Prva zadaća: Parcijalne diferencijalne jednadžbe I

1. [7] Napišite eksplicitnu formulu za rješenje početne zadaće

$$\begin{cases} u_t + \mathsf{c}\cdot\nabla u + bu = 0 \quad \text{u} \quad \mathbf{R}^{1+d}\,, \\ u(0,\cdot) = g\,, \end{cases}$$

pri čemu je $\mathsf{c} \in \mathbf{R}^d$ zadani vektor, a $b \in \mathbf{R}$.
Uputa: Najprije riješite slučaj $d = 1$.

2. [4] Riješite Cauchyjevu zadaću

$$\begin{cases} u_t - (y^2-1)u_x = 0\,, \quad t > 0\,,\ x, y \in \mathbf{R}\,, \\ u(0,x,y) = e^y e^{-x^2}\,. \end{cases}$$

3. [7] Metodom karakteristika riješite Cauchyjevu zadaću

$$\begin{cases} xu_x + yu_y = 2u \quad \text{u} \quad \mathbf{R}^2\,, \\ u(x,1) = g(x)\,. \end{cases}$$

Skicirajte, ako postoje, karakteristike kroz točke $(0,1)$, $(1,1)$ i $(1,-1)$. Odredite u kojim je točkama pravca $y = 1$ jednadžba karakteristična i ispitajte je li u tim točkama rješenje definirano. Koji je najveći skup na kojem možemo definirati rješenje?

4. [5+7] Izračunajte i skicirajte graf entropijskog rješenja početne zadaće u $\langle 0,\infty\rangle \times \mathbf{R}$

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0\,, \\ u(0,\cdot) = g\,, \end{cases}$$

pri čemu je
(a)

$$g(x) := \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ -1 & , \quad x \geqslant 0 \end{cases}.$$

(b)

$$g(x) := \begin{cases} 1 & , \quad x < 0 \\ 2 & , \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 0 & , \quad x \geqslant 1 \end{cases}.$$

Rješenja u pisanom obliku treba predati na predavanjima 2. prosinca 2014.

Marko Erceg

12. studenoga 2014.