Konveksna analiza s primjenama

Kolokvij, 10. 6. 2019.

Zadano je 5 zadataka koji ukupno nose 60 bodova (10+10+10+15+15=60).
Dozvoljeno je korištenje samo pribora za pisanje.
Uvjet izlaska na završni (usmeni) ispit je sakupljenih ukupno barem 35 bodova iz kolokvija i zadaća.
Rezultati zadaća i kolokvija bit će najkasnije u utorak 18.6.2019. i bit će objavljeni na web stranici.

1.) (10 bodova)

a) Za X realan vektorski prostor i $A \subseteq X$, $0 \in A$, definirajte Minkowskijev funkcional p_A skupa A.

b) Uz koja svojstva skupa A je Minkowskijev funkcional p_A norma na X? Nije potrebno dokazivati potrebna svojstva Minkowskijevog funkcionala, već je dovoljno samo pozvati se na tvrdnje s predavanja.

c) Odredite Minkowskijev funkcional skupa $A \subseteq \mathbb{R}^2$ danog s

$$A = \Big\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\Big\} \bigcup \Big([0,1] \times [0,1]\Big) \bigcup \Big([-1,0] \times [-1,0]\Big)\,.$$

2.) (10 bodova)

a) Definirajte pojmove: konus, konus generiran nekim skupom (generirajući konus) i tangencijalni konus.

b) Odredite tangencijalni konus u točkama $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ i $(-1, 0)$ skupa A iz (c) dijela prvog zadatka.

3.) (10 bodova)

a) Definirajte pojam subdiferencijala konveksne funkcije $f : X \to \mathbb{R} \cup \{0\}$ u točki $x \in X$, pri čemu je $(X, \|\cdot\|)$ realan normiran prostor, te pokažite da je u svakoj točki subdiferencijal konveksan skup.

b) Pokažite da je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s pravilom $f(x, y) = 3|x - 2| + x^2 + |5y - 2|$ konveksna i odredite joj subdiferencijal u točki $(2, 3)$.

c) Pokažite da je funkcija $G : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ s pravilom $G(u) = u(1)$ konveksna i odredite joj subdiferencijal u proizvoljnoj $u \in C([0,1])$.

4.) (15 bodova) Dana je sljedeća minimizacijska zadaća

$$\min\ \big(x - \frac{9}{4}\big)^2 + (y-2)^2\,,$$

uz uvjete

$$\begin{aligned} x^2 - y &\leq 0\,, \\ x + y - 6 &\leq 0\,, \\ x &\geq 0\,, \\ y &\geq 0\,. \end{aligned}$$

a) Bez korištenja nužnih uvjeta optimalnosti argumentirajte da zadaća ima jednistveno rješenje.

b) Ispitajte je li zadovoljen neki uvjet regularnosti.

c) Koristeći nužne uvjete optimalnosti odredite jedinstveno rješenje zadaće.

5.) (15 bodova) Za realan parametar $\alpha \in \mathbb{R}$ na funkcijskom prostoru $H_0^1([0,1])$ definirana je funkcija $F : H_0^1([0,1]) \to \mathbb{R}$ s

$$F(u) := \frac{1}{2}\int_0^1 u'(x)^2\,dx + 2\int_0^1 u(x)^2\,dx\ ,$$

te promatramo minimizacijski problem $\min_{u\in S_\alpha} F(u)$, gdje je

$$S_\alpha := \left\{ u \in H_0^1([0,1]) : G_\alpha(u) := \int_0^1 u(x)\,dx \le \alpha \right\}\ .$$

a) Bez korištenja nužnih uvjeta optimalnosti zaključite da gornji problem za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ ima jedinstveno rješenje $\bar{u}_\alpha$ (potrebno je precizno iskazati tvrdnje koje se koriste, te provjeriti sve potrebne pretpostavke).

b) Provjerite je li ispunjen neki uvjet regularnosti.

c) Koristeći nužne uvjete optimalnosti odredite minimizator $\bar{u}_\alpha$ u ovisnosti o parametru α.

M. Erceg