Odabrana poglavlja Soboljevljevih prostora

1. zadaća - 1.12.2017.

1. Neka su $(X, \|\cdot\|_X)$ i $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normirani prostori, te neka postoji linearna bijektivna izometrija $T : X \to Y$. Tada kažemo da su X i Y izometrički izomorfni. Pokažite da su tada X' i Y' također izometrički izomorfni (konstruirajte neku linearnu bijektivnu izometriju), te da je X potpun/refleksivan/separabilan/jednoliko konveksan ako i samo ako je Y takav.

2. Za $p \in [1, \infty]$ i dva normirana prostora $(X, \|\cdot\|_X)$ i $(Y, \|\cdot\|_Y)$ definirajmo

$$\|(u, v)\|_{X\times Y;p} := \big|(\|u\|_X, \|v\|_Y)\big|_p \,, \qquad u \in X, v \in Y \,,$$

pri čemu je $|\cdot|_p$ p-norma na $\mathbb{R}^2$.

(a) Neka su $(X, \|\cdot\|_X)$ i $(Y, \|\cdot\|_Y)$ (kompleksni) Banachovi prostori. Pokažite da je za svaki $p \in [1, \infty]$ prostor $(X \times Y, \|\cdot\|_{X\times Y;p})$ također Banachov. Nadalje, pokažite da su sve norme $\|\cdot\|_{X\times Y;p}$ ekvivalentne čime prostori $(X \times Y, \|\cdot\|_{X\times Y;p})$ imaju ista toplološka svojstva (potpunost, separabilnost, refleksivnost, itd.).

(b) Neka su $(X, \|\cdot\|_X)$ i $(Y, \|\cdot\|_Y)$ (kompleksni) Banachovi prostori i $p \in [1, \infty]$. Pokažite da su Banachovi prostori $(X \times Y, \|\cdot\|_{X\times Y;p})'$ i $(X' \times Y', \|\cdot\|_{X'\times Y';p'})$ izometrički izomorfni, pri čemu je $(X \times Y, \|\cdot\|_{X\times Y;p})'$ opskrbljen standarnom normom

$$\|F\|_{(X\times Y)'} := \sup_{\|(u,v)\|_{X\times Y;p}=1} |F(u, v)| \,,$$

dok je p' pripadni konjugirani eksponent ($1/p + 1/p' = 1$).

(c) Ukoliko su $(X, \|\cdot\|_X)$ i $(Y, \|\cdot\|_Y)$ refleksivni/separabilni Banachovi prostori, pokažite da je tada za svaki $p \in [1, \infty]$ i $(X \times Y, \|\cdot\|_{X\times Y;p})$ refleksivan/separabilan Banachov prostor.

(d) Neka su $(X, \|\cdot\|_X)$ i $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jednoliko konveksni Banachovi prostori. Pokažite da je $(X \times Y, \|\cdot\|_{X\times Y;p})$ jednoliko konveksan ako i samo ako $p \in \langle 1, \infty\rangle$.

(e) Neka su $p, q \in [1, \infty]$, $m \in \mathbb{N}$ i $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$. Uočite da su norme

$$\|u\|^{(q)}_{m,p} := \Big(\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha u\|_p^q\Big)^{\frac{1}{q}}$$

ekvivalentne u $\mathrm{W}^{m,p}(\Omega)$, ali da je prostor $(\mathrm{W}^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|^{(q)}_{m,p})$ jednoliko konveksan samo za $q \in \langle 1, \infty\rangle$.

3. Neka je $(X, \|\cdot\|)$ jednoliko konveksan Banachov prostor. Neka je (u_n) niz u X takav da $u_n \rightharpoonup u$ (slabo) u X te $\limsup \|u_n\| \leqslant \|u\|$. Tada $u_n \to u$ (jako) u X.

4. Neka je $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$. Za funkciju

$$u(x) = \frac{(1 + x^2)^{-\frac{\alpha}{2}}}{\ln(2 + x^2)} \ , \ x \in \mathbb{R} \,,$$

pokažite da za svaki $p \in [\frac{1}{\alpha}, \infty]$ pripada prostoru $\mathrm{W}^{1,p}(\mathbb{R})$, dok za $p \in [1, \frac{1}{\alpha}\rangle$ nije niti u prostoru $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$.

5. Neka je $p \in \langle 1, \infty \rangle$, $m \in \mathbb{N}$ i $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ otvoren i neprazan. Pokažite da za svaki $F \in \big(\mathrm{W}^{m,p}(\Omega)\big)'$ postoje jedinstvene funkcije $f_\alpha \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$, gdje je $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$, takve da za svaki $u \in \mathrm{W}^{m,p}(\Omega)$ vrijedi
$$F(u) = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \int_\Omega f_\alpha \, \partial^\alpha u \, dx \,,$$
te $\|F\| = \Big(\sum_\alpha \|f_\alpha\|_{p'}^{p'}\Big)^{\frac{1}{p'}}$ (postojanje smo već pokazali na predavanjima 24.11. tako da je samo potrebno dokazati jedinstvenost). U potpunosti analogna tvrdnja vrijedi i za prostor $\mathrm{W}_0^{m,p}(\Omega)$. (Uputa: koristite analogne argumente kao u dokazu [AF, 2.43])

   Nadalje, pokažite primjerom da za $p = 1$ gornja tvrdnja općenito ne vrijedi, tj. odredite neki $F \in \big(\mathrm{W}_0^{m,1}(\Omega)\big)'$ takav da funkcije f_α koje zadovoljavaju gornja dva uvjeta nisu jedinstvene.

6. Neka je $p \in [1, \infty]$, $m \in \mathbb{N}$ i $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$. Za $\varphi \in \mathrm{C}_c^m(\Omega)$ i $u \in \mathrm{W}^{m,p}(\Omega)$ pokažite da je $\varphi u \in \mathrm{W}^{m,p}(\Omega)$, te da vrijedi Leibnizova formula
$$\partial^\alpha(\varphi u) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta \varphi \, \partial^{\alpha - \beta} u \,,$$
pri čemu su $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ multiindeksi i $|\alpha| \leqslant m$.