

Parcijalne diferencijalne jednačbe II - popravni kolokvij

1. [10+15 = 25] Neka je $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ zadana s

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x < 0 , \\ 2x - 1 & , \quad 0 \leq x < 1 , \\ -x & , \quad x \geq 1 . \end{cases}$$

- Izračunajte po definiciji f' i f'' u smislu distribucija.
- Nađite opće rješenje jednačbe

$$xT = f'' + 2\delta'_1 + \delta'_0$$

u prostoru distribucija.

2. [10+10+10* = 30]

- Odredite Fourierovu pretvorbu funkcije $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ dane formulom

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in [a_1, a_2], \quad y \in [b_1, b_2] , \\ 0 & , \quad \text{inače} , \end{cases}$$

gdje su $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{R}$ konstante takve da $a_1 < a_2, b_1 < b_2$.

- Odredite Fourierovu pretvorbu funkcije $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ dane formulom

$$g(x, y) = \frac{\sin(x) \sin(y)}{xy} .$$

c)* Dokažite da $\frac{\sin(nx)}{x} \longrightarrow \pi\delta_0$ u prostoru temperiranih distribucija $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$.

3. [10+15 = 25]

- Odredite Fourierovu pretvorbu funkcije $u_0 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dane formulom

$$u_0(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} .$$

- Koristeći Fourierovu pretvorbu izvedite rješenje za jednačbu provođenja

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 , & \text{u } \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \\ u(0, \cdot) = u_0 , \end{cases}$$

gdje je u_0 kao u a) dijelu zadatka.

4. [20+10 = 30] Dan je niz početnih zadataća

$$\begin{cases} \partial_t u_n - \frac{i}{n^2} \Delta u_n = 0, & \text{u } \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \\ u_n(0, x) = \sin(nx). \end{cases}$$

- a) Za čvrsti n , izračunajte rješenje gornje zadataće.
- b) Odredite limes niza (u_n) u prostoru distribucija.

Marko Erceg