Konveksna analiza s primjenama

Popravni kolokvij, 28. 8. 2019.

Zadano je 5 zadataka koji ukupno nose 60 bodova (12+6+12+15+15=60).
Dozvoljeno je korištenje samo pribora za pisanje.

1.) (12 bodova)

a) Za $(X, \|\cdot\|)$ realan normiran prostor i $A \subseteq X$, $0 \in A$, definirajte Minkowskijev funkcional p_A skupa A i tangencijalni konus $T(A, 0)$ skupa A u 0.

b) Odredite p_A i $p_{A\cup B}$, gdje su skupovi $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ dani s

$$A := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1 \ \wedge \ x \geq 0\}\ , \quad B := \{(2, y) : y \geq 0\}\ .$$

c) Odredite $T(A, 0)$ i $T(A \cup B, 0)$, pri čemu su skupovi A i B definirani u (b) dijelu.

2.) (6 bodova) Pokažite da je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s pravilom $f(x, y) = |x-2| + |y-3|$ konveksna i odredite joj subdiferencijal u proizvoljnoj točki.

3.) (12 bodova) Neka je $(X, \|\cdot\|)$ realan normiran prostor, $S \subseteq X$ neprazan, konveksan i otvoren, $f : S \to \mathbb{R}$ konveksna funckija, te $x \in S$. Dokažite ili primjerom opovrgnite sljedeće tvrdnje:

a) Ako je f usmjereno diferencijabilna u x, tada je $\partial f(x)$ jednočlan skup.

b) $0 \in \partial f(x)$ ako i samo ako je x minimu funkcije f.

c) Ako je f Gateaux diferencijabilna u x, tada je i neprekidna u x.

d) Ako je f Fréchet diferencijabilna u x, tada je i Gauteux diferencijabilna u x.

4.) (15 bodova) Za $\alpha \in \mathbb{R}$ dana je sljedeća minimizacijska zadaća

$$\min \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\,,$$

uz uvjete

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1\,, \\ x_4 &\leq \alpha\,. \end{aligned}$$

a) Bez korištenja nužnih uvjeta optimalnosti argumentirajte da zadaća ima jednistveno rješenje.

b) Ispitajte jesu li zadovoljeni uvjeti regularnosti.

c) Koristeći nužne uvjete optimalnosti odredite jedinstveni minimizator i pripadni minimu funkcije u ovisnosti o parametru α.

5.) (15 bodova) Na funkcijskom prostoru $H_0^1([0,1])$ definirana je funkcija $F : H_0^1([0,1]) \to \mathbb{R}$ s

$$F(u) := \int_0^1 \left(u'(x)^2 + u(x)^2\right) dx\ ,$$

te promatramo minimizacijski problem $\min_{u\in S} F(u)$, gdje je

$$S := \left\{ u \in H_0^1([0,1]) : H(u) := \int_0^1 u(x)\, dx - e + 3 = 0 \right\}\ .$$

a) Bez korištenja nužnih uvjeta optimalnosti zaključite da gornji problem ima jedinstveno rješenje.

b) Provjerite je li ispunjen uvjet regularnosti (O).

c) Koristeći nužne uvjete optimalnosti odredite minimizator $\bar{u}$.

M. Erceg