Parcijalne diferencijalne jednadžbe I - kolokvij

1. [10+10]
(a) Izračunajte opće rješenje jednadžbe

$$-xu_x + yu_y = xu^2 \qquad \text{u} \quad \mathbf{R}^2 .$$

(b) Odredite rješenje iz (a) dijela koje zadovoljava $u(x,1) = e^{-x}$.

2. [20] Izračunajte i skicirajte graf rješenja početne zadaće u $\langle 0,\infty\rangle \times \mathbf{R}$

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \, , \\ u(0,\cdot) = g \, , \end{cases}$$

gdje je

$$g(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x < 0 \\ 1-2x & , \quad 0 \leqslant x < 1 \\ -1 & , \quad x \geqslant 1 \end{cases} .$$

3. [4+8+8]
(a) Konstruirajte Greenovu funkciju za Laplaceovu jednadžbu za poluravninu:

$$\Omega = \{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x_2 > 1\} .$$

(b) Izvedite eksplicitnu formulu za rješenje rubne zadaće na Ω (zadan u (a)):

$$\begin{cases} \triangle u = 0 \, , \\ u(x_1,1) = g(x_1) \, . \end{cases}$$

(c) Izračunajte rješenje iz (b) za

$$g(x) := \begin{cases} |x|-1 & , \quad -1 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases} .$$

4. [20] Neka $u \in \mathrm{C}^{1,2}(\Omega_T) \cap \mathrm{C}(\mathsf{Cl}\,\Omega_T)$ zadovoljava jednadžbu provođenja

$$\begin{cases} u_t - \triangle u = f & \text{u} \quad \Omega_T \, , \\ u = g & \text{na} \quad \Gamma_T \, , \end{cases}$$

gdje je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ otvoren i omeđen, $\Omega_T := \langle 0,T] \times \Omega$ i $\Gamma_T := \mathsf{Cl}\,\Omega_T \setminus \Omega_T$ parabolička domena i rub, te $f \in \mathrm{C}(\Omega_T)$ i $g \in \mathrm{C}(\Gamma_T)$.

Dokažite da u zadovoljava ocjenu

$$\max_{\mathsf{Cl}\,\Omega_T} |u| \leqslant C(\max_{\Gamma_T} |g| + \max_{\mathsf{Cl}\,\Omega_T} |f|) \, ,$$

pri čemu $C > 0$ ne ovisi o f i g.

Uputa: Ako $v \in \mathrm{C}^{1,2}(\Omega_T) \cap \mathrm{C}(\mathsf{Cl}\,\Omega_T)$ zadovoljava $v_t - \triangle v \leqslant 0$ na Ω_T tada vrijedi $\max_{\mathsf{Cl}\,\Omega_T} v = \max_{\Gamma_T} v$.

20. siječnja 2015.

5. [20] Nađite eksplicitnu formulu za rješenje telegrafske jednadžbe u $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} + a u_t + b u = 0\,, \\ \hfill u(0,\cdot) = g\,, \\ \hfill u_t(0,\cdot) = h\,, \end{cases}$$

gdje su $a, c \in \mathbf{R}$ konstante i $b = \frac{a^2}{4}$.

Marko Erceg