# Nekomutativna razgranata natkrivanja

Ilja Gogić

PMF-MO, Sveučilište u Zagrebu &
PMF-DMI, Univerzitet u Novom Sadu

Matematički kolokvij
Matematički institut SANU
Beograd, 8. novembra 2013.

Neka je $X$ CH (kompaktan Hausdorffov) prostor i neka je $C(X)$ skup svih neprekidnih funkcija $f : X \to \mathbb{C}$.

- $C(X)$ postaje unitalna kompleksna $*$-algebra uz standardne operacije po točkama

$$(\alpha f)(x) := \alpha \cdot f(x)$$

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$$

i involuciju

$$f^*(x) := \overline{f(x)},$$

gdje su $f, g \in C(X)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ te $x \in X$.

- $C(X)$ možemo opskrbiti s max-normom

$$\|f\|_\infty := \max\{|f(x)| \ : \ x \in X\},$$

s obzirom na koju $C(X)$ postaje Banachov prostor.

- Max-norma je očito submultiplikativna, tj.

$$\|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

Drugim riječima, $C(X)$ je uz max-normu unitalna Banachova algebra.

- Ukoliko uzmemo u obzir i involuciju, max-norma zadovoljava i sljedeće, tzv. $C^*$-svojstvo:

$$\|f^* \cdot f\|_\infty = \|f\|_\infty^2.$$

- Max-norma je očito submultiplikativna, tj.

$$\|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

  Drugim riječima, $C(X)$ je uz max-normu unitalna Banachova algebra.
- Ukoliko uzmemo u obzir i involuciju, max-norma zadovoljava i sljedeće, tzv. $C^*$-svojstvo:

$$\|f^* \cdot f\|_\infty = \|f\|_\infty^2.$$

**Napomena**

Algebra $C(X)$ je komutativna, tj. vrijedi $f \cdot g = g \cdot f$ za sve $f, g \in C(X)$.

- Max-norma je očito submultiplikativna, tj.

$$\|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

  Drugim riječima, $C(X)$ je uz max-normu unitalna Banachova algebra.

- Ukoliko uzmemo u obzir i involuciju, max-norma zadovoljava i sljedeće, tzv. $C^*$-svojstvo:

$$\|f^* \cdot f\|_\infty = \|f\|_\infty^2.$$

**Napomena**

Algebra $C(X)$ je komutativna, tj. vrijedi $f \cdot g = g \cdot f$ za sve $f, g \in C(X)$.

Što dobivamo ako ispustimo komutativnost?

## Definicija

*$C^*$-**algebra** je kompleksna Banachova $*$-algebra $A$ čija norma $\|\cdot\|$ zadovoljava $C^*$-svojstvo. Drugim riječima:*

- *$A$ je algebra nad $\mathbb{C}$.*
- *$A$ je opskrbljena s involucijom, tj. s preslikavanjem $\square^* : A \to A$, $a \mapsto a^*$, koje zadovoljava sljedeća svojstva:*

  $$(\alpha a + \beta b)^* = \overline{\alpha} a^* + \overline{\beta} b^*, \quad (ab)^* = b^* a^*, \quad \text{te} \quad (a^*)^* = a,$$

  *za sve $a, b \in A$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.*
- *$A$ je uz normu $\|\cdot\|$ normirana algebra, tj. vrijedi*

  $$\|a \cdot b\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$$

  *za sve $a, b \in A$.*
- *$A$ je s obzirom na normu $\|\cdot\|$ Banachov prostor.*

## Definicija (Nastavak)

- *Norma* $\|\cdot\|$ *zadovoljava* $C^*$-**svojstvo**, *tj. vrijedi*

$$\|a^*a\| = \|a\|^2$$

*za sve* $a \in A$.

## Definicija (Nastavak)

- *Norma* $\|\cdot\|$ *zadovoljava* $C^*$-**svojstvo**, *tj. vrijedi*

$$\|a^* a\| = \|a\|^2$$

*za sve* $a \in A$.

Morfizme u kategoriji $C^*$-algebri sačinjavaju tzv. $*$-**homomorfizmi**, tj. multiplikativna linearna preslikavanja $\phi : A \to B$ koja čuvaju involuciju.

### Definicija (Nastavak)

- *Norma $\|\cdot\|$ zadovoljava $C^*$-**svojstvo**, tj. vrijedi*

$$\|a^*a\| = \|a\|^2$$

*za sve $a \in A$.*

Morfizme u kategoriji $C^*$-algebri sačinjavaju tzv. $*$-**homomorfizmi**, tj. multiplikativna linearna preslikavanja $\phi : A \to B$ koja čuvaju involuciju.

### Propozicija

*Neka je $\phi : A \to B$ $*$-homomorfizam između $C^*$-algebri $A$ i $B$.*

- *$\phi$ je kontrakcija (tj. $\|\phi(a)\| \leq \|a\|$ za sve $a \in A$).*
- *$\phi(A)$ je $C^*$-podalgebra od $B$ (naglasak na zatvorenosti).*
- *Ako je $\phi$ injekcija, tada je $\phi$ izometrija.*

## $C^*$-algebre i kvantna mehanika

U kvantnoj mehanici se fizikalni sistem obično opisuje s unitalnom $C^*$-algebrom $A$. Pritom:

- **Observable** čini skup svih hermitskih elemenata u $A$ (tj. elementi $a \in A$ za koje je $a^* = a$); one predstavljaju izmjerive vrijednosti sistema $A$.
- **Stanja** na $A$ su definirana kao pozitivni funkcionali na $A$ (tj. linearna preslikavanja $\omega : A \to \mathbb{C}$ koja zadovoljavaju $\omega(a^*a) \geq 0$ za sve $a \in A$) za koje je $\omega(1_A) = 1$.
- Ako je sistem u stanju $\omega$, tada je $\omega(a)$ očekivana vrijednost observable $a$.

Ovakav $C^*$-algebarski pristup se koristi u Haag-Kastlerovoj aksiomatizaciji lokalne kvantne teorije polja, gdje je svakom otvorenom podskupu prostorno vremenskog kontinuuma Minkowskog pridružena neka $C^*$-algebra.

### Primjer

Ako je $X$ CH prostor, tada je $C(X)$ (uz max-normu) unitalna komutativna $C^*$-algebra.

### Primjer

Ako je $X$ CH prostor, tada je $C(X)$ (uz max-normu) unitalna komutativna $C^*$-algebra.

Obratno, neka je $A$ unitalna komutativna $C^*$-algebra.

- Označimo s $X = X(A)$ prostor svih **karaktera** na $A$, tj. skup svih unitalnih multiplikativnih linearnih funkcionala $\chi : A \to \mathbb{C}$.
- Svaki karakter $\chi$ na $A$ je ograničen s $\|\chi\| = 1$, pa imamo $X \subseteq \mathrm{Ball}(A^*)$. Štoviše, $X$ je $w^*$-zatvoren podskup od $\mathrm{Ball}(A^*)$, pa je kao takav kompaktan (Banach-Alaogluov teorem).
- Za $a \in A$ definirajmo funkciju $\hat{a} : X \to \mathbb{C}$ s $\hat{a}(\chi) := \chi(a)$. Tada je $\hat{a} \in C(X)$ za sve $a \in A$.
- **Geljfandova transformacija** od $A$ je funkcija $\mathcal{G}_A : A \to C(X)$ definirana s $\mathcal{G}(a) := \hat{a}$.

**Teorem (komutativni Geljfand-Naimarkov teorem)**

*Ako je* $A$ *unitalna komutativna* $C^*$*-algebra, tada je Geljfandova transofmacija* $\mathcal{G}_A$ *izometrički* $*$*-izomorfizam s* $A$ *na* $C(X(A))$.

## Teorem (komutativni Geljfand-Naimarkov teorem)

*Ako je $A$ unitalna komutativna $C^*$-algebra, tada je Geljfandova transofmacija $\mathcal{G}_A$ izometrički $*$-izomorfizam s $A$ na $C(X(A))$.*

## U terminima teorije kategorija:

- Neka je **CH** kategorija čiji su objekti svi kompaktni Hausdorffovi prostori, a morfizmi neprekidne funkcije.
- Neka je $\mathbf{UKC}^*$ kategorija čiji su objekti sve unitalne komutativne $C^*$-algebre, a morfizmi unitalni $*$-homomorfizmi.
- Definirajmo dva kontravarijantna funktora $C : \mathbf{CH} \rightsquigarrow \mathbf{UKC}^*$ i $X : \mathbf{UKC}^* \rightsquigarrow \mathbf{CH}$ na sljedeći način:
  - Funktor $C$ prevodi CH prostor $X$ u unitalnu komutativnu $C^*$-algebru $C(X)$, a neprekidnu funkciju $F : X \to Y$ u unitalni $*$-homomorfizam $C(F) : C(Y) \to C(X)$, $C(F)(f) := f \circ F$.
  - Funktor $X$ prevodi unitalnu komutativnu $C^*$-algebru $A$ u CH prostor $X(A)$, a unitalni $*$-homomorfizam $\phi : A \to B$ u neprekidnu funkciju $X(\phi) : X(B) \to X(A)$, $X(\phi)(\chi) := \chi \circ \phi$.

## U terminima teorije kategorija (nastavak):

Za $x \in X$ označimo s $\epsilon_x$ pripadni evaluacijski karakter na $C(X)$, $\epsilon_x : f \mapsto f(x)$ i definirajmo preslikavanje $\epsilon_X : X \to X(C(X))$ s $\epsilon_X : x \mapsto \epsilon_X$. Tada se lako provjeri da sljedeći dijagrami komutiraju:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle \epsilon_X} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_Y} \\ X(C(X)) & \xrightarrow{X(C(f))} & X(C(Y)) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \downarrow{\scriptstyle \mathcal{G}_A} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{G}_B} \\ C(X(A)) & \xrightarrow{C(X(\phi))} & C(X(B)) \end{array}$$

## U terminima teorije kategorija (nastavak):

Za $x \in X$ označimo s $\epsilon_x$ pripadni evaluacijski karakter na $C(X)$, $\epsilon_x : f \mapsto f(x)$ i definirajmo preslikavanje $\epsilon_X : X \to X(C(X))$ s $\epsilon_X : x \mapsto \epsilon_x$. Tada se lako provjeri da sljedeći dijagrami komutiraju:

$$
\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{f} & Y \\
\downarrow{\scriptstyle \epsilon_X} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_Y} \\
X(C(X)) & \xrightarrow{X(C(f))} & X(C(Y))
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{\phi} & B \\
\downarrow{\scriptstyle \mathcal{G}_A} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{G}_B} \\
C(X(A)) & \xrightarrow{C(X(\phi))} & C(X(B))
\end{array}
$$

## Korolar

$X \circ C \cong \mathrm{id}_{\mathbf{CH}}$ *i* $C \circ X \cong \mathrm{id}_{\mathbf{UKC}^*}$ *(prirodni izomorfizam funktora). Dakle, kategorije* **CH** *i* **UKC**$^*$ *su međusobno dualne.*

## U terminima teorije kategorija (nastavak):

Za $x \in X$ označimo s $\epsilon_x$ pripadni evaluacijski karakter na $C(X)$, $\epsilon_x : f \mapsto f(x)$ i definirajmo preslikavanje $\epsilon_X : X \to X(C(X))$ s $\epsilon_X : x \mapsto \epsilon_X$. Tada se lako provjeri da sljedeći dijagrami komutiraju:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle \epsilon_X} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_Y} \\ X(C(X)) & \xrightarrow{X(C(f))} & X(C(Y)) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \downarrow{\scriptstyle \mathcal{G}_A} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{G}_B} \\ C(X(A)) & \xrightarrow{C(X(\phi))} & C(X(B)) \end{array}$$

## Korolar

*$X \circ C \cong \mathrm{id}_{\mathbf{CH}}$ i $C \circ X \cong \mathrm{id}_{\mathbf{UKC}^*}$ (prirodni izomorfizam funktora). Dakle, kategorije* **CH** *i* $\mathbf{UKC}^*$ *su međusobno dualne.*

Drugim riječima: Prelaskom s CH prostora $X$ na funkcijsku algebru $C(X)$ nije izgubljena niti jedna topološka informacija prostora $X$.

Mnoge topološke pojmove, svojstva i konstrukcije možemo formulirati u terminima $C^*$-algebri, bez pozivanja na komutativnost ili na inherentni prostor. Na taj način dobivamo njihove direktne (nekomutativne) generalizacije. Npr.

Mnoge topološke pojmove, svojstva i konstrukcije možemo formulirati u terminima $C^*$-algebri, bez pozivanja na komutativnost ili na inherentni prostor. Na taj način dobivamo njihove direktne (nekomutativne) generalizacije. Npr.

| TOPOLOGIJA | $C^*$-ALGEBRE |
|---|---|
| otvoren podskup | zatvoren ideal |
| zatvoren podskup | kvocijentna algebra |
| homeomorfizam | $*$-automorfizam |
| kompaktnost | unitalnost |
| povezanost | algebra bez projektora |
| Kartezijev produkt | prostorni tenzorski produkt |
| Aleksandrovljeva kompaktifikacija | minimalna unitizacija |
| Stone-Čechovljeva kompaktifikacija | multiplikatorska algebra |
| vjerojatnosna mjera | stanje |
| Lebesgueova dimenzija | nuklearna dimenzija |
| topološka K-teorija | K-teorija za $C^*$-algebre |

Radi toga na nekomutativne $C^*$-algebre možemo gledati kao na algebre funkcija na "nekomutativnim prostorima", koji ne postoje u klasičnom smislu. U tom kontekstu se teorija $C^*$-algebri smatra **nekomutativnom topologijom**.

## Primjeri $C^*$-algebri

- Matrične algebre $\mathbb{M}_n = M_n(\mathbb{C})$ nad $\mathbb{C}$ s euklidskom operatorskom normom.
- $C^*$-algebre oblika $A = \mathbb{M}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{M}_{n_k}$ čine (do na izomorfizam) sve konačnodimenzionalne $C^*$-algebre. U tom slučaju broj $r(A) := n_1 + \cdots + n_k$ zovemo **rang** od $A$.
- Algebra $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ svih ograničenih operatora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ je $C^*$-algebra uz uobičajene operacije, adjungiranje te operatorsku normu.
- Skup svih kompaktnih operatora $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ je zatvorena samoadjungirana podalgebra od $\mathbb{B}(\mathcal{H})$, pa je stoga $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ $C^*$-algebra.
- Ako je $A$ $C^*$-algebra, tada na $*$-algebri $M_n(A)$ svih $n \times n$ matrica s vrijednostima u $A$ postoji jedinstvena norma s obzirom na koju $M_n(A)$ postaje $C^*$-algebra.

## Primjeri $C^*$-algebri (nastavak)

- Ako je $A$ $C^*$-algebra i $X$ CH prostor, tada je $C(X, A)$ $C^*$-algebra uz max-normu.
- Svakoj lokalno kompaktnoj grupi $G$ možemo pridružiti $C^*$-algebru $C^*(G)$. Sve o teoriji reprezentacija od $G$ je kodirano u $C^*(G)$.
- Određenoj klasi unitalnih prstenova $R$ možemo pridružiti $C^*$-algebru $C^*(R)$. Time dolazimo do važne poveznice s teorijom brojeva, koju dobivamo primjenom teorije $C^*$-algebri na prstenove algebarskih brojeva.
- **Topološki dinamički sistem** se sastoji od kompaktnog prostora $X$, lokalno kompaktne grupe $G$ i neprekidnog djelovanja grupa $\alpha : G \curvearrowright X$. Takvoj trojci $(X, \alpha, G)$ možemo pridružiti transformacijsku grupovnu $C^*$-algebru $C(X) \rtimes_\alpha G$.
- Kategorija $C^*$-algebri dozvoljava kvocijente, direktne sume, direktne produkte, direktne limese, (određene) tenzorske produkte, itd.

## Definicija

**Reprezentacija** *$C^*$-algebre $A$ je $*$-homomorfizam $\pi : A \to \mathbb{B}(\mathcal{H})$, gdje je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Kažemo da je $\pi$:*

- **vjerna reprezentacija** *ako je $\pi$ injekcija (=izometrija).*
- **ireducibilna reprezentacija** *ako $\pi$ nema netrivijalnih invarijantnih potprostora (tj. ako je $\mathcal{K}$ (zatvoren) potprostor od $\mathcal{H}$ takav da je $\pi(A)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$, tada je nužno $\mathcal{K} = \{0\}$ ili $\mathcal{K} = \mathcal{H}$).*

### Definicija

**Reprezentacija** *$C^*$-algebre $A$ je $*$-homomorfizam $\pi : A \to \mathbb{B}(\mathcal{H})$, gdje je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Kažemo da je $\pi$:*

- **vjerna reprezentacija** *ako je $\pi$ injekcija (=izometrija).*
- **ireducibilna reprezentacija** *ako $\pi$ nema netrivijalnih invarijantnih potprostora (tj. ako je $\mathcal{K}$ (zatvoren) potprostor od $\mathcal{H}$ takav da je $\pi(A)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$, tada je nužno $\mathcal{K} = \{0\}$ ili $\mathcal{K} = \mathcal{H}$).*

### Teorem (Nekomutativni Geljfand-Naimarkov teorem)

*Svaka $C^*$-algebra dopušta vjernu reprezentaciju.*

### Definicija

**Reprezentacija** *$C^*$-algebre $A$ je $*$-homomorfizam $\pi : A \to \mathbb{B}(\mathcal{H})$, gdje je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Kažemo da je $\pi$:*

- **vjerna reprezentacija** *ako je $\pi$ injekcija (=izometrija).*
- **ireducibilna reprezentacija** *ako $\pi$ nema netrivijalnih invarijantnih potprostora (tj. ako je $\mathcal{K}$ (zatvoren) potprostor od $\mathcal{H}$ takav da je $\pi(A)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$, tada je nužno $\mathcal{K} = \{0\}$ ili $\mathcal{K} = \mathcal{H}$).*

### Teorem (Nekomutativni Geljfand-Naimarkov teorem)

*Svaka $C^*$-algebra dopušta vjernu reprezentaciju.*

### Napomena

Radi prethodnog teorema, $C^*$-algebru možemo (konkretno) definirati kao uniformno zatvorenu samoadjungiranu podalgebru od $\mathbb{B}(\mathcal{H})$, gdje je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor.

### Definicija

*Neka je $A$ $C^*$-algebra.*

- *Za ideal $P$ u $A$ kažemo da je* **primitivan** *ako je on jezgra neke ireducibilne reprezentacije od $A$. Skup svih primitivnih ideala u $A$ označavamo s $\mathrm{Prim}(A)$.*
- $\mathrm{Prim}(A)$ *opskrbljujemo s* **Jacobsonovom topologijom**: *Otvorene skupove u $\mathrm{Prim}(A)$ čine skupovi oblika*

$$U(I) := \{P \in \mathrm{Prim}(A) \ : \ I \not\subseteq P\},$$

  *gdje $I$ prolazi po skupu obostranih zatvorenih ideala u $A$.*

*Za $\mathrm{Prim}(A)$ snabdjeven s Jacobsonovom topologijom kažemo da je* **primitivni spektar** *od $A$.*

### Primjer

Neka je $A = C(X)$, gdje je $X$ CH prostor. Za točku $x \in X$ stavimo $C_x(X) := \{f \in C(X) \ : \ f(x) = 0\}$. Tada je

$$\mathrm{Prim}(C(X)) = \{C_x(X) \ : \ x \in X\}.$$

Nadalje podskup $F \subseteq X$ je zatvoren u $X$ ako i samo ako je pripadni podskup $\{C_x(X) \ : \ x \in F\}$ zatvoren u $\mathrm{Prim}(C(X))$.

## Primjer

Neka je $A = C(X)$, gdje je $X$ CH prostor. Za točku $x \in X$ stavimo $C_x(X) := \{f \in C(X) \ : \ f(x) = 0\}$. Tada je

$$\mathrm{Prim}(C(X)) = \{C_x(X) \ : \ x \in X\}.$$

Nadalje podskup $F \subseteq X$ je zatvoren u $X$ ako i samo ako je pripadni podskup $\{C_x(X) \ : \ x \in F\}$ zatvoren u $\mathrm{Prim}(C(X))$.

## Napomena

- Za $a \in A$ imamo $\|a\| = \sup_{P \in \mathrm{Prim}(A)} \|a + P\|$. Posebno, primitivni ideali razdvajaju elemente od $A$.
- $\mathrm{Prim}(A)$ je uvijek $T_0$ prostor. No općenito, $\mathrm{Prim}(A)$ ne mora biti $T_1$. Npr. za $C^*$-algebru $\mathbb{B}(\mathcal{H})$, $\mathcal{H}$ separabilan, imamo $\mathrm{Prim}(\mathbb{B}(\mathcal{H})) = \{0, \mathbb{K}(\mathcal{H})\}$, pa je $\overline{\{0\}} = \{0, \mathbb{K}(\mathcal{H})\} \neq \{0\}$.
- Ako je $C^*$-algebra $A$ unitalna, tada je $\mathrm{Prim}(A)$ kompaktan.

Svaka unitalna $C^*$-algebra $A$ postaje modul nad algebrom $C(\mathrm{Prim}(A))$. O tome govori sljedeći bitan teorem:

**Teorem (Dauns-Hofmannov teorem)**

*Neka je $A$ unitalna $C^*$-algebra. Tada postoji jedinstven $*$-izomorfizam $\Phi_A$ s $C(\mathrm{Prim}(A))$ na centar $Z(A)$ od $A$ takav da vrijedi*

$$\Phi_A(f)a + P = f(P)(a + P) \qquad \textit{(jednakost u } A/P\textit{)}$$

*za sve $f \in C(\mathrm{Prim}(A))$, $a \in A$ i $P \in \mathrm{Prim}(A)$.*

Svaka unitalna $C^*$-algebra $A$ postaje modul nad algebrom $C(\mathrm{Prim}(A))$. O tome govori sljedeći bitan teorem:

**Teorem (Dauns-Hofmannov teorem)**

*Neka je $A$ unitalna $C^*$-algebra. Tada postoji jedinstven $*$-izomorfizam $\Phi_A$ s $C(\mathrm{Prim}(A))$ na centar $Z(A)$ od $A$ takav da vrijedi*

$$\Phi_A(f)a + P = f(P)(a + P) \qquad \textit{(jednakost u } A/P\textit{)}$$

*za sve $f \in C(\mathrm{Prim}(A))$, $a \in A$ i $P \in \mathrm{Prim}(A)$.*

$*$-izomorfizam $\Phi_A : C(\mathrm{Prim}(A)) \cong Z(A)$ iz prethodnog teorema se zove **Dauns-Hofmannov izomorfizam**.

U svjetlu nekomutativne topologije prirodno je pitati se možemo li danu unitalnu $C^*$-algebru $A$ reprezentirati kao algebru prereza nekakvog svežnja. Npr. $C(X)$ je familija prereza trivijalnog svežnja $X \times \mathbb{C}$ nad $X$. Slično vrijedi i za algebru $C(X, \mathbb{M}_n)$.

U svjetlu nekomutativne topologije prirodno je pitati se možemo li danu unitalnu $C^*$-algebru $A$ reprezentirati kao algebru prereza nekakvog svežnja. Npr. $C(X)$ je familija prereza trivijalnog svežnja $X \times \mathbb{C}$ nad $X$. Slično vrijedi i za algebru $C(X, \mathbb{M}_n)$.

Prirodni kandidat za bazni prostor $X$ je prostor $\mathrm{Prim}(A)$. No $\mathrm{Prim}(A)$ nije dobar izbor, jer se on kao topološki prostor često ponaša dosta loše ($\mathrm{Prim}(A)$ općenito nije niti $T_1$-prostor).

U svjetlu nekomutativne topologije prirodno je pitati se možemo li danu unitalnu $C^*$-algebru $A$ reprezentirati kao algebru prereza nekakvog svežnja. Npr. $C(X)$ je familija prereza trivijalnog svežnja $X \times \mathbb{C}$ nad $X$. Slično vrijedi i za algebru $C(X, \mathbb{M}_n)$.

Prirodni kandidat za bazni prostor $X$ je prostor $\mathrm{Prim}(A)$. No $\mathrm{Prim}(A)$ nije dobar izbor, jer se on kao topološki prostor često ponaša dosta loše ($\mathrm{Prim}(A)$ općenito nije niti $T_1$-prostor).

Radi toga je uobičajena procedura naći odgovarajući kompaktan Hausdorffov prostor $X$ nad kojim se $A$ fibrira na lijep način. Na taj način dolazimo do $C(X)$-algebri koje je uveo G. Kasparov 1988.

U svjetlu nekomutativne topologije prirodno je pitati se možemo li danu unitalnu $C^*$-algebru $A$ reprezentirati kao algebru prereza nekakvog svežnja. Npr. $C(X)$ je familija prereza trivijalnog svežnja $X \times \mathbb{C}$ nad $X$. Slično vrijedi i za algebru $C(X, \mathbb{M}_n)$.

Prirodni kandidat za bazni prostor $X$ je prostor $\mathrm{Prim}(A)$. No $\mathrm{Prim}(A)$ nije dobar izbor, jer se on kao topološki prostor često ponaša dosta loše ($\mathrm{Prim}(A)$ općenito nije niti $T_1$-prostor).

Radi toga je uobičajena procedura naći odgovarajući kompaktan Hausdorffov prostor $X$ nad kojim se $A$ fibrira na lijep način. Na taj način dolazimo do $C(X)$-algebri koje je uveo G. Kasparov 1988.

### Definicija

*Neka je $A$ unitalna $C^*$-algebra i neka je $X$ CH prostor. Za $A$ kažemo da je* **C(X)-algebra** *ako postoji unitalni $*$-homomorfizam $\psi_A : C(X) \to Z(A)$. Produkt $\psi_A(f) \cdot a$ obično kraće zapisujemo s $f \cdot a$.*

$C(X)$-algebre se fibriraju nad $X$ na prirodan način:

- Za $x \in X$ stavimo $J_x := C_x(X) \cdot A$. Tada je prema Hewitt-Cohenovom teoremu faktorizacije $J_x$ zatvoren obostran ideal u $A$. Kvocijentnu $C^*$-algebru $A_x := A/J_x$ zovemo **vlakno** nad $x$.
- Za $a \in A$ s $a_x$ označavamo kanonsku sliku od $a$ u $A_x$. Tada element $a$ poistovjećujeno s funkcijom $\widehat{a} : X \to \bigsqcup_{x \in X} A_x$, $\widehat{a} : x \mapsto a_x$.
- Za svako $a \in A$ vrijedi

$$\|a_x\| = \inf\{\|[1 - f + f(x)] \cdot a\| \ : \ f \in C(X)\},$$

  tako da je pripadna funkcija norme $x \mapsto \|a_x\|$ odozgo poluneprekidna na $X$. Ako su sve te funkcije norme neprekidne na $X$, tada kažemo da je $A$ **neprekidna C(X)-algebra**.
- Za svako $a \in A$ imamo

$$\|a\| = \sup_{x \in X} \|a_x\|.$$

## Osnovni primjer

Neka je $D$ bilo koja unitalna $C^*$-algebra. Tada $A := C(X, D)$ postaje neprekidna $C(X)$-algebra na prirodan način:

$$\psi_A(f)(x) := f(x) \cdot 1_A \qquad (f \in C(X)).$$

Ovdje svako vlakno $A_x$ možemo identificirati s $D$ na prirodan način.

### Osnovni primjer

Neka je $D$ bilo koja unitalna $C^*$-algebra. Tada $A := C(X, D)$ postaje neprekidna $C(X)$-algebra na prirodan način:

$$\psi_A(f)(x) := f(x) \cdot 1_A \qquad (f \in C(X)).$$

Ovdje svako vlakno $A_x$ možemo identificirati s $D$ na prirodan način.

### Degenerirani primjer

Neka je $A$ bilo koja unitalna $C^*$-algebra i fiksirajmo točku $x_0 \in X$. Tada $A$ postaje $C(X)$-algebra preko preslikavanja

$$\psi_A(f) := f(x_0) \cdot 1_A \qquad (f \in C(X)).$$

Ovdje je svako vlakno $A_x$ nul-algebra, osim za $x = x_0$ gdje je $A_{x_0} = A$.

**Napomena**

Kako bismo izbjegli ovakve patološke primjere, mi ćemo tokom ovog predavanja pretpostavljati da je $*$-homomorfizam $\psi_A$ injektivan. Tada $C(X)$ možemo identificirati s $C^*$-podalgebrom $\psi_A(C(X))$ od $Z(A)$.

### Napomena

Kako bismo izbjegli ovakve patološke primjere, mi ćemo tokom ovog predavanja pretpostavljati da je $*$-homomorfizam $\psi_A$ injektivan. Tada $C(X)$ možemo identificirati s $C^*$-podalgebrom $\psi_A(C(X))$ od $Z(A)$.

### Komutativni primjer

Neka su $X$ i $Y$ CH prostori te neka je $\sigma : Y \to X$ neprekidna surjekcija. Tada $C(Y)$ postaje $C(X)$-algebra preko

$$\psi_{C(Y)}(f) := f \circ \sigma.$$

- Za svako $x \in X$ je pripadno vlakno $C(Y)_x$ $*$-izomorfno s $C(\sigma^{-1}(x))$.
- $C(Y)$ je neprekidna $C(X)$-algebra ako i samo ako je $\sigma$ otvoreno preslikavanje.

Prethodni primjer ima direktnu generalizaciju u općem slučaju:

**Teorem**

*Neka je $A$ unitalna $C^*$-algebra i neka je $X$ CH prostor.*

- *Ako postoji neprekidna surjekcija $\sigma_A : \mathrm{Prim}(A) \to X$, tada $A$ postaje $C(X)$-algebra preko*
$$\psi_A(f) := \Phi_A \circ f \circ \sigma_A \qquad (f \in C(X)),$$
*gdje je $\Phi_A : C(\mathrm{Prim}(A)) \cong Z(A)$ Dauns-Hofmannov izomorfizam.*
- *Štoviše, svaku unitalnu $C(X)$-algebru dobivamo na taj način.*
- *$C(X)$-algebra $A$ je neprekidna ako i samo ako je pripadno preslikavanje $\sigma_A$ otvoreno.*

Nama će posebno biti interesantne sljedeće klase $C(X)$-algebri:

**Definicija**

*Za unitalnu $C(X)$-algebru $A$ kažemo da je*

- **homogena** *ako postoji konačno-dimenzionalna $C^*$-algebra $D$ takva da su sva vlakna od $A$ $*$-izomorfna s $D$.*
- **subhomogena** *ako su sva vlakna $A_x$ konačno-dimenzionalna i* $\sup_{x \in X} \dim A_x < \infty$.

Nama će posebno biti interesantne sljedeće klase $C(X)$-algebri:

### Definicija

*Za unitalnu $C(X)$-algebru $A$ kažemo da je*

- **homogena** *ako postoji konačno-dimenzionalna $C^*$-algebra $D$ takva da su sva vlakna od $A$ $*$-izomorfna s $D$.*
- **subhomogena** *ako su sva vlakna $A_x$ konačno-dimenzionalna i* $\sup_{x \in X} \dim A_x < \infty$.

### Primjer

- $C(X, \mathbb{M}_n)$ je (neprekidna) homogena $C(X)$-algebra s vlaknom $\mathbb{M}_n$.
- Neka je

$$A := \{f \in C([0,1], \mathbb{M}_n) \ : \ f(0) \text{ je dijagonalna matrica}\}.$$

Tada je $A$ (neprekidna) subhomogena $C([0,1])$-algebra s $A_0 = \mathbb{C}^n$ i $A_x = \mathbb{M}_n$ za $0 < x \leq 1$.

## Napomena

Neka je $A$ unitalna $C(X)$-algebra.

- $A$ je subhomogena ako i samo ako vrijedi

$$r(A) := \sup\{r(A_x) \ : x \in X\} < \infty.$$

  Kao i u konačno-dimenzionalnom slučaju broj $r(A)$ zovemo **rang** od $A$.

- Ako je $A$ neprekidna i homogena s vlaknom $D$, tada je prema rezultatu J. Fella iz 1961. $A$ lokalno trivijalna. Intuitivno, to znači da postoji otvoren pokrivač $\{U_i\}$ od $X$ takav svaka restrikcija od $A$ na $U_i$ "izgleda" kao $C_0(U_i, D)$ ($C^*$-algebra neprekidnih funkcija $f : U_i \to D$ koje trnu u $\infty$, sa sup-normom).

## Definicija

*Neka je $A$ $C^*$-algebra. Za element $a \in A$ kažemo da je* **pozitivan** *i pišemo $a \geq 0$ ako je on oblika $a = b^* b$ za neko $b \in A$. Ako je $B$ neka druga $C^*$-algebra, tada za linearno preslikavanje $\phi : A \to B$ kažemo da je:*

- **pozitivno** *ako je $\phi(a) \geq 0$ za sve $a \geq 0$.*
- **potpuno pozitivno** *ako su sva inducirana preslikavanja*

$$\phi_n : M_n(A) \to M_n(B), \qquad \phi_n([a_{ij}]) := [\phi(a_{ij})]$$

  *pozitivna.*

## Definicija

*Neka je $A$ $C^*$-algebra. Za element $a \in A$ kažemo da je* **pozitivan** *i pišemo $a \geq 0$ ako je on oblika $a = b^*b$ za neko $b \in A$. Ako je $B$ neka druga $C^*$-algebra, tada za linearno preslikavanje $\phi : A \to B$ kažemo da je:*

- **pozitivno** *ako je $\phi(a) \geq 0$ za sve $a \geq 0$.*
- **potpuno pozitivno** *ako su sva inducirana preslikavanja*

$$\phi_n : M_n(A) \to M_n(B), \qquad \phi_n([a_{ij}]) := [\phi(a_{ij})]$$

  *pozitivna.*

## Napomena

U kvantnoj mehanici (posebno u kvantnoj teoriji informacija) pozitivna preslikavanja su bitna jer slikaju stanja u stanja. Među njima su posebno istaknuta potpuno pozitivna preslikavanja, budući da ona reprezentiraju evoluciju procesa, čak i uz prisustvo zapetljanja (eng. entanglement).

## Primjer

- Svaki $*$-homomorfizam između $C^*$-algebri je potpuno pozitivan.
- Operator transponiranja $\phi : \mathbb{M}_2 \to \mathbb{M}_2$, $\phi(T) = T^t$ je pozitivan, ali nije potpuno pozitivan. Naime, ako identificiramo $M_2(\mathbb{M}_2)$ s $\mathbb{M}_4$, tada se lako provjeri da inducirano preslikavanje $\phi_2 : \mathbb{M}_4 \to \mathbb{M}_4$ nije pozitivno.

### Primjer

- Svaki $*$-homomorfizam između $C^*$-algebri je potpuno pozitivan.
- Operator transponiranja $\phi : \mathbb{M}_2 \to \mathbb{M}_2$, $\phi(T) = T^t$ je pozitivan, ali nije potpuno pozitivan. Naime, ako identificiramo $M_2(\mathbb{M}_2)$ s $\mathbb{M}_4$, tada se lako provjeri da inducirano preslikavanje $\phi_2 : \mathbb{M}_4 \to \mathbb{M}_4$ nije pozitivno.

S druge strane, ako je kodomena komutativna, tada je svako pozitivno preslikavanje potpuno pozitivno:

### Propozicija

*Ako je $A$ unitalna $C^*$-algebra i $X$ $CH$ prostor, tada je svako pozitivno linearno preslikavanje $\phi : A \to C(X)$ potpuno pozitivno i ograničeno, s $\|\phi\| = \|\phi(1)\|$.*

Unutar klase potpuno pozitivnih preslikavanja između $C^*$-algebri istaknutu ulogu igraju tzv. uvjetna očekivanja:

### Definicija

*Neka su $B \subseteq A$ unitalne $C^*$-algebre s istom jedinicom.* **Uvjetno očekivanje** *s $A$ u $B$ je potpuno pozitivna kontrakcija $E : A \to B$ takva da vrijedi:*

- *$E(b) = b$ za sve $b \in B$.*
- *$E$ je ${}_B A_B$-linearno, tj. $E(b_1 a b_2) = b_1 E(a) b_2$ za sve $a \in A$ i $b_1, b_2 \in B$.*

Unutar klase potpuno pozitivnih preslikavanja između $C^*$-algebri istaknutu ulogu igraju tzv. uvjetna očekivanja:

### Definicija

*Neka su $B \subseteq A$ unitalne $C^*$-algebre s istom jedinicom.* **Uvjetno očekivanje** *s $A$ u $B$ je potpuno pozitivna kontrakcija $E : A \to B$ takva da vrijedi:*

- $E(b) = b$ *za sve* $b \in B$.
- $E$ *je* ${}_BA_B$*-linearno, tj.* $E(b_1 a b_2) = b_1 E(a) b_2$ *za sve* $a \in A$ *i* $b_1, b_2 \in B$.

### Napomena

Koncept uvjetnog očekivanja na nivou $C^*$-algebri je nekomutativna generalizacija istog pojma na vjerojatnosnim prostorima.

**Teorem (Y. Tomiyama, 1957)**

*Preslikavanje* $E : A \to B$ *je uvjetno očekivanje ako i samo ako je* $E$ *projektor norme* $1$.

**Teorem (Y. Tomiyama, 1957)**

*Preslikavanje $E : A \to B$ je uvjetno očekivanje ako i samo ako je $E$ projektor norme $1$.*

**Definicija**

*Za uvjetno očekivanje $E : A \to B$ kažemo da je* **konačnog indeksa** *ako postoji konstanta $K \geq 1$ takva da je preslikavanje $(K \cdot E - \mathrm{id}_A) : A \to A$ pozitivno. U tom slučaju definiramo* **slabi indeks** *od $E$ s*

$$\mathrm{Ind}_w(E) := \inf\{K \geq 1 \ : \ K \cdot E - \mathrm{id}_A \textit{ je pozitivno}\}.$$

### Teorem (Y. Tomiyama, 1957)

*Preslikavanje $E : A \to B$ je uvjetno očekivanje ako i samo ako je $E$ projektor norme $1$.*

### Definicija

*Za uvjetno očekivanje $E : A \to B$ kažemo da je* **konačnog indeksa** *ako postoji konstanta $K \geq 1$ takva da je preslikavanje $(K \cdot E - \mathrm{id}_A) : A \to A$ pozitivno. U tom slučaju definiramo* **slabi indeks** *od $E$ s*

$$\mathrm{Ind}_w(E) := \inf\{K \geq 1 \ : \ K \cdot E - \mathrm{id}_A \textit{ je pozitivno}\}.$$

Za unitalnu inkluziju $B \subseteq A$ unitalnih $C^*$-algebri možemo definirati sljedeću (globalnu) konstantu, koja će nam biti od posebnog interesa:

$$\mathrm{Ind}_w(A, B) := \inf\{\mathrm{Ind}_w(E) \ : \ E : A \to B \text{ u. o. konačnog indeksa}\},$$

te $\mathrm{Ind}_w(A, B) = \infty$ ako takvo uvjetno očekivanje ne postoji.

## Primjer

Neka je $A$ homogena $C(X)$-algebra $C(X, \mathbb{M}_n)$ i neka je $\mathrm{tr}(\cdot)$ standardni trag na $\mathbb{M}_n$. Tada je s

$$E(f)(x) := \frac{1}{n}\mathrm{tr}(f(x))$$

definirano uvjetno očekivanje konačnog indeksa s $A$ na $C(X)$. Pritom je $\mathrm{Ind}_w(A, C(X)) = \mathrm{Ind}_w(E) = n$.

## Primjer

Neka je $A$ homogena $C(X)$-algebra $C(X, \mathbb{M}_n)$ i neka je $\mathrm{tr}(\cdot)$ standardni trag na $\mathbb{M}_n$. Tada je s

$$E(f)(x) := \frac{1}{n} \mathrm{tr}(f(x))$$

definirano uvjetno očekivanje konačnog indeksa s $A$ na $C(X)$. Pritom je $\mathrm{Ind}_w(A, C(X)) = \mathrm{Ind}_w(E) = n$.

## Malo povijesti

- Pojam konačnog indeksa uveo je V. Jones (dobitnik Fieldsove medalje) 1983. kako bi klasificirao podfaktore $B$ faktora $A$ tipa $II_1$. U tom slučaju indeks $[A : B]$ je skalar, koji (fascinantno) poprima vrijednosti iz skupa

$$\left\{4\cos^2 \frac{\pi}{n} \ : n \in \mathbb{N},\ n \geq 3\right\} \cup [4, +\infty].$$

## Malo povijesti (nastavak)

- Ubrzo nakon toga, H. Kosaki 1986. proširuje Jonesovu teoriju indeksa na proizvoljne faktore i pokazuje da indeks poprima iste vrijednosti kao u slučaju (pod)faktora tipa $II_1$.
- Kako bi generalizirali Jonesove i Kosakijeve rezultate, M. Pimsner i S. Popa su 1986. uveli definiciju konačnog indeksa za uvjetna očekivanja $E : A \to B$ između proizvoljnih $W^*$-algebri $B \subseteq A$. U tom slučaju indeks od $E$ je element centra od $A$.
- Aktualnu definiciju konačnog indeksa za uvjetna očekivanja između proizvoljnih $C^*$-algebri su uveli i opravdali M. Frank i E. Kirchberg 1998. Glavni rezultat njihovog rada je da je uvjetno očekivanje $E : A \to B$ ($B \subseteq A$ su $C^*$-algebre) konačnog indeksa ako i samo ako postoji konstanta $L \geq 1$ takva da je preslikavanje $L \cdot E - \mathrm{id}_A$ potpuno pozitivno. U tom slučaju se indeks od $E$ može računati u centru bidualne $W^*$-algebre $A^{**}$.

### Definicija

*Neka su $X$ i $Y$ kompaktni Hausdorffovi prostori.* **Razgranato natkrivanje** *je otvorena neprekidna surjekcija $\sigma : Y \to X$ koja ima uniformno konačan broj praslika, tj.*

$$\sup_{x \in X} |\sigma^{-1}(x)| < \infty.$$

## Definicija

*Neka su $X$ i $Y$ kompaktni Hausdorffovi prostori.* **Razgranato natkrivanje** *je otvorena neprekidna surjekcija $\sigma : Y \to X$ koja ima uniformno konačan broj praslika, tj.*

$$\sup_{x \in X} |\sigma^{-1}(x)| < \infty.$$

## Primjer

- Svako klasično $n$-lisno natkrivanje ($n$ konačan) $\sigma : Y \to X$ je razgranato natkrivanje.
- $\sigma(x) = x^2$, $\sigma : [-1, 1] \to [0, 1]$ je razgranato natkrivanje. Ovdje je $|\sigma^{-1}(x)| = 2$ za $x \in (0, 1]$ i $|\sigma^{-1}(0)| = 1$.
- Kvocijentno preslikavanje $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{S}^1$, $\sigma(x) = \exp(ix)$, nije razgranato natkrivanje jer $\sigma$ nije otvoreno preslikavanje.

**Problem**

Za dani par $(X, Y)$ naći ekvivalentnu formulaciju egzistencije razgranatog natkrivanja $\sigma : Y \to X$ u terminima pripadnih $C^*$-algebri $C(X)$ i $C(Y)$.

### Problem

Za dani par $(X, Y)$ naći ekvivalentnu formulaciju egzistencije razgranatog natkrivanja $\sigma : Y \to X$ u terminima pripadnih $C^*$-algebri $C(X)$ i $C(Y)$.

### Teorem (A. Pavlov i E. Troitsky, 2011)

*Par $(X, Y)$ dopušta razgranato natkrivanje $\sigma : Y \to X$ ako i samo ako postoji uvjetno očekivanje $E : C(Y) \to C(X)$ konačnog indeksa.*

### Problem

Za dani par $(X, Y)$ naći ekvivalentnu formulaciju egzistencije razgranatog natkrivanja $\sigma : Y \to X$ u terminima pripadnih $C^*$-algebri $C(X)$ i $C(Y)$.

### Teorem (A. Pavlov i E. Troitsky, 2011)

*Par $(X, Y)$ dopušta razgranato natkrivanje $\sigma : Y \to X$ ako i samo ako postoji uvjetno očekivanje $E : C(Y) \to C(X)$ konačnog indeksa.*

U svjetlu nekomutativne topologije, A. Pavlov i E. Troitsky uvode sljedeću definiciju:

### Definicija

**Nekomutativno razgranato natkrivanje** *je par $(A, B)$ koji se sastoji od unitalne $C^*$-algebre $A$ i njene unitalne $C^*$-podalgebre $B$ koji dopušta uvjetno očekivanje $E : A \to B$ konačnog indeksa.*

## Reinterpretacija u terminima $C(X)$-algebri

Ako je $\sigma : Y \to X$ neprekidna surjekcija, tada (kao što smo opisali) $C(Y)$ postaje $C(X)$-algebra preko

$$\psi_A(f) = f \circ \sigma \qquad (f \in C(X)).$$

Tada je:

- $\sigma$ otvoreno preslikavaje ako i samo je $C(Y)$ neprekidna $C(X)$-algebra.
- $\sup_{x \in X} |\sigma^{-1}(x)| < \infty$ ako i samo ako je $C(Y)$ subhomogena $C(X)$-algebra.

Dakle, ako je $A$ unitalna komutativna $C(X)$-algebra, tada je par $(A, C(X))$ nekomutativno razgranato natkrivanje, ako i samo ako je $A$ neprekidna subhomogena $C(X)$-algebra.

## Problem

- Vrijedi li isti rezultat za općenite (nekomutativne) $C(X)$-algebre $A$?
- Što je u tom slučaju $\mathrm{Ind}_w(A, C(X))$?

### Problem

- Vrijedi li isti rezultat za općenite (nekomutativne) $C(X)$-algebre $A$?
- Što je u tom slučaju $\mathrm{Ind}_w(A, C(X))$?

Najprije promotrimo najjednostavniji slučaj, kada je $X = *$. Tada je $C(X) = \mathbb{C}$ i svako uvjetno očekivanje s $A$ na $\mathbb{C} = \mathbb{C}1_A$ je naprosto stanje na $A$. U tom slučaju imamo sljedeći rezultat:

### Problem

- Vrijedi li isti rezultat za općenite (nekomutativne) $C(X)$-algebre $A$?
- Što je u tom slučaju $\mathrm{Ind}_w(A, C(X))$?

Najprije promotrimo najjednostavniji slučaj, kada je $X = *$. Tada je $C(X) = \mathbb{C}$ i svako uvjetno očekivanje s $A$ na $\mathbb{C} = \mathbb{C}1_A$ je naprosto stanje na $A$. U tom slučaju imamo sljedeći rezultat:

### Propozicija

*Neka je $A$ unitalna $C^*$-algebra. Tada je $\mathrm{Ind}_w(A, \mathbb{C}) < \infty$ ako i samo ako je $A$ konačno-dimenzionalna. Štoviše, u tom slučaju postoji jedinstveno stanje $\omega$ na $A$ takvo da je*

$$\mathrm{Ind}_w(A, \mathbb{C}) = \mathrm{Ind}_w(\omega) = r(A).$$

U općem slučaju smo uspjeli dokazati jedan smjer:

**Teorem (E. Blanchard & I.G., 2013)**

*Neka je $A$ unitalna $C(X)$-algebra. Ako je par $(A, C(X))$ nekomutativno razgranato natkrivanje, tada je $A$ nužno neprekidna subhomogena $C(X)$-algebra. Štoviše, u tom slučaju vrijedi $\mathrm{Ind}_w(A, C(X)) \geq r(A)$.*

U općem slučaju smo uspjeli dokazati jedan smjer:

**Teorem (E. Blanchard & I.G., 2013)**

*Neka je $A$ unitalna $C(X)$-algebra. Ako je par $(A, C(X))$ nekomutativno razgranato natkrivanje, tada je $A$ nužno neprekidna subhomogena $C(X)$-algebra. Štoviše, u tom slučaju vrijedi $\mathrm{Ind}_w(A, C(X)) \geq r(A)$.*

Također smo uspjeli dokazati obrat prethodnog teorema u sljedećim slučajevima:

**(a)** Za homogene $C(X)$-algebre $A$ (sva vlakna $A_x$ su $*$-izomorfna istoj konačno-dimenzionalnoj $C^*$-algebri). U dokazu esencijalno koristimo lokalnu trivijalnost od $A$.

**(b)** Za subhomogene $C(X)$-algebre $A$ ranga 2 (dakle, moguća vlakna od $A$ su $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^2$ i $\mathbb{M}_2$). Dokaz kojeg smo dali je karakterističan samo za slučaj $r(A) = 2$.

Štoviše, u oba ta slučaja vrijedi jednakost $\mathrm{Ind}_w(A, C(X)) = r(A)$.

Nadalje, kao direktnu posljedicu od (a) dobivamo:

**Korolar**

*Ako unitalnu $C(X)$-algebru $A$ možemo uložiti kao $C(X)$-podalgebru neke neprekidne homogene $C(X)$-algebre $B$, tada je $(A, C(X))$ nekomutativno razgranato natkrivanje i $r(A) \leq \mathrm{Ind}_w(A, C(X)) \leq r(B)$.*

Nadalje, kao direktnu posljedicu od (a) dobivamo:

### Korolar

*Ako unitalnu $C(X)$-algebru $A$ možemo uložiti kao $C(X)$-podalgebru neke neprekidne homogene $C(X)$-algebre $B$, tada je $(A, C(X))$ nekomutativno razgranato natkrivanje i $r(A) \leq \mathrm{Ind}_w(A, C(X)) \leq r(B)$.*

### Problem

Ako je $(A, C(X))$ nekomutativno razgranato natkrivanje, može li se $A$ uložiti kao $C(X)$-podalgebra neke neprekidne homogene $C(X)$-algebre?

Nadalje, kao direktnu posljedicu od (a) dobivamo:

**Korolar**

*Ako unitalnu $C(X)$-algebru $A$ možemo uložiti kao $C(X)$-podalgebru neke neprekidne homogene $C(X)$-algebre $B$, tada je $(A, C(X))$ nekomutativno razgranato natkrivanje i $r(A) \leq \mathrm{Ind}_w(A, C(X)) \leq r(B)$.*

**Problem**

Ako je $(A, C(X))$ nekomutativno razgranato natkrivanje, može li se $A$ uložiti kao $C(X)$-podalgebra neke neprekidne homogene $C(X)$-algebre?

Na žalost, NE:

- Našli smo primjer unitalne neprekidne $C(X)$-algebre $A$ ranga 2, gdje je $X$ Alexandrovljeva kompaktifikacija disjunktne unije $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}P^n$ $n$-dimenzionalnih kompleksnih projektivnih prostora, koja ne dopušta $C(X)$-ulaganje niti u jednu neprekidnu homogenu $C(X)$-algebru.
- S druge strane, prema (b) imamo $\mathrm{Ind}_w(A, C(X)) = 2$.