(0)\delta_0 + Hf^{(m)} = \frac{1}{a_m}\delta_0 + Hf^{(m)}$

$\Rightarrow \quad P\Phi = H(\underbrace{Pf}_{=0}) + \delta_0 = \delta_0$ ✓

ZAD. 13. Nađite formulu za rješenje jednadžbe

$$u'' - 3u' + 2u = f$$

$\Omega^{otv} \subseteq \mathbb{R}^d$

$$H^1(\Omega) := \{ f \in L^2(\Omega) \ : \ \nabla f \in L^2(\Omega)^d \} \quad \dots \text{ PROSTOR SOBOLJEVA}$$

(∇f u distribucijskom smislu)

$$\langle f, g \rangle_{H^1} := \int_\Omega fg + \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g \quad \dots \text{ SKALARNI PRODUKT}$$

$(H^1(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1})$ je Hilbertov prostor!

Primjer 1. $H^1(a,b) = \{ f \in L^2(a,b) \ : \ f' \in L^2(a,b) \}$

- $\sqrt{t} \overset{?}{\in} H^1(a,b)$

  derivacija : $\frac{1}{2\sqrt{t}} \overset{?}{\in} L^2(a,b)$

  Budući da u 0 imamo problem, sigurno je:

  $\sqrt{t} \notin H^1(0,1)$

- polinomi?

  DA, ako je $-\infty < a < b < +\infty$

Primjer 2. $\begin{cases} -u'' + u = -f \\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases}$, $f \in L^2(\Omega)$, $\Omega = \langle -1, 1 \rangle$

Postoji li rješenje? (u smislu distribucija)

Izvedimo najprije slabu formulaciju problema.
Množimo gornju jednadžbu s test funkcijom $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ i integriramo po Ω (dovoljno je uvijek uzeti da je φ za stupanj manje glatka od najviše derivacije koja se javlja):

$$-\int_\Omega u''\varphi + \int_\Omega u\varphi = -\int_\Omega f\varphi$$

PARCIJALNA INTEGRACIJA

$$\underbrace{-u'(x)\varphi(x)\Big|_1^{-1}}_{=0} + \int_\Omega u'\varphi' + \int_\Omega u\varphi = -\int_\Omega f\varphi \ , \quad \varphi \in C_c^1(\Omega)$$

jer je φ s kompaktnim nosačem

$$\Rightarrow \underbrace{\int_\Omega u'\varphi' + \int_\Omega u\varphi = -\int_\Omega f\varphi}_{\forall \varphi \in C_c^1(\Omega)} \quad \ldots \quad \text{SLABA FORMULACIJA}$$

Može se pokazati da je glatka f-ja u rješenje slabe formulacije ako i samo ako je rješenje klasične formulacije (one od koje smo počeli).

↳ PREDAVANJA PDJ 1

Budući da je slaba formulacija općenitija, nju promatramo.

Uočimo da je na lijevoj strani jednakosti slabe formulacije zapravo skalarni produkt $\langle u, \varphi \rangle_{H^1}$.

Definirajmo preslikavanje $L : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$L(\varphi) = -\int_{-1}^{1} f\varphi .$$

To je neprekinuti linearni funkcional na $H_0^1(\Omega)$:

$$H_0^1(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)} = \{ f \in H^1(\Omega) : f|_{\partial\Omega} = 0 \}$$

$\mathcal{D}(\Omega)$ ↓ zatvarač glatkih f-ja u normi $\|\cdot\|_{H^1} = \sqrt{\langle \cdot , \cdot \rangle_{H^1}}$

$\{\ldots\}$ ↓ prostor H^1 f-ja koje su nula na rubu (tako je to najlakše shvatiti, međutim nije sasvim korektno jer je $\partial\Omega$ skup mjere nula, a mi poistovjećujemo f-je koje su iste do na skup mjere 0)

$$|L(\varphi)| = \left| \int_{-1}^{1} f\varphi \right| \overset{C-S-B}{\leq} \|f\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|\varphi\|_{H^1}$$

$$\Rightarrow \quad L \in (H_0^1(\Omega))' .$$

To ne bismo dobili da smo uzeli da je L preslikavanje s $C_c^1(\Omega)$ pa zato proširujemo prostor test f-ja ($C_c^1(\Omega) \subseteq H_0^1(\Omega)$) i onda slaba formulacija glasi:

$$\begin{cases} \text{Tražimo } u \in H_0^1(\Omega) \text{ t.d.} \\ (\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)) \quad \langle u, \varphi \rangle_{H^1} = L(\varphi) \end{cases}$$

($u \in H_0^1(\Omega)$ nam garantira da je ispunjeno $u(-1) = u(1) = 0$)

Po Rieszovom teoremu o reprezentaciji funkcionala slijedi da postoji jedinstveno rješenje gornjeg problema.

Je li $\delta_0 \in (H_0^1(\langle -1, 1 \rangle))'$?

$$|\langle \delta_0, \varphi \rangle| = |\varphi(0)| \le C \|\varphi\|_{H^1(\langle -1,1 \rangle)}$$

ovo se može pokazati i vrijedi posebno kad smo u jednoj dimenziji

$\Rightarrow$ δ_0 je uistinu omeđen linearan funkcional pa će imati smisla problemi kada je δ_0 na desnoj strani

ZAD. 11.
$$\begin{cases} -u'' = \delta_0 & \text{na } \langle -1, 1 \rangle \\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Rj:

SLABA FORMULACIJA:

- naći $u \in H_0^1(\langle -1, 1 \rangle)$ t.d.

$$(\forall \varphi \in C_c^1(\langle -1,1 \rangle)) \quad \int_{-1}^{1} u'\varphi' = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

dovoljno je gledati ovaj prostor jer je on gust u $H_0^1(\langle -1,1 \rangle)$

iz gornjeg komentara uistinu vidimo da je na desnoj strani omeđeni linearni funkcional

Problem je što na lijevoj strani nije skalarni produkt, ali se može pokazati da i $\langle\langle u, \varphi \rangle\rangle := \int_{-1}^{1} u'\varphi'$ definira skalarni produk pa po Rieszovom teoremu opet imamo postojanje i jedinstvenost rješenja. U dokazivanje da je $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ skalarni produkt nećemo ulaziti.

Krenimo sada u rješavanje:

$$-u'' = \delta_0 \Rightarrow \operatorname{supp} u'' = \operatorname{supp} \delta_0 = \{0\}$$

u je distribucija, ali označimo s istim slovom i pripadnu funkciju (tj. $T_u = u$). Nosač f-je i distribucije je jednak pa imamo

$$-u''(x) = 0 \quad , \quad x<0$$
$$\&$$
$$-u''(x) = 0 \quad , \quad x>0$$

$$\Rightarrow \quad u(x) = \begin{cases} ax+b & , x \in \langle -1, 0 \rangle \\ cx+d & , x \in \langle 0, 1 \rangle \end{cases}$$

$$u(-1) = 0 \Rightarrow b-a = 0 \Rightarrow a = b$$
$$u(1) = 0 \Rightarrow c+d = 0 \Rightarrow d = -c$$

Za sada
$$u(x) = \begin{cases} ax+a & , x<0 \\ cx-c & , x>0 \end{cases} .$$

Međutim, očekujemo jedinstveno rj. pa moramo nekako odrediti a i c.

- NEPREKINUTOST U 0
  - znamo da je u nepr. u 0 jer da nije u prvoj derivaciji bi se vidio „skok", tj. imali bismo $c\delta_0$, a onda u drugoj der. $c\delta_0'$ što nije slučaj

$$\Rightarrow \quad a = -c$$

- SKOK PRVE DERIVACIJE U 0
  - $u'' = -\delta_0 \Rightarrow$ imamo „skok" u prvoj der. koji je jednak -1

$$u'(0+) - u'(0-) = -1$$

$$\Rightarrow \quad c - a = -1$$

$$\Rightarrow \quad c-(-c) = -1 \Rightarrow \boxed{c = -\frac{1}{2}}$$

(prvi uvjet)

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad u(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1) & , x<0 \\ -\frac{1}{2}(x+1) & , x>0 \end{cases}$$

PROVJERA:

$$u'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , x<0 \\ -\frac{1}{2} & , x>0 \end{cases}$$

$$u'' = 0 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\delta_0 = -\delta_0$$

od derivacije