Konveksna analiza s primjenama

Prva zadaća, 17. 4. 2019.

Zadaća ima 5 zadataka i svaki zadatak nosi po jedan bod. Dakle, ukupno je moguće skupiti 5 bodova. U drugom dijelu semestra bit će još jedna zadaća koja će također nositi 5 bodova.

Predaja zadaća nije obvezna za polaganje kolegija (pogledati pravila polaganja).

Bodovat će se samo one zadaće koje su predane najkasnije na predavanjima **6.5.2019.**

1.) Odredite Minkowskijev funkcional sljedećih podskupova $\mathbb{R}^2$:

a) $A_1 = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \wedge x_1 \leq 0) \vee (|x_2| \leq 1 \wedge x_1 > 0)\big\}$;

b) $A_2 = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 \leq 1\big\}$;

c) $A_3 = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x_1|, |x_2|\} \leq 1\big\}$;

d) $A_4 = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 < 1\big\}$.

U kojim slučajevima je pripadni Minkowskijev funkcional norma prostora $\mathbb{R}^2$?

2.) Pokažite da optimizacijski problemi iz primjera 1.1 i 1.4 s predavanja imaju barem jedno rješenje. Spomenuti problemi su dani s

a) tražimo minimum funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ na S, gdje su

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \geq 0\,,\ x_1 \leq 4x_2\,,\ x_2 \leq x_1\,,\ 2000 \leq x_1^2 x_2\}\,,$$
$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2\,.$$

b) tražimo minimum funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ na S, gdje su

$$S = \bigcap_{\alpha \in [0,2]} \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : x\alpha - \operatorname{sh}\alpha \leq \lambda\,,\ x\alpha - \operatorname{sh}\alpha \geq -\lambda\}\,,$$
$$f(x, \lambda) = \lambda\,.$$

imaju barem jedno rješenje.

3.) Neka je $(X, \|\cdot\|)$ realan normiran prostor. Funkcija $f : X \to \langle -\infty, +\infty]$ je *koercitivna* ako

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty\,.$$

Za funkciju $f : S \to \mathbb{R}$, $S \subseteq X$, kažemo da je *koercitivna* ako je njeno proširenje s $+\infty$

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in S \\ +\infty, & x \in X \setminus S \end{cases}\,,$$

koercitivno.

a) Pokažite da je $f : S \to \mathbb{R}$, $S \subseteq X$, koercitivna ako i samo ako su za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ skupovi $S_\alpha := \{x \in S : f(x) \leq \alpha\}$ omeđeni.

b) Dokažite da vrijedi tvrdnja Korolara 3.13 s predavanja bez pretpostavke omeđenosti skupa S, ali uz koercitivnost funkcije f. Preciznije, dokažite da vrijedi: *Neka je X realan refleksivan Banachov prostor, $S \subseteq X$ neprazan konveksan i zatvoren, te $f : S \to \mathbb{R}$ neprekidna kvazikonveksna i koercitivna. Tada f ima barem jednu minimalnu točku.*

Uputa: Najprije zaključite da f postiže minimum na $S_\alpha \neq \emptyset$.

4.) Ispitajte jesu li sljedeći skupovi u pripadnim prostorima proksimalni i/ili Čebiševljevi. Ako su Čebiševljevi, odredite jedinstvenu projekciju svih točaka prostora na taj skup.

a) $A = \{(x, x) : x \in [-2, 3]\}$ u $(\mathbb{R}^2, |\cdot|_1)$, gdje je $|(x_1, x_2)|_1 = |x_1| + |x_2|$.

b) $B = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ u $(\mathbb{R}^2, |\cdot|_\infty)$, gdje je $|(x_1, x_2)|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$.

c) $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ u $(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$, gdje je $|(x_1, x_2)| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

c) $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ u $(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$, gdje je $|(x_1, x_2)| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

5.) a) Pokažite da je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana s

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2^4}{x_1^2 + x_2^4}, & (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0, & (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

Fréchet diferencijabilna u ishodištu, ali da Gateauxova derivacije nije neprekidna u ishodištu. Što možemo zaključiti o obratu Teorema 4.18 s predavanja?

b) Pokažite da je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana s

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2^3}{x_1^2 + x_2^4}, & (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0, & (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

neprekidna i Gauteaux diferencijabilna u ishodištu, ali da nije Fréchet diferencijabilna. Koja pretpostavka Teorema 4.18 s predavanja nije ispunjena?

M. Erceg