Prva zadaća: Parcijalne diferencijalne jednadžbe I

1. [8] Napišite eksplicitnu formulu za rješenje početne zadaće

$$\begin{cases} u_t + c_1\partial_1 u + c_2\partial_2 u + f(t,x_1,x_2)u = 0 \quad \text{u} \quad \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^2\,, \\ u(0,\cdot,\cdot) = g\,, \end{cases}$$

pri čemu su $f : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ i $g : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ zadane funkcije klase C^1 (na odgovarajućim domenama), dok su $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ konstante.

2. [4+4] Metodom karakteristika riješite Cauchyjeve zadaće

a)

$$\begin{cases} xu_x - 2yu_y - u_z = u^2 \quad \text{u} \quad \mathbf{R}^3\,, \\ u(x,y,0) = x^2 + xy + y^2\,. \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} uxu_x - yuu_y = y^2 - x^2 \quad \text{u} \quad \mathbf{R}^2\,, \\ u(x,x) = f(x)\,, \end{cases}$$

pri čemu je $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ zadana funkcija.

3. [5] Odredite dva slaba rješenja početne zadaće u $\langle 0,\infty\rangle \times \mathbf{R}$

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0\,, \\ u(0,\cdot) = g\,, \end{cases}$$

pri čemu je

$$g(x) := \begin{cases} -1 & , \quad x < 2 \\ 1 & , \quad x \geqslant 2 \end{cases}\,,$$

s tim da jedno slabo rješenje bude i entropijsko rješenje.

4. [6+8] Izračunajte i skicirajte graf entropijskog rješenja početne zadaće u $\langle 0,\infty\rangle \times \mathbf{R}$

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0\,, \\ u(0,\cdot) = g\,, \end{cases}$$

pri čemu je

(a)

$$g(x) := \begin{cases} 0 & , \quad x < -1 \\ x+1 & , \quad -1 \leqslant x < 0 \\ 1 & , \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 2-x & , \quad 1 \leqslant x < 2 \\ 0 & , \quad x \geqslant 2 \end{cases}\,.$$

(b)

$$g(x) := \begin{cases} 1 & , \quad x < -1 \\ 2 & , \quad -1 \leqslant x < 0 \\ 0 & , \quad x \geqslant 0 \end{cases}\,.$$

Rješenja u pisanom obliku treba predati najkasnije na vježbama 3. prosinca 2015.

Marko Erceg

30. studenoga 2015.