# Parcijalne diferencijalne jednadžbe II - kolokvij

**1.** [10+15 = 25] Riješite jednadžbe u $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$:
a) $(x-1)(x-2)T = 0$,
b) $(x-i)(x-1)(x-2)T = \delta_1$.

**2.** [10+10+10 = 30] Definirajmo distribuciju $C_\lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}$, formulom

$$\langle C_\lambda, \varphi \rangle := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\cos \lambda x}{x} \bar{\varphi}(x)\, dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{x} \bar{\varphi}(x)\, dx \right) , \quad \varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}) .$$

a) Pokazati da je $C_\lambda$ distribucija. Koji je njezin red?
b) Riješite jednadžbu u $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$:

$$xT = \cos \lambda x ,$$

gdje je $\lambda \in \mathbf{R}$.
c) Odredite limes za $\lambda \to 0^+$ i za $\lambda \to \infty$ distribucija $C_\lambda$.

**3.** [10+15 = 25]
a) Odredite Fourierovu pretvorbu funkcije $u_1 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ dane formulom

$$u_1(x,y) = \frac{1}{(a^2+x^2)(b^2+y^2)} ,$$

gdje su $a, b > 0$ konstante.
b) Koristeći Fourierovu pretvorbu izvedite rješenje za valnu jedndžbu

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 , \quad \text{u} \quad \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^2 \\ u(0,\cdot) = 0 , \\ u_t(0,\cdot) = u_1 , \end{cases}$$

gdje je $u_1$ kao u a) dijelu zadatka.

23. svibnja 2013.

**4.** [7+5+5+8+5 = 30]

a) Izvedite formulu za elementarno rješenje $\Phi(t,\mathbf{x})$ diferencijalnog operatora na $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d$

$$P = \frac{d}{dt} - \nu\Delta \ , \quad \nu > 0 \ .$$

b) Dokažite da

$$\Phi(t,\cdot) \to \delta_0 \ , \quad t \to 0^+$$

u prostoru temperiranih distribucija $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$.

c) Za $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ i $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ dobro je definirana konvolucija $T * f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$. Ako $T_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} T$, dokažite da tad i $T_n * f \xrightarrow{\mathcal{S}'} T * f$.

d) Dokažite koristeći Fourierovu pretvorbu da početna zadaća

$$\begin{cases} u_{tt} = \nu\Delta u \ , \quad \text{u} \ \ \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d \\ u(0,\cdot) = u_0 \ , \end{cases}$$

$\nu > 0$, ima jedinstveno rješenje za $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ koje je dano formulom

$$u(t,\mathbf{x}) = (\Phi(t,\cdot) * u_0)(\mathbf{x}) \ , \quad t > 0 \ ,$$

gdje je $\Phi$ kao u a), te $*$ označava konvoluciju samo po $\mathbf{x}$ varijablama.

e) Dokažite koristeći b) i c) da $u$ definiran u d) zadovoljava početni uvjet, tj.

$$\lim_{t\to 0^+} u(t,\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) \ .$$

*Marko Erceg*