

Konveksna analiza s primjenama

Druga zadaća, 31. 5. 2019.

Zadaća ima 4 zadatka i svaki zadatak nosi dva boda. Dakle, ukupno je moguće skupiti 8 bodova (o čega su tri dodatna).

Predaja zadaća nije obvezna za polaganje kolegija (pogledati pravila polaganja).

Bodovat će se samo one zadaće koje su predane najkasnije na kolokviju **10.6.2019.**

- 1.) Dokažite sljedeću tvrdnju (primjetite malu razliku u odnosu na Napomenu 5.6(g) s predavanja):
Za realan normiran prostor $(X, \|\cdot\|)$ neka je $S \subseteq X$ neprazan zatvoren omeđen i ne sadrži nulvektor. Tada je cone S zatvoren.

Protuprimjerima pokažite da tvrdnja ne vrijedi ako ispustimo jedno od sljedećeg: zatvoren, omeđen, ne sadrži nulvektor.

- 2.) Za realni parametar $\alpha \in \mathbb{R}$ dana je sljedeća minimizacijska zadaća

$$\min x^2 + x + \alpha y,$$

uz uvjete

$$\begin{aligned} |x| - y &\leq 1, \\ x^2 + (y + 1)^2 &\leq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

- a) Bez korištenja nužnih uvjeta optimalnosti argumentirajte da za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ zadaća ima jedinstveno rješenje (x_α, y_α) . Može li se dogoditi da za dvije različite vrijednosti parametra α dobijemo isto rješenje?
- b) Ispitajte je li zadovoljen neki uvjet regularnosti.
- c) Koristeći nužne uvjete optimalnosti odredite skup $\{(x_\alpha, y_\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$, tj. za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ odredite rješenje zadaće, te ispitajte je li taj skup zatvoren.
- 3.) Na funkcijskom prostoru $H_0^1([0, 1])$ definirana je funkcija $F : H_0^1([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ s

$$F(u) := \int_0^1 (u'(x)^2 + u(x)^2) dx,$$

te promatramo minimizacijski problem $\min_{u \in S} F(u)$, gdje je

$$S := \left\{ u \in H_0^1([0, 1]) : H(u) := \int_0^1 u(x) dx = 3 \right\}.$$

- a) Bez korištenja nužnih uvjeta optimalnosti zaključite da gornji problem ima jedinstveno rješenje.
Uputa: Tvrdnja Zadatka 3(b) prethodne zadaće može poslužiti.
- b) Proverite je li ispunjen uvjet regularnosti (O).
- c) Koristeći nužne uvjete optimalnosti odredite minimizator \bar{u} .
- 4.) Odredite kandidata za optimalnu upravljačku funkciju $\bar{u} \in L^\infty(0, \pi)$ sljedeće zadaće optimalnog upravljanja:

$$\min \int_0^\pi u(t)^2 dt,$$

uz uvjete

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \\ \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, \\ x_2(\pi) &= 10, \end{aligned}$$

gdje je potrebno samo razmotriti slučajeve $\alpha = 0$ i $\alpha = -10$.

M. Erceg