KOMPAKTNA ULAGANJA SOBOLJEVLJEVIH PROSTORA

<u>DEF. 1</u>. Podskup S normiranog prostora je <u>pretkompaktan</u> ako svaki niz u S ima konvergentni podniz.
Linearni operator na normiranim prostorima je <u>kompaktan</u> ako omeđene skupove preslikava u <u>pretkompaktne</u>.
(Linearan kompaktan operator je nužno neprekinut).

Ako imamo neprekinuta ulaganja $X \hookrightarrow Y$ i $Y \hookrightarrow Z$, od kojih je barem jedno kompaktno, tada je i kompozicija $X \overset{c}{\hookrightarrow} Z$ kompaktna.
Dakle, cilj je vidjeti uz koje dodatne pretpostavke su Soboljevljeva ulaganja (3. predavanje str. 28) kompaktna.

U daljnjem nam $\overset{c}{\hookrightarrow}$ označava kompaktno ulaganje.

TEOREM 2. (Rellich – Kondrašov)

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, $\Omega_0^k = \Omega_0 \cap \{k\text{-dim. prostor u } \mathbb{R}^d\}$, $k = 1, \dots, d$

$$(\Omega_0^d = \Omega_0)$$

$j \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty\rangle$

(I) Ω zadovoljava $\boxed{\text{uvjet konusa}}$ & $\boxed{mp \leq d}$

$$W^{j+m,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} W^{j,q}(\Omega_0^k) \quad \begin{cases} d - mp < k \leq d \\ q \in [1, p^*\rangle \end{cases} \text{ ako } \boxed{mp < d}$$

$$\begin{cases} 1 \leq k \leq d \\ q \in [1, \infty\rangle \end{cases} \text{ ako } \boxed{mp = d}$$

(II) Ω zadovoljava $\boxed{\text{uvjet konusa}}$ & $\boxed{mp > d}$

$$W^{j+m,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} C_b^j(\Omega_0) \left(\hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_0^k) \;, \begin{matrix} 1 \leq k \leq d \\ q \in [1, \infty] \end{matrix} \right)$$

$$\xhookrightarrow{c} W^{j,q}(\Omega_0^k) \quad , \quad q \in [1, \infty\rangle$$

(III) Ω zadovoljava $\boxed{\text{strogi lokalno Lip. uvjet}}$ & $\boxed{mp > d}$

$$W^{j+m,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} C^j(\overline{\Omega}_0) \left(\hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_0^k) \;, \begin{matrix} 1 \leq k \leq d \\ q \in [1, \infty] \end{matrix} \right)$$

$$\xhookrightarrow{c} C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}_0) \quad , \quad mp > d \geq (m-1)p$$

$$\lambda \in \left\langle 0, m - \frac{m}{p} \right\rangle$$

(IV) Ω $\boxed{\text{proizvoljan}}$

Sva gornja kompaktna ulaganja i dalje vrijede ukoliko $W^{j+m,p}(\Omega)$ zamijenimo s $\boxed{W_0^{j+m,p}(\Omega)}$, te $\Omega_0 \subset\subset \mathbb{R}^d$.

<u>NAP. 3</u> 1) Ako je Ω omeđen, tada možemo uzeti $\Omega_0 = \Omega$.

2) Analognim argumentom kao i kod Soboljevljevih ulaganja zaključujemo da je dovoljno dokazati tvrdnje za $j=0$. (v. [AF, 6.4(4)]).

3) BSO Ω_0 zadovoljava uvjet konusa ukoliko Ω zadovoljava to svojstvo.

Naime, ukoliko to nije slučaj, lako se pokaže da postoji $\tilde{\Omega}_0 \subset\subset \Omega$ t.d. $\Omega_0 \subset \tilde{\Omega}_0$ i da $\tilde{\Omega}_0$ zadovoljava uvjet konusa (v. [AF, 6.4(6)]). Tvrdnja se onda pokaže za $\tilde{\Omega}_0$, dok tvrdnje za Ω_0 slijedi iz neprekinutih ulaganja (restrikcije):

$$W^{j,2}(\tilde{\Omega}_0^k) \hookrightarrow W^{j,2}(\Omega_0^k) \quad \text{itd.}$$

U dokazu su nam potrebne sljedeće dvije posljedice Arzelà-Ascolijevog teorema [AF, 1.33].

<u>LEMA 4.</u> ([AF, 1.34]) $m \in \mathbb{N}_0$, $0 < \nu < \lambda \leq 1$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$.

$$C^{m+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega})$$

$$\left.\begin{array}{l} C^{m,\nu}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega}) \\ C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{m,\nu}(\overline{\Omega}) \end{array}\right\} \text{kompaktno ako je } \Omega \text{ omeđen}$$

Ω konveksan:

$$C^{m+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{m,1}(\overline{\Omega}).$$

LEMA 5. ([AF, 2.32]) $p \in [1,\infty\rangle$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$.

Omeđeni podskup $K \subseteq L^p(\Omega)$ je prekompaktan u $L^p(\Omega)$ akko

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\exists G \subset\subset \Omega)(\forall u \in K)(\forall h \in \mathbb{R}^d,\ |h| < \delta)$

$$\int_\Omega |\tilde{u}(x+h) - \tilde{u}(x)|^p dx < \varepsilon^p ,$$

$$\int_{\Omega \setminus \overline{G}} |u(x)|^p dx < \varepsilon^p .$$

NAP. 6 ([AF, 6.7]) Ω, Ω_0 i Ω_0^k kao u iskazu Teorema 2, te $1 \leq q_1 < q_0$. Ako

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q_0}(\Omega_0^k)$$

i

$$W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^{q_1}(\Omega_0^k) ,$$

tada

$$(\forall q \in [q_1, q_0\rangle) \quad W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^{q}(\Omega_0^k) .$$

Naime, postoji $\theta \in [0,1\rangle$ t.d. za $u \in W^{m,p}(\Omega)$,

$$\|u\|_{0,q,\Omega_0^k} \leq \|u\|_{0,q_1,\Omega_0^k}^{1-\theta} \|u\|_{0,q_0,\Omega_0^k}^{\theta}$$

$$\lesssim \|u\|_{0,q_1,\Omega_0^k}^{1-\theta} \|u\|_{m,p,\Omega}^{\theta} .$$

(u_m) omeđen u $W^{m,p}(\Omega) \Rightarrow (u_m)$ Cauchyjev u $L^{q_1}(\Omega_0^k)$
$\Rightarrow (u_m)$ Cauchyjev po gornjoj ocjeni u $L^q(\Omega_0^k)$ ✓.

Optimalnost Teorema 2:

① Možemo li u I i III dobiti kompaktno ulaganje za $q = p^*$, odnosno $\lambda = m - \frac{n}{p}$?

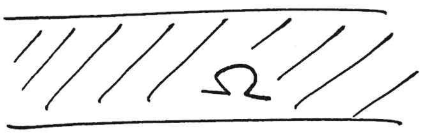
② Možemo li dobiti kompaktna ulaganja za neomeđeni Ω_0?

Odgovori za ①: Tvrdnja Teorema 2 ne vrijedi za granične slučajeve $q = p^*$ i $\lambda = m - \frac{n}{p}$ (v. [AF, 6.12]).

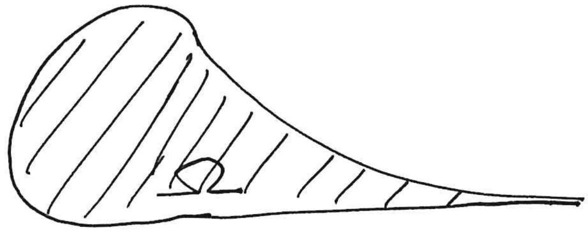
Odgovori za ②:

a) Tvrdnja Teorema 2 ne vrijedi (čak niti za $W_0^{m,p}(\Omega)$) za općenite neomeđene Ω_0 (v. [AF, 6.11]), već je nužno da je Ω_0 kvaziomeđen:

$$\boxed{\lim_{\substack{x\in\Omega \\ |x|\to\infty}} d(x, \partial\Omega) = 0}$$



nije kvaziomeđen



jest kvaziomeđen

b) Dovoljno je promatrati uz koje pretpostavke na Ω ~~je~~ je ulaganje

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

neprekinuto jer onda koristeći Soboljevljeva ulaganja i NAP. 6 dobivamo ulaganja za preostale q.

c) Nužan i dovoljan uvjet na Ω t.d. imamo

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega),$$

je dan u [AF, 6.19] (obuhvaćeni su i neki neomeđeni Ω).

d) Za $W^{m,p}(\Omega)$ je situacija znatno kompliciranija. Izdvajamo bez dokaza najznačajnije rezultate.

TEOREM 7. ([AF, 6.42]) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $p \in [1, \infty\rangle$.
Pretpostavimo da je

$$W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega),$$

za $q \geq 1$. Tada je Ω konačne mjere.

S druge strane prisjetimo ([AF, 4.46] ili 5. pred. str. 50):

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d \text{ neomeđen}, \ |\Omega| < \infty, \ q > p \implies W^{m,p}(\Omega) \not\hookrightarrow L^q(\Omega)$$

Dakle, iznad p ne možemo ići.

Dovoljan uvjet na Ω t.d. imamo

$$W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^p(\Omega),$$

je dan u [AF, 6.52].
Bitno je naglasiti da su raiste obuhvaćene i neke neomeđene domene!

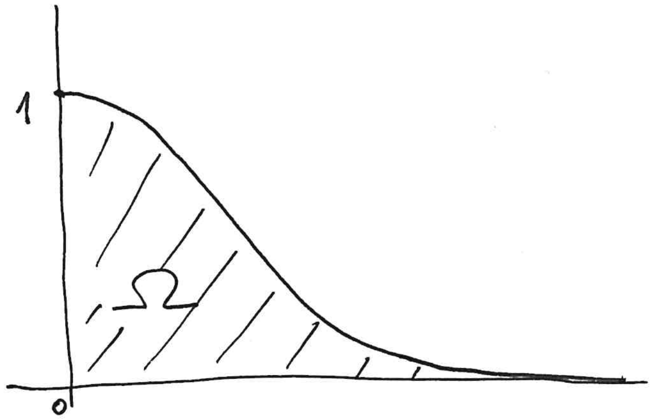
Konkretno, $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, \ 0 < y < f(x)\}$,

gdje je $f \in C^1([0,\infty\rangle)$ pozitivna, i $f' \in L^\infty([0,\infty\rangle)$.
Ako dodatno vrijedi

$$\boxed{(\forall \varepsilon > 0) \quad \lim_{s \to \infty} \frac{f(s+\varepsilon)}{f(s)} = 0}$$

tada Ω zadovoljava pretpostavke [AF, 6.52] pa je $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$.

Na primjer, $f(x) = e^{-x^2}$ zadovoljava sve pretpostavke (v. [AF, 6.48 & 6.53]).



TEOREM 8. (Poincaréova nejednakost)

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ima konačnu širinu tada postoji $K(p) > 0$ t.d.

$$(\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)) \quad \|\varphi\|_{0,p,\Omega} \leq K |\varphi|_{1,p,\Omega}.$$

(konačna širina = Ω leži između dva paralelna $(n-1)$-dim. prostora)

KOROLAR 9. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ima konačnu širinu tada je $|\cdot|_{m,p,\Omega}$ norma ekvivalentna standardnoj normi na $W_0^{m,p}(\Omega)$.