Parcijalne diferencijalne jednadžbe I - kolokvij

1. [10+10]
(a) Izračunajte opće rješenje jednadžbe
$$u_x - 2xuu_y = 0 \qquad \text{u} \quad \mathbf{R}^2 \,.$$
(b) Odredite sva rješenja (ako postoje) iz (a) dijela koja zadovoljavaju $u(x, 2x) = \frac{1}{x}$.

2. [20] Izračunajte i skicirajte graf rješenja početne zadaće u $\langle 0, \infty \rangle \times \mathbf{R}$
$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \,, \\ u(0, \cdot) = g \,, \end{cases}$$
gdje je
$$g(x) = \begin{cases} 2 & , \quad x < -1 \\ 3 & , \quad -1 \leqslant x < 1 \\ 0 & , \quad x \geqslant 1 \end{cases} .$$

3. [4+8+8]
(a) Konstruirajte Greenovu funkciju za Laplaceovu jednadžbu za domenu:
$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x_1 < -1 \,,\ x_2 > 1 \right\}.$$

(b) Izvedite eksplicitnu formulu za rješenje rubne zadaće na Ω (zadan u (a)):
$$\begin{cases} \triangle u = 0 \,, \\ u(-1, x_2) = g(x_2 - 1) \,, \\ u(x_1, 1) = g(-x_1 - 1) \,. \end{cases}$$
(c) Izračunajte rješenje iz (b) za
$$g(x) := \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases} .$$

4. [20] Riješite Cauchyjevu zadaću
$$\begin{cases} u_t - \triangle u = \sin t \sin x_1 \sin x_2 \quad \text{u} \quad \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^2 \,, \\ u(0, \cdot) = 1 \,. \end{cases}$$

5. [20] Pokažite da postoji konstanta $C > 0$ za koju rješenje u valne jednadžbe
$$\begin{cases} u_{tt} - \triangle u = 0 \quad \text{u} \quad \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^3 \,, \\ u(0, \cdot) = u_0 \,, \\ u_t(0, \cdot) = u_1 \,, \end{cases}$$
zadovoljava
$$(\forall\, t > 0)(\forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3) \quad |u(t, \mathbf{x})| \leqslant \frac{C}{t} \,,$$
pri čemu su $u_0, u_1 \in \mathrm{C}^1_c(\mathbf{R}^3)$ (C^1 funkcije s kompaktnim nosačem).

Marko Erceg

14. siječnja 2016.