Parcijalne diferencijalne jednadžbe I - popravni kolokvij

1. [20] Riješite Cauchyjevu zadaću

$$\begin{cases} u_x + \sin(x) u_y = y \quad \text{u} \quad \mathbf{R}^2 \,, \\ u(0,y) = (y+1)^2 \,. \end{cases}$$

2. [20] Izračunajte i skicirajte graf rješenja početne zadaće u $\langle 0, \infty \rangle \times \mathbf{R}$

$$\begin{cases} u_t + u u_x = 0 \,, \\ u(0,\cdot) = g \,, \end{cases}$$

gdje je

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < -2 \\ -x-2 & , \quad -2 \leqslant x < -1 \\ x & , \quad -1 \leqslant x < 1 \\ -x+2 & , \quad 1 \leqslant x < 2 \\ 0 & , \quad x \geqslant 2 \end{cases} .$$

3. [4+8+8]

(a) Konstruirajte Greenovu funkciju za Laplaceovu jednadžbu za domenu:

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \;:\; x_1 > x_2\} \,.$$

(b) Izvedite eksplicitnu formulu za rješenje rubne zadaće na Ω (zadan u (a)):

$$\begin{cases} \triangle u = 0 \,, \\ u(x,x) = g(x) \,. \end{cases}$$

(c) Izračunajte rješenje iz (b) za

$$g(x) := \begin{cases} A - |x| & , \quad |x| \leqslant A \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases} ,$$

gdje je $A > 0$ konstanta.

4. [20] Riješite Cauchyjevu zadaću

$$\begin{cases} u_{tt} - \triangle u = t^2 x_1^2 \quad \text{u} \quad \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^3 \,, \\ u(0, x_1, x_2, x_3) = x_2 \,, \\ u_t(0, x_1, x_2, x_3) = x_3^2 \,. \end{cases}$$

5. [20] Neka $u \in \mathrm{C}^2(\langle 0, T] \times \mathbf{R}^d) \cap \mathrm{C}([0,T] \times \mathbf{R}^d)$ zadovoljava Cauchyjevu zadaću

$$\begin{cases} u_t - \triangle u = 0 \quad \text{u} \quad \langle 0, T \rangle \times \mathbf{R}^d \,, \\ u(0,\cdot) = u_0 \,, \end{cases}$$

i uvjet rasta

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{[0,T]\times \mathrm{K}[\mathsf{0},R]^c} |u(t,\mathbf{x})| = 0\,,$$

pri čemu je $\mathrm{K}[\mathsf{0},R]^c = \{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^d : |\mathbf{x}| > R\}$.

Pokažite da tada vrijedi

$$\sup_{[0,T]\times\mathbf{R}^d} u(t,\mathbf{x}) = \max\Big\{0, \sup_{\mathbf{R}^d} u_0\Big\}\,.$$

Marko Erceg