Druga zadaća: Parcijalne diferencijalne jednadžbe I

1. [4+4] Izračunajte opće rješenje zadaća:
a) $2yu_x + uu_y = 2yu^2$,
b) $u_x + e^x u_y + e^z u_z - (2x + e^x)e^u = 0$.

2. [6] Izračunajte opće rješenje zadaće

$$xu_x + 2xuu_y = u\,,$$

a zatim odredite ona rješenja (ako postoje) koja zadovoljavaju
a) $u = 2x$ na krivulji $y = 2x^2 + 1$.
b) $u = 2x^2$ na krivulji $y = 3x^3$.
Uputa: Najprije Lagrangeovom metodom dobijete opće rješenje gornje jednadžbe, a zatim odredite nepoznatu funkciju iz danog uvjeta.

3. [6] Izvedite eksplicitnu formulu za rješenje rubne zadaće na $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 : x_1 < 0\}$

$$\begin{cases} \triangle u = 0\,, \\ u(0, x_2, x_3) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x_2^2 + x_3^2}}\,. \end{cases}$$

4. [5] Riješite Cauchyjevu zadaću

$$\begin{cases} u_t - \triangle u = \cos t \quad \text{u} \quad \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^2\,, \\ u(0, \cdot) = x_1 x_2 e^{-x_1^2 - x_2^2}\,. \end{cases}$$

5. [5] Ako su u_0, u_1 i f_2 harmoničke funkcije na $\mathbf{R}^d$, te f_1 klase C^1 na $\langle 0, \infty\rangle$, pokažite da je jednostveno rješenje Cauchyjeve zadaće

$$\begin{cases} u_{tt} - \triangle u = f_1(t) f_2(\mathbf{x}) \quad \text{u} \quad \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d\,, \\ u(0, \cdot) = u_0\,, \\ u_t(0, \cdot) = u_1\,, \end{cases}$$

dano s

$$u(t, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) + t u_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x}) \int_0^t (t - s) f_1(s)\, ds\,.$$

Uputa: Direktnim računom se lako provjeri da je danom formulom dano rješenje zadane Cauchyjeve zadaće.

6. [6+4] Riješite Cauchyjevu zadaću

$$\begin{cases} u_{tt} - \triangle u = 2x_1 x_2 x_3 \quad \text{u} \quad \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^3\,, \\ u(0, \cdot) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2\,, \\ u_t(0, \cdot) = 1\,, \end{cases}$$

a) pomoču Kirchhoffove formule i Duhamelovog načela.
b) koristeći prethodni zadatak.

Rješenja u pisanom obliku treba predati na kolokviju.

Marko Erceg

8. siječnja 2016.