Varijacijski račun i primjene

kolokvij, 8. 2. 2019.

1.) Za dane realne brojeve $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a < b$, neka je $X = \{u \in C^2([a,b]) : u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta\}$, te neka je $I : X \to \mathbb{R}$ definiran formulom

$$I(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx\ .$$

a) (5 bodova) Iskažite teorem o Euler-Lagrangeovim jednadžbama za funkcional I.

b) (5 bodova) Neka je $f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Za tvrdnju

Ako postoji jedinstveno rješenje $u \in X$ pripadne Euler-Lagrangeove jednadžbe, tada je u nužno minimizator funkcionala I ili $-I$.

odredite je li istinita. Ukoliko tvrdite da je istinita, dokažite je, a u suprotnom tvrdnju opravdajte kontraprimjerom.

c) (10 bodova) Za $a = 1$, $b = 2$, $\alpha = 6$, $\beta = -2$ i $f(x, u, \xi) = x^2\xi^2 + 2u^2$ pokažite da I ima jedinstveni minimizator na X i odredite ga.

2.) a) (10 bodova) Neka je $I(u) = \displaystyle\int_a^b u'(x)\big(u'(x) - u(x)^2\big)dx$. Napišite pripadni Hamiltonov sustav i odredite prvi integral tog sustava.

b) (5 bodova) Odredite kandidata za minimizatora funkcionala I na $X = \{u \in C^2([0,1]) : u(0) = 1,\ u(1) = 3\}$. Slijedi li iz teorema o Euler-Lagrangeovim jednadžbama da je dobivena funkcija minimizator?

c*) (10 bodova) Koristeći teoriju polja pokažite da je funkcija iz (b) uistinu minimizator.

3.) Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, otvoren i omeđen, $f \in L^2(\Omega)$ te $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ zadan formulom:

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - fu\right) d\mathbf{x}\ .$$

a) (10 bodova) Direktnom metodom varijacijskog računa dokažite (bez pozivanja na općenitiji teorem) da postoji jedinstveni minimizator funkcionala I. Napišite slabu formulaciju pripadne Euler-Lagrangeove jednadžbe.

b) (5 bodova) Za $d = 1$, $\Omega = \langle 0, 1\rangle$ i $f \in C_c^\infty(\Omega)$ pokažite da je minimizator klase C^∞.

4.) (10 bodova) Uz oznake Zadatka 1, za $a = 0$, $b = 1$, $\alpha = \beta = 0$ i $f(x, u, \xi) = \xi^2 + u^2$ odredite minimizator funkcionala I na X uz dodatni uvjet

$$\int_0^1 u(x)\, dx = 1\ .$$

Je li minimizator jedinstven?

5.*) (10 bodova) Promatramo elastičnu žicu učvršćenu na oba kraja (lijevi na visini 1, desni na visini 0) u polju (degenerirane) sile teže, pri čemu se na lijevoj četvrtini ispod žice nalazi kruta prepreka na visini 0. Dakle, promatramo minimizaciju funkcionala

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 \big(u'(x)^2 + gu(x)\big)\, dx\ ,$$

na skupu $K = \{u \in H^1(0,1) : u(0) = 1,\ u(1) = 0\ \&\ u(x) \geq 0\ ,\ x \in [0, \frac{1}{4}]\}$, pri čemu je $g \in \mathbb{R}$.

Odredite za koje vrijednosti parametra g je rješenje jedinstveno i klase C^∞. Izvedite nužan uvjet optimalnosti (poopćenje Euler-Lagrangeove jednadžbe), te odredite minimizator za svaki $g \in \mathbb{R}$.

- Kolokvij se piše 120 minuta.
- Tokom pisanja kolokvija dopušteno je koristiti samo pribor za pisanje.
- Uvjet za izlazak na usmeni ispit je 35 bodova od mogućih 80 bodova (20 dodatnih bodova označeno je zvijezdicom).
- Rezultati će biti objavljeni najkasnije u utorak 12.2. na mojoj web stranici, te će u slučaju pozitivnog rezultata usmeni ispit biti u četvrtak 14.2. ili petak 15.2.

M. Erceg