Prva zadaća: Parcijalne diferencijalne jednadžbe II

1. [2+3]
(a) Dokažite lemu o deriviranju prekidnih funkcija s vježbi.
(b) Neka je $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ zadana s

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , \quad x \leqslant 0 \\ 2e^x & , \quad 0 < x \leqslant 1 \\ -\sqrt{x} & , \quad x > 1 \ . \end{cases}$$

Dokažite $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ i odredite f' i f'' u smislu distribucija.

2. [4+4+4] Dokažite sljedeće konvergencije u $\mathcal{D}'$:
(a) $n^2 \sin nx \xrightarrow{*} 0$,
(b) $u_n \xrightarrow{*} \delta_0$, gdje je

$$u_n = \begin{cases} n & , \quad x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}$$

Stekovljeva funkcija,
(c) za svaku $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$

$$n(\tau_{-\frac{1}{n}} T - T) \xrightarrow{*} T' \ .$$

3. [3] Neka je $g \in \mathrm{C}^n(\mathbf{R})$, $n \in \mathbf{N}$. Dokažite

$$g\delta_0^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n+k} g^{(n-k)}(0) \delta_0^{(k)} \ .$$

Rješenja u pisanom obliku treba predati na sljedećim vježbama 26. ožujka 2013.

Marko Erceg

20. ožujka 2013.