

Parcijalne diferencijalne jednačbe I - kolokvij

1. [20] Metodom karakteristika riješite Cauchyjevu zadaću

$$\begin{cases} xu_x - yu_y = \frac{y^2 - x^2}{u} & \text{u } \mathbf{R}^2, \\ u(x, x) = x^2 + 1. \end{cases}$$

Ispitajte postoje li karakteristične točke, odredite najveći otvoren povezan skup koji sadrži $\{(x, x) : x \in \mathbf{R}\}$ i na kojem je definirano rješenje gornje zadaće, te skicirajte projicirane karakteristike (ako postoje) kroz točke $(1, 1)$, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{6})$ i $(-4, -1)$.

2. [20] Odredite entropijsko rješenje Cauchyjeve zadaće u $\langle 0, \infty \rangle \times \mathbf{R}$

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, \\ u(0, \cdot) = g, \end{cases}$$

gdje je

$$g(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x < -1 \\ 2 & , \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & , \quad x > 1 \end{cases}.$$

3. [6+8+6]

a) Konstruirajte Greenovu funkciju za Laplaceovu jednačbu za poluravninu:

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1 < -2\}.$$

b) Izvedite eksplicitnu formulu za rješenje rubne zadaće na Ω (zadan u (a)):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(-2, x_2) = g(x_2). \end{cases}$$

c) Izračunajte rješenje iz (b) za

$$g(x) := \begin{cases} 1 - |x| & , \quad -1 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}.$$

4. [20] Zadana je početno-rubna zadaća na $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \\ u(0, x) = u_0(x), \\ u(t, 0) = 0, \end{cases}$$

gdje je $u_0 : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ dana s:

- a) $\cos x - x$;
b) $\sin x - x$.

Ispitajte u kojem slučaju su rubni i početni uvjet kompatibilni (obrazložite), te u tom slučaju izračunajte rješenje.

5. [20] Za $f \in C^2([0, \infty) \times \mathbf{R}^3)$, $g \in C^3(\mathbf{R}^3)$, $h \in C^2(\mathbf{R}^3)$ i $a \in \mathbf{R}$ pokažite da zadaća

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + au_t - au_{x_1} = f & \text{u } \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^3, \\ u(0, \cdot) = g, \\ u_t(0, \cdot) = h, \end{cases}$$

ima jedinstveno rješenje i izvedite eksplicitnu formulu za rješenje. Ovdje u_{x_1} označava parcijalnu derivaciju funkcije u po prvoj varijabli x_1 .

Uputa: Uvedite supstituciju tako da jednačbu svedete na valnu jednačbu.

Kolokvij se piše 120 minuta.

Svaki zadatak nosi 20 bodova (ukupno ima 100 bodova).

Za prolaz je potrebno skupiti barem 50 bodova.

Osim pribora za pisanje i brisanje, dopušteno je još samo korištenje službenih formula i matematičkog priručnika Bronštejn.

Rezultati će biti objavljeni na web stranici (ili internom dijelu foruma) najkasnije u ponedjeljak 28.1. navečer.

SRETNO!

Marko Erceg