Odabrana poglavlja Soboljevljevih prostora

2. zadaća - 26.1.2018.

1. Neka je $u : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$ dana funkcija i neka je $\tilde{u}$ njeno proširenje nulom na $\mathbb{R}$. Dokažite sljedeće tvrdnje:

   (a) ako je $u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\langle 0, 1\rangle)$, $p \in [1, \infty\rangle$, onda je $\tilde{u} \in \mathrm{W}^{1,p}(\mathbb{R})$.

   (b) ako je $u \in \mathrm{L}^p(\langle 0, 1\rangle)$ i $\tilde{u} \in \mathrm{W}^{1,p}(\mathbb{R})$, $p \in [1, \infty\rangle$, onda je $u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\langle 0, 1\rangle)$.

   (c) ako je $u \in \mathrm{L}^p(\langle 0, 1\rangle)$, $p \in \langle 1, \infty\rangle$, dokažite da je $u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\langle 0, 1\rangle)$ ako i samo ako postoji konstanta $C > 0$ takva da vrijedi

$$(\forall \varphi \in \mathrm{C}_c^1(\mathbb{R})) \quad \Big| \int_{\mathbb{R}} \tilde{u}\varphi' \, dx \Big| \leqslant C\|\varphi\|_{p'} \,.$$

2. Konstruirajte primjer funkcije $u \in \mathrm{W}^{2,1}(\langle 0, 1\rangle)$ takve da je $u(0) = u'(0) = 0$, $\frac{u(x)}{x^2} \notin \mathrm{L}^1(\langle 0, 1\rangle)$, te $\frac{u'(x)}{x} \notin \mathrm{L}^1(\langle 0, 1\rangle)$.

3. Dokažite da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konstanta $C_\varepsilon > 0$ za koju vrijedi

$$(\forall u \in \mathrm{W}^{1,2}(\langle 0, 1\rangle)) \quad |u(1)|^2 \leqslant \varepsilon\|u'\|_2^2 + C_\varepsilon\|u\|_2^2 \,.$$

4. Dokažite da za $\Omega = \langle 0, 1\rangle$ i $p \in [1, \infty]$ postoji konstanta $C > 0$ takva da vrijedi

$$(\forall u \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega)) \quad \|u - \bar{u}\|_p \leqslant C\|\nabla u\|_p \,,$$

   gdje je $\bar{u} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u \, dx$. Možete li tvrdnju dokazati za općenitiju domenu Ω?

Rok za predaju zadaće: 2.3.2018.