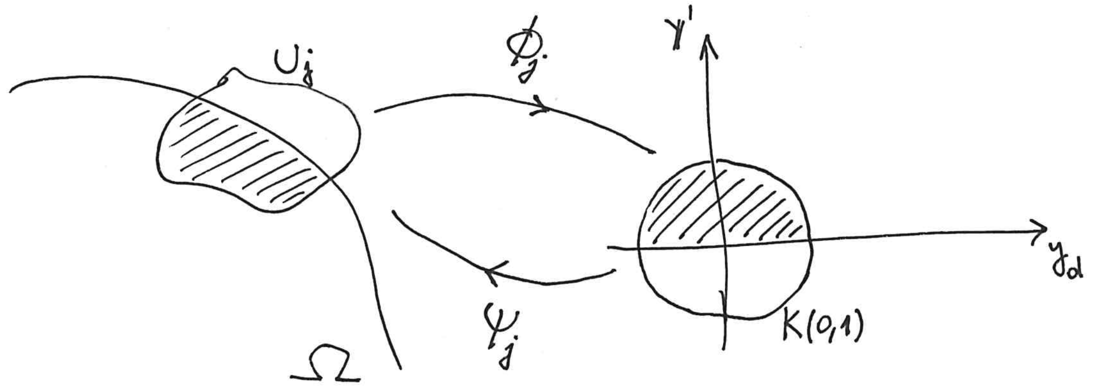
TEOREM 5. (jaki m-operator proširenja za C^m-domene)
Neka $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ zadovoljava uvjet uniformne C^m-regularnosti i neka je $\partial\Omega$ omeđen.
Tada postoji jaki m-operator proširenja E za Ω.
Nadalje, za $\alpha, \gamma \in \mathbb{N}_0^d$, $|\gamma| \leq |\alpha| \leq m$, postoje neprekinuti linearni operatori $E_{\alpha\gamma} : W^{j,p}(\Omega) \to W^{j,p}(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq j \leq m-|\alpha|$, $1 \leq p < \infty$, t.d.

$$\partial^\alpha (Eu)(x) = \sum_{|\gamma| \leq |\alpha|} E_{\alpha\gamma} \partial^\gamma u(x), \quad u \in W^{|\alpha|,p}(\Omega), \ x \in \mathbb{R}^d .$$

Dokaz. Ω C^m-regularan i $\partial\Omega$ omeđen povlači da postoji ranije opisan skup glatkih transformacija koji je konačan.
Konkretno,

- $\{U_1, \dots, U_N\}$ prekrivač $\partial\Omega$
- $\Phi_j : U_j \to K(0,1)$
  $\Psi_j = \Phi_j^{-1}$
- $(\exists \delta > 0)$ $\Omega_\delta = \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\} \subseteq \bigcup_{j=1}^N \Psi_j(K(0,\frac{1}{2}))$
- $\Phi_j(U_j \cap \Omega) = \{y \in K(0,1) : y_d > 0\}$
- $|\partial^\alpha \Phi_j^k|, |\partial^\alpha \Psi_j^k| \leq M$, $0 < |\alpha| \leq m$.



IDEJA: Particijom jedinice podijeliti f-ju po U_j i onda s Φ_j se prebaciti na poluprostor i iskoristiti TEOREM 2.

$$Q := \{(y', y_d) \in \mathbb{R}^d : |y'| < \tfrac{1}{2},\ |y_d| < \tfrac{\sqrt{3}}{2}\} \Rightarrow K(0,\tfrac{1}{2}) \subseteq Q \subseteq K(0,1)$$

$$V_j := \Psi_j(Q), \quad j = 1, \dots, N$$

(malo smo napuhnuli skup $\Psi_j(K(0,\frac{1}{2}))$ t.d. nemamo problema s particijom jedinice)

$$\Rightarrow \Omega_\delta \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} \Psi_j(K(0,\tfrac{1}{2})) \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} V_j$$

$\Rightarrow \exists V_0 \subseteq \Omega$ otvoren t.d. $\mathrm{dist}(V_0, \partial\Omega) > \frac{\delta}{2}$ & $\boxed{\Omega \subseteq \bigcup_{j=0}^{N} V_j}$.

$\Rightarrow$ postoji particija jedinice $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_N$ t.d.

- $\mathrm{supp}\,\omega_j \subseteq V_j, \quad j = 0, \dots, N$
- $\sum_{j=0}^{N} \omega_j(x) = 1, \quad x \in \Omega$

Ω C^m-regularan $\Rightarrow$ Ω zadovoljava uvjet segmenta

$\Rightarrow \{\varphi|_\Omega : \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)\}$ gusto u $W^{k,p}(\Omega)$.

Neka je $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

$\varphi_j := \omega_j \varphi \Rightarrow \varphi = \sum_{j=0}^{N} \varphi_j$.

$\boxed{j \geq 1}$ $\hat{\varphi}_j(y) := \varphi_j(\Psi_j(y)), \ y \in K(0,1) \Rightarrow \mathrm{supp}\,\hat{\varphi}_j \subseteq \Phi_j(V_j) = Q \subseteq K(0,1)$

$\Rightarrow \tilde{\hat{\varphi}}_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ ... proširenje f-je $\hat{\varphi}_j$ nulom

$\hat{E}, \hat{E}_\alpha$ dani Teoremom 2

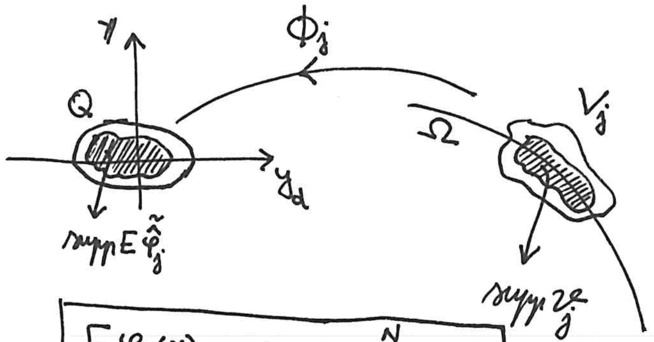
Po definiciji slijedi:

- $\hat{E}\tilde{\hat{\varphi}}_j, \hat{E}_\alpha \tilde{\hat{\varphi}}_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$
  $(\mathrm{supp}\,\hat{E}\tilde{\hat{\varphi}}_j, \mathrm{sup}\,\hat{E}_\alpha\tilde{\hat{\varphi}}_j \subseteq Q)$
- $\hat{E}\tilde{\hat{\varphi}}_j = \tilde{\hat{\varphi}}_j = \hat{\varphi}_j$ ~~na~~ $Q_+ := \{y \in Q : y_d > 0\}$.
- $\|\hat{E}\tilde{\hat{\varphi}}_j\|_{k,p,\mathbb{R}^d} = \|\hat{E}\tilde{\hat{\varphi}}_j\|_{k,p,Q}$
  $\leq K_1 \|\hat{\varphi}_j\|_{k,p,Q_+}, \quad 0 \leq k \leq m$

ovisi samo o k, m, p

Sada f-ju $\hat{E}\tilde{\hat{\varphi}}_j$ želimo „vratiti" na Ω.

$$\mathscr{V}_j(x) := (\hat{E}\tilde{\hat{\varphi}}_j)(\Phi_j(x)), \quad x \in V_j$$



$$\Rightarrow \mathscr{V}_j \in C_c^\infty(V_j)$$

&

$$\mathscr{V}_j(x) = \varphi_j(x) \text{ za } x \in \Omega \cap V_j$$

$$\boxed{E\varphi(x) = \varphi_0(x) + \sum_{j=1}^{N} \mathscr{V}_j(x)}$$

Preostalo je ocijeniti derivacije f-je $\mathscr{V}_j$. Tu trebamo poopćeno lančano pravilo (poznato i kao Faá di Brunova formula)

LEMA 6. Za dovoljno glatke f-je $g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^r$ i $f: \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ vrijedi:

$$\partial^\alpha (f\circ g)(x) = |\alpha|! \sum_{1\le|\beta|\le|\alpha|} C(\beta,\alpha),$$

gdje je

$$C(\beta,\alpha) = \frac{(\partial^\beta f)(g(x))}{\beta!} \sum_{\substack{\alpha_1+\dots+\alpha_r=\alpha \\ \alpha_i\in\mathbb{N}_0^d}} \prod_{j=1}^{r} \sum_{\substack{\gamma_1+\dots+\gamma_{\beta_j}=\alpha_j \\ \gamma_i\in\mathbb{N}_0^d\setminus\{0\}}} \prod_{s=1}^{\beta_j} \frac{\partial^{\gamma_s} g_1(x)}{\gamma_s!}.$$

Nadalje, ukoliko

$$|\partial^\gamma g_j| \le M \quad (M\ge 1), \quad \gamma\le\alpha, \; j=1,\dots,r,$$

tada

$$|\partial^\alpha (f\circ g)(x)| \le C(d,r,\alpha)\, M^{|\alpha|} \sum_{1\le|\beta|\le|\alpha|} |(\partial^\beta f)(g(x))|$$

$x \in V_j$, $|\alpha| \le m$,

$$|\partial^\alpha \mathscr{V}_j(x)| = |\partial^\alpha (E\tilde{\hat{\varphi}}_j \circ \Phi_j)(x)| \overset{L\text{-}6}{\le} K_2(d,m,M) \sum_{|\beta|\le m} |(\partial^\beta E\tilde{\hat{\varphi}}_j)(\Phi_j(x))|$$

$$\Rightarrow \quad \|v_j\|_{k,p,\mathbb{R}^d} \leq K_3(d,m,M,p)\, \|E\tilde{\hat{\varphi}}_j\|_{k,p,Q}$$

$k \leq m$

$p \in [1,\infty\rangle$

$$\leq K_1(k,m,p)\, K_3(d,m,M,p)\, \|\hat{\varphi}_j\|_{k,p,Q_+}$$

$$\left.\begin{aligned} |\partial^\alpha \hat{\varphi}_j(y)| &= |\partial^\alpha(\varphi_j \circ \psi_j)(y)| \\ &\overset{L-6}{\leq} K_4(d,m,M) \sum_{|\beta|\leq m} |\partial^\beta \varphi_j(\psi_j(y))| \end{aligned}\right\} \Rightarrow \|\hat{\varphi}_j\|_{k,p,Q_+} \leq K_5(d,m,M,p)\, \|\varphi_j\|_{k,p,V_j\cap\Omega}$$

$$= K_5(d,m,M,p)\,\|\varphi_j\|_{k,p,\Omega}$$

$$\left.\begin{aligned} |\partial^\alpha \varphi_j(x)| &= |\partial^\alpha(\varphi \omega_j)(x)| \\ &\leq K_6(d,m,\Omega) \sum_{|\beta|\leq m} |\partial^\beta \varphi(x)| \end{aligned}\right\} \Rightarrow \|\varphi_j\|_{k,p,\Omega} \leq K_7(d,m,\Omega,p)\, \|\varphi\|_{k,p,\Omega}$$

ovisi konstanta o particiji jedinice, a koja ovisi o domeni i pokrivaču $V_0,\ldots,V_N$

$$\Rightarrow \quad \|v_j\|_{k,p,\mathbb{R}^d} \leq \underbrace{K_1\, K_3\, K_5\, K_7}_{\text{ovise o } m,p,d,M \text{ i particiji jedinice}} \|\varphi\|_{k,p,\Omega}$$

$$\Rightarrow \quad \|E\varphi\|_{k,p,\mathbb{R}^d} \leq \|\varphi_0\|_{k,p,\Omega} + K_1K_3K_5K_7\, N\, \|\varphi\|_{k,p,\Omega}$$

$$\leq K_7\,(1 + K_1 K_3 K_5\, N)\, \|\varphi\|_{k,p,\Omega}$$

$x \in \Omega$

BSO neka $x \in V_0 \cap \ldots \cap V_{N_0}$

$$\Rightarrow \quad (E\varphi)(x) = \varphi_0(x) + \sum_{j=1}^{N} v_j(x)$$

$\boxed{\operatorname{supp} v_j \subseteq V_j}$

$$\overset{}{=} \varphi_0(x) + \sum_{j=1}^{N'} v_j(x)$$

$\boxed{v_j = \varphi_j \text{ u } V_j \cap \Omega}$

$$= \varphi_0(x) + \sum_{j=1}^{N'} \varphi_j(x) = \sum_{j=0}^{N'} \varphi_j(x) \overset{\text{particija jedinice}}{=} \varphi(x)$$

Koristeći Faá di Brunovu formulu (Lema 6) dobivamo i drugi dio tvrdnje za $E_{\alpha\gamma}$.

$\blacksquare$

NAPOMENA 7.

1) Tvrdnje Teorema 5 vrijedi i za $m=\infty$ pri čemu samo koristimo Teorem 4 umjesto Teorema 2.

2) Omeđenost $\partial\Omega$ nam je trebala da radimo s konačnim pokrivačem $V_0, V_1, \dots, V_N$. Međutim, dokaz prethodnog teorema može se prilagoditi i za domene s neomeđenim rubom, pri čemu je sljedeće bitno:

   - koristiti svojstvo (i) uvjeta C^m-regularnosti koje kaže da postoji $R \in \mathbb{N}$ t.d. je svaka kolekcija $R+1$ skupova U_j (pa onda i V_j) neprazna; time se može dobiti valjana ocjena u posljednjem koraku i za $N=\infty$.
   - potrebno je pretpostavku omeđenosti $\partial\Omega$ zamijeniti s pretpostavkom da postoji particija jedinice $\{\omega_j\}$ podređena $\{V_j\}$ t.d. za svaki $|\alpha| \le m$ je $\{\partial^\alpha \omega_j\}$ omeđeno u $\mathbb{R}^d$ jednoliko po j (za $N<\infty$ je ovo trivijalno ispunjeno).

   Time se tvrdnja Teorema 5 može poopćiti npr. $\Omega = \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_1, x_2 > 0\}$

Veću općenitost od NAP. 7(2) teško možemo postići metodom refleksije. Međutim, drugim metodama se dobivaju nešto drugačiji rezultati.

TEOREM 8. (potpuni operator proširenja za stroge lokalno Lip. domene)
Neka $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ zadovoljava strogi lokalno Lipschitzov uvjet, tada postoji potpuni operator proširenja za Ω.

Dokaz ovog teorema koristi metodu integralnih usrednjenja.

TEOREM 9. (jednostavan (m,p)-operator proširenja za domene uniformnog uvjeta konusa)
Neka $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ zadovoljava uniformni uvjet konusa uz sljedeće preinake:
(i) $\{U_j\}$ je konačan otvoren pokrivač $\partial\Omega$;
(ii) U_j ne moraju biti omeđeni.
Tada za svake $m \in \mathbb{N}$ i $p \in \langle 1, \infty\rangle$ postoji jednostavan (m,p)-operator proširenja za Ω.

U dokazu se koristi Calderón-Zygmundova teorija singularnih integrala.

NAPOMENA 10. Pretpostavka (i) prethodnog teorema je vezana uz particiju jedinice, pa se može oslabiti analogno kao u NAP. 7(2) za metodu refleksije.
Nadalje, posebnost operatora proširenja konstruiranog u Teoremu 9 je u ~~tome~~ sljedećem: ukoliko za $u \in W^{m,p}(\Omega)$ vrijedi $\tilde{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ (proširenje nulom), tada je proširenje f-je u upravo $\tilde{u}$.
Posebno, proširenje iz Teorema 9 preslikava $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ u $\tilde{u}$.
Sljedećim teoremom pokazujemo da su funkcije iz $W_0^{m,p}(\Omega)$ jedine funkcije na Ω čije je proširenje nulom u $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$.

TEOREM 11. (Karakterizacija prostora $W_0^{m,p}(\Omega)$)

Neka $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ zadovoljava uvjet segmenta i neka je $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

$$u \in W_0^{m,p}(\Omega) \iff \tilde{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d).$$

Dokaz. $\boxed{\Rightarrow}$ vrijedi bez ikakvih pretpostavki na Ω i pokazano je na drugom predavanju (str. 19).

$\boxed{\Leftarrow}$ $\tilde{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow u \in W^{m,p}(\Omega)$

Kako Ω zadovoljava uvjet segmenta, u možemo aproksimirati s restrikcijama f-ja iz $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Pratimo dokaz te tvrdnje (v. 2. predavanje str. 15).

$u_\varepsilon := f_\varepsilon u \in W^{m,p}(\Omega)$ & $\operatorname{supp} u_\varepsilon \in K(\Omega)$

$\tilde{u}_\varepsilon := f_\varepsilon \tilde{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$

$\rightsquigarrow$ BSO u i $\tilde{u}$ imaju kompaktne nosače

$V_0, V_1, \dots, V_k$ pokrivač $\operatorname{supp} u$

$\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_k$ ... particija jedinice podređena pokrivaču $\{V_0, \dots, V_1\}$

$u_j := \psi_j u$

$u_0 \in W_0^{m,p}(\Omega)$

$\boxed{j \geq 1}$ $\tilde{u}_j \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ jer $\tilde{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$

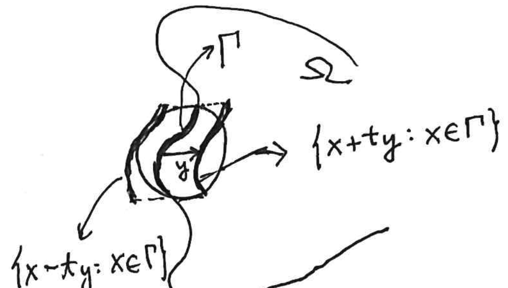
(ovo je puno bolje od $W^{m,p}(\mathbb{R}^d \setminus \Gamma)$ što smo imali prije)

Sada, $u_{j,t}(x) := \tilde{u}_j(x - ty)$

$$\left.\begin{array}{l} ① \ \operatorname{supp} u_{j,t} \Subset \Omega \\ ② \ \tilde{u}_j \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow u_{j,t} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \end{array}\right\} \Rightarrow u_{j,t} \in W_0^{m,p}(\Omega)$$

$$\underset{W_0^{m,p}(\Omega)}{\underset{\cap}{u_{j,t}}} \xrightarrow{t \searrow 0} u_j \ \text{ u } W^{m,p}(\Omega) \Rightarrow u_j \in W_0^{m,p}(\Omega)$$

$$u = \sum_{j=1}^{k} u_j \Rightarrow u \in W_0^{m,p}(\Omega).$$



OPERATOR TRAGA

TEOREM 12. (Operator traga za C^m-domene)
Neka $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ zadovoljava svojstvo uniformne C^m-regularnosti, te neka postoji jednostavan (m,p)-operator proširenja E za Ω.

$\boxed{mp<d}$

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\partial\Omega) \quad , \quad q \in [p, p^*]$$
$$\left(p^* = \frac{(d-1)p}{d-mp}\right)$$

$\boxed{mp=d}$

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\partial\Omega) \quad , \quad p \leq q < \infty .$$

Dokaz. Kao što smo ranije spomenuli, gornja ulaganja shvaćamo t.d.

$$\|Eu\|_{0,q,\partial\Omega} \leq K \|u\|_{m,p,\Omega} ,$$

pri čemu se $Eu|_{\partial\Omega}$ definira aproksimiranjem s glatkim funkcijama.

Kako je $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ gusto u $W^{m,p}(\Omega)$, a za $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ je $(Ev)|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega}$, dakle neovisno o izboru E, to je i $(Eu)|_{\partial\Omega}$ neovisno o izboru operatora proširenja E.

Dokažimo samo slučaj $mp<d$ i $q=p^*$.

$$\|Eu\|_{m,p,\mathbb{R}^d} \leq K_1 \|u\|_{m,p,\Omega} \quad , \quad u \in W^{m,p}(\Omega) .$$

$$\int_{\partial\Omega} |Eu(x)|^q d\sigma \leq \sum_j \int_{U_j \cap \partial\Omega} |Eu(x)|^q d\sigma \qquad (\{U_j\} \text{ iz } C^m\text{-svojstva})$$

$$= \sum_j \int_{K(0,1)\cap\{y_d=0\}} (Eu \circ \Psi_j)(y',0)\, J_j(y')\, dy'$$

gdje je $J_j(y') = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{d}\left(\frac{\partial(\psi_j^1, \dots, \hat{\psi}_j^k, \dots, \psi_j^d)}{\partial(y_1, \dots, y_{d-1})}\right)^2\right)^{1/2}\Bigg|_{y_d=0}}$

po pretpostavci C^m-regularnosti ovo je jednoliko omeđeno po y' i j.

$$\Rightarrow \|Eu\|^2_{0,2,\partial\Omega} \leq K_2 \sum_j \|Eu\circ\psi_j\|^2_{0,2,K(0,1)\cap\{y_d=0\}}$$

$$\leq K_3 \left(\sum_j \|Eu\|^p_{m,p,U_j}\right)^{2/p}$$

$$\leq K_3 R \|Eu\|^2_{m,p,\mathbb{R}^d} \leq \underbrace{K_3 R K_1^2}_{\text{konstanta je neovisna o } u} \|u\|^2_{m,p,\Omega}$$

najviše R skupova U_j se siječe

■

<u>TEOREM 13.</u> (Trivijalni trag) (još jedna karakterizacija $W_0^{m,p}(\Omega)$)

Uz pretpostavke prethodnog teorema imamo za $u \in W^{m,p}(\Omega)$:

$$u \in W_0^{m,p}(\Omega) \iff (\forall |\alpha| \leq m) \quad \partial^\alpha u|_{\partial\Omega} \equiv 0 .$$