Druga zadaća: Parcijalne diferencijalne jednadžbe I

1. [2] Neka za realne brojeve $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k$, $k \in \mathbf{N}$, vrijedi

$$\frac{a_1}{b_1} = \ldots = \frac{a_k}{b_k},$$

tada za proizvoljne realne brojeve $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ također vrijedi

$$\frac{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k}{\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_k b_k} = \frac{a_1}{b_1} = \ldots = \frac{a_k}{b_k}.$$

Napomena: Ukoliko je $b = 0$ ili $d = 0$ uvjet $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ shvaćamo kao $ad = bc$ čime dopuštamo da nazivnici budu nula.

2. [5] Izračunajte opće rješenje zadaće:

$$yu_x - xu_y = x^3 y + xy^3 .$$

3. [5] Izračunajte opće rješenje zadaće:

$$u_x + xu_y + xyu_z = xyzu .$$

4. [6] Lagrangeovom metodom riješite Cauchyjevu zadaću

$$\begin{cases} xu_x + yu_y = 2u \quad \text{u} \quad \mathbf{R}^2 , \\ \quad u(x,1) = g(x) . \end{cases}$$

Uputa: Najprije Lagrangeovom metodom dobijete opće rješenje gornje jednadžbe, a zatim odredite nepoznatu funkciju iz danog uvjeta.

5. [12] Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ otvoren i omeđen. Za funkciju $v \in \mathrm{C}^2(\mathsf{Cl}\,\Omega)$ kažemo da je *podharmonička* ako u Ω vrijedi $-\triangle v \leqslant 0$.

(a) Dokažite da podharmonička funkcija v za svaku otvorenu kuglu $\mathrm{K}(\mathbf{x}, r) \subseteq \Omega$ zadovoljava

$$v(\mathbf{x}) \leqslant \frac{1}{|\mathrm{K}(\mathbf{x}, r)|} \int_{\mathrm{K}(\mathbf{x},r)} v(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} .$$

Uputa: Malo prilagodite dokaz za harmoničke funkcije.

(b) Koristeći (a) dio pokažite da za podharmoničku funkciju v vrijedi princip maksimuma:

$$\max_{\mathsf{Cl}\,\Omega} v = \max_{\mathsf{Fr}\,\Omega} v .$$

(c) Neka je $\Phi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ konveksna funkcija i u harmonička. Pokažite da je $v := \Phi(u)$ podharmonička funkcija.

(d) Za harmoničku funkciju u pokažite da je $v := |\nabla u|^2$ podharmonička.

Uputa: Jedno moguće rješenje je primjena tvrdnje iz (c) dijela.

Rješenja u pisanom obliku treba predati na vježbama 14. siječnja 2015.

Marko Erceg

31. prosinca 2014.