Derivacije na C^*-algebrama i lokalni multiplikatori

Ilja Gogić

Sveučilište u Zagrebu
PMF-Matematički odsjek

Matematički kolokvij
Sveučilište u Osijeku
11. travnja 2013.

C^*-algebarski pristup aksiomatskom opisu kvantne mehenike:

- Skup observabli kvantnog sistema opisan je hermitskim dijelom A_h C^*-algebre A.
- $*$-automorfizmi od A odgovaraju simetrijama.
- Reverzibilnu vremensku evoluciju kvantnog sistema (u Heisenbergovoj slici) opisuju jednoparametarske grupe $\{\Phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ $*$-automorfizama od A. Njihovi infinitezimalni generatori δ (tj. $\phi_t = \exp(it\delta)$, $t \in \mathbb{R}$) su $*$-derivacije.

C^*-algebarski pristup aksiomatskom opisu kvantne mehenike:

- Skup observabli kvantnog sistema opisan je hermitskim dijelom A_h C^*-algebre A.
- $*$-automorfizmi od A odgovaraju simetrijama.
- Reverzibilnu vremensku evoluciju kvantnog sistema (u Heisenbergovoj slici) opisuju jednoparametarske grupe $\{\Phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ $*$-automorfizama od A. Njihovi infinitezimalni generatori δ (tj. $\phi_t = \exp(it\delta)$, $t \in \mathbb{R}$) su $*$-derivacije.

Za dodatne informacije oko C^*-algebarskog pristupa kvantnoj mehanici upućujemo na knjigu F. Strocchi: "*An Introduction to the Mathematical Structure of Quantum Mechanics*", World Scientific Publishing Company; 2. izdanje, 2008.

C^*-algebarski pristup aksiomatskom opisu kvantne mehenike:

- Skup observabli kvantnog sistema opisan je hermitskim dijelom A_h C^*-algebre A.
- $*$-automorfizmi od A odgovaraju simetrijama.
- Reverzibilnu vremensku evoluciju kvantnog sistema (u Heisenbergovoj slici) opisuju jednoparametarske grupe $\{\Phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ $*$-automorfizama od A. Njihovi infinitezimalni generatori δ (tj. $\phi_t = \exp(it\delta)$, $t \in \mathbb{R}$) su $*$-derivacije.

Za dodatne informacije oko C^*-algebarskog pristupa kvantnoj mehanici upućujemo na knjigu F. Strocchi: "*An Introduction to the Mathematical Structure of Quantum Mechanics*", World Scientific Publishing Company; 2. izdanje, 2008.

Derivacije danas igraju bitnu ulogu u strukturalnoj teoriji C^*-algebri, posebno u teoriji kohomologije.

Definicija

C^*-**algebra** *je kompleksna Banachova* $*$*-algebra* A *čija norma zadovoljava tzv.* C^*-**svojstvo**

$$\|a^*a\| = \|a\|^2$$

za sve $a \in A$.

Definicija

C^*-**algebra** *je kompleksna Banachova* $*$*-algebra* A *čija norma zadovoljava tzv.* C^*-**svojstvo**

$$\|a^* a\| = \|a\|^2$$

za sve $a \in A$.

Primjer

Neka je X lokalno kompaktan Hausdorffov prostor i neka je $C_0(X)$ skup svih neprekidnih funkcija $f : X \to \mathbb{C}$ koje iščezavaju u ∞. Tada $C_0(X)$ uz operacije po točkama, involuciju $f^*(x) := \overline{f(x)}$ te sup-normu

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| \ : x \in X\}$$

dobiva strukturu komutativne C^*-algebre. Primijetimo da je $C_0(X)$ unitalna algebra ako i samo ako je X kompaktan prostor.

Primjer

Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor te neka je $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ skup svih ograničenih operatora na $\mathcal{H}$. Tada $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ uz uobičajene operacije, adjungiranje te operatorsku normu

$$\|a\| := \sup\{\|a\xi\| \ : \ \xi \in \mathcal{H}, \|\xi\| \leq 1\}$$

dobiva strukturu (nekomutativne) C^*-algebre.

Primjer

Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor te neka je $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ skup svih ograničenih operatora na $\mathcal{H}$. Tada $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ uz uobičajene operacije, adjungiranje te operatorsku normu

$$\|a\| := \sup\{\|a\xi\| \ : \ \xi \in \mathcal{H}, \|\xi\| \leq 1\}$$

dobiva strukturu (nekomutativne) C^*-algebre.

Morfizme u kategoriji C^*-algebri sačinjavaju tzv. $*$-**homomorfizmi**, tj. homomorfizmi algebri $\phi : A \to B$ koji čuvaju involuciju ($\phi(a^*) = \phi(a)^*$).

Propozicija

Neka je $\phi : A \to B$ $*$-homomorfizam između C^*-algebri A i B.

(i) *ϕ je kontrakcija (tj. $\|\phi(a)\| \leq \|a\|$ za sve $a \in A$).*

(ii) *$\phi(A)$ je C^*-podalgebra od B (naglasak na zatvorenosti).*

(iii) *ϕ je izometrija čim je ϕ injekcija.*

Propozicija

Neka je $\phi : A \to B$ $*$-homomorfizam između C^*-algebri A i B.

(i) *ϕ je kontrakcija (tj. $\|\phi(a)\| \leq \|a\|$ za sve $a \in A$).*

(ii) *$\phi(A)$ je C^*-podalgebra od B (naglasak na zatvorenosti).*

(iii) *ϕ je izometrija čim je ϕ injekcija.*

Definicija

Reprezentacija *C^*-algebre A je $*$-homomorfizam $\pi : A \to \mathbb{B}(\mathcal{H})$, gdje je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Pod dimenzijom* $\dim \pi$ *od π podrazumijevamo dimenziju od $\mathcal{H}$. Kažemo da je π:*

- **vjerna reprezentacija** *ako je π injekcija (=izometrija).*
- **ireducibilna reprezentacija** *ako π nema netrivijalnih invarijantnih potprostora (tj. ako je $\mathcal{K}$ (zatvoren) potprostor od $\mathcal{H}$ takav da je $\pi(A)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$, tada je nužno $\mathcal{K} = \{0\}$ ili $\mathcal{K} = \mathcal{H}$.*

Teorem (Geljfand-Naimarkov teorem)

Svaka C^*-algebra dopušta vjernu reprezentaciju.

Teorem (Geljfand-Naimarkov teorem)

Svaka C^*-algebra dopušta vjernu reprezentaciju.

Napomena

Radi prethodnog teorema, C^*-algebru A možemo (konkretno) definirati kao uniformno zatvorenu samoadjungiranu podalgebru od $\mathbb{B}(\mathcal{H})$, gdje je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor.

Teorem (Geljfand-Naimarkov teorem)

Svaka C^*-algebra dopušta vjernu reprezentaciju.

Napomena

Radi prethodnog teorema, C^*-algebru A možemo (konkretno) definirati kao uniformno zatvorenu samoadjungiranu podalgebru od $\mathbb{B}(\mathcal{H})$, gdje je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor.

Teorem (Komutativni Geljfand-Naimarkov teorem)

Ako je A komutativna C^*-algebra, tada postoji (do na homeomorfizam) jedinstven lokalno kompaktan Hausdorffov prostor X te $*$-izomorfizam $A \cong C_0(X)$.

Teorem (Geljfand-Naimarkov teorem)

Svaka C^*-algebra dopušta vjernu reprezentaciju.

Napomena

Radi prethodnog teorema, C^*-algebru A možemo (konkretno) definirati kao uniformno zatvorenu samoadjungiranu podalgebru od $\mathbb{B}(\mathcal{H})$, gdje je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor.

Teorem (Komutativni Geljfand-Naimarkov teorem)

Ako je A komutativna C^*-algebra, tada postoji (do na homeomorfizam) jedinstven lokalno kompaktan Hausdorffov prostor X te $*$-izomorfizam $A \cong C_0(X)$.

Napomena

Radi prethodnog teorema, teorija C^*-algebri se često smatra **nekomutativnom topologijom**.

Definicija

Von Neumannova algebra *je unitalna* C^**-podalgebra* $A \subseteq \mathbb{B}(\mathcal{H})$ *koja je zatvorena u jakoj/slaboj operatorskoj topologiji na* $\mathbb{B}(\mathcal{H})$.

Definicija

Von Neumannova algebra *je unitalna* C^**-podalgebra* $A \subseteq \mathbb{B}(\mathcal{H})$ *koja je zatvorena u jakoj/slaboj operatorskoj topologiji na* $\mathbb{B}(\mathcal{H})$.

Napomena

- U potrazi za apstraktnom definicijom von Neumannovih algebri, I. Kaplansky je 1951. godine uveo klasu AW^***-algebri**, koje se formalno mogu definirati kao C^*-algebre A čiji je desni anihilator svakog lijevog ideala oblika Ap, za neki projektor $p \in A$.
- Može se pokazati da je komutativna C^*-algebra $A = C_0(X)$ AW^*-algebra ako i samo ako je X kompaktan Hausdorffov ekstremno nepovezan prostor (eng. Stonean space).
- Nije teško vidjeti da je svaka von Neumannova algebra ujedno i AW^*-algebra, dok obrat općenito ne vrijedi (J. Dixmier je dokazao da je C^*-algebra ograničenih Borelovih funkcija na $\mathbb{R}$ modulo ideal funkcija koje iščezavaju izvan skupa prve kategorije komutativna AW^*-algebra koja nije von Neumannova algebra).

Teorem (Dixmier, Sakai)

C^*-algebra A je von Neumannova algebra ako i samo ako je A dualan Banachov prostor (tj. postoji Banachov prostor X takav da je $A \cong X^*$).

Teorem (Dixmier, Sakai)

C^*-algebra A je von Neumannova algebra ako i samo ako je A dualan Banachov prostor (tj. postoji Banachov prostor X takav da je $A \cong X^*$).

Bidual A^{**} C^*-algebre A uz Arensovo množenje postaje C^*-algebra. Prema prethodnom teoremu, A^{**} je u stvari von Neumannova algebra koja se zove **univerzalna omotačka von Neumannova algebra** od A.

Definicija

Derivacija *na algebri* A *je linearno preslikavanje* $\delta : A \to A$ *koje zadovoljava* **Leibnizovo pravilo**

$$\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y)$$

za sve $x, y \in A$.
Ako je A *podalgebra algebre* B, *tada svaki element* $a \in B$ *koji derivira* A *(tj.* $ax - xa \in A$, *za sve* $x \in A$*) implementira derivaciju* $\delta_a : A \to A$ *danu s*

$$\delta_a(x) := ax - xa.$$

Napomena

Ako je A C^*-algebra, tada svaka derivacija δ na A zadovoljava sljedeća svojstva:

(i) δ je automatski ograničena. Štoviše, δ je potpuno ograničena, pri čemu se njena cb-norma

$$\|\delta\|_{cb} := \sup\{\|\delta \otimes 1_n\| \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

podudara s $\|\delta\|$.

(ii) δ čuva ideale od A, tj. za svaki ideal I od A vrijedi $\delta(I) \subseteq I$ (pod idealom smatramo zatvoreni i obostrani ideal).

(iii) δ se poništava na centru od A, tj. $\delta(Z(A)) = \{0\}$. Specijalno, δ je $Z(A)$-modularno preslikavanje (tj. $\delta(za) = z\delta(a)$, $a \in A, z \in Z(A)$).

(iv) δ^{**} je jedinstveno proširenje od δ do derivacije na A^{**}.

- Za C^*-algebru A definiramo njenu **multiplikatorsku algebru** s

$$M(A) := \{a \in A^{**} \ : \ aA + Aa \subseteq A\}.$$

  Tada je $M(A)$ unitalna C^*-algebra, koja sadrži A kao **esencijalni ideal** (tj. A ima nenul presjek s bilo kojim nenul idealom u $M(A)$). Štoviše, $M(A)$ je najveća unitalna C^*-algebra koja sadrži A kao esencijalni ideal (tzv. **maksimalna unitizacija**).
- Svaka derivacija δ na A se može na jedinstven način proširiti do derivacije $\tilde{\delta}$ na $M(A)$. U stvari, $\tilde{\delta} = \delta^{**}|_{M(A)}$, pa je $\|\tilde{\delta}\| = \|\delta\|$.

Primjer

(i) Ako je $A = C_0(X)$ komutativna, tada je $M(A) = C_b(X) = C(\beta X)$, gdje je βX Stone-Čechovljeva kompaktifikacija od X.

(ii) $M(\mathbb{K}(\mathcal{H})) = \mathbb{B}(\mathcal{H})$, gdje je $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ C^*-algebra kompaktnih operatora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$.

Primjer

(i) Ako je $A = C_0(X)$ komutativna, tada je $M(A) = C_b(X) = C(\beta X)$, gdje je βX Stone-Čechovljeva kompaktifikacija od X.

(ii) $M(\mathbb{K}(\mathcal{H})) = \mathbb{B}(\mathcal{H})$, gdje je $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ C^*-algebra kompaktnih operatora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$.

Definicija

Za derivaciju δ na C^*-algebri A kažemo da je δ **unutrašnja** *ako postoji $a \in M(A)$ takav da je $\delta = \delta_a$.*

Primjer

(i) Ako je $A = C_0(X)$ komutativna, tada je $M(A) = C_b(X) = C(\beta X)$, gdje je βX Stone-Čechovljeva kompaktifikacija od X.

(ii) $M(\mathbb{K}(\mathcal{H})) = \mathbb{B}(\mathcal{H})$, gdje je $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ C^*-algebra kompaktnih operatora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$.

Definicija

Za derivaciju δ na C^*-algebri A kažemo da je δ **unutrašnja** *ako postoji $a \in M(A)$ takav da je $\delta = \delta_a$.*

Problem

Koje C^*-algebre dozvoljavaju samo unutrašnje derivacije?

Teorem

Odgovor je potvrdan za sljedeću klasu C^*-algebri:

(i) *von Neumannove algebre (Kadison-Sakai, 1966).*

(ii) *proste C^*-algebre (Sakai, 1968);*

(iii) *homogene C^*-algebre konačnog stupnja, tj. dimenzije svih ireducibilnih reprezentacija od A su iste konačne dimenzije n (unitalne, Sproston, 1976; neunitalne, G. 2012);*

(iv) *AW^*-algebre (Olesen, 1974);*

Teorem

Odgovor je potvrdan za sljedeću klasu C^*-algebri:

- **(i)** *von Neumannove algebre (Kadison-Sakai, 1966).*
- **(ii)** *proste C^*-algebre (Sakai, 1968);*
- **(iii)** *homogene C^*-algebre konačnog stupnja, tj. dimenzije svih ireducibilnih reprezentacija od A su iste konačne dimenzije n (unitalne, Sproston, 1976; neunitalne, G. 2012);*
- **(iv)** *AW^*-algebre (Olesen, 1974);*

Teorem (Akemann, Elliott, Pedersen, Tomiyama, 1979)

Ako je A separabilna C^*-algebra, tada A dopušta samo unutrašnje derivacije ako i samo ako je $A = A_1 \oplus A_2$, pri čemu je A_1 C^*-algebra s neprekidnim tragom, a A_2 direktna suma prostih C^*-algebri.

Napomena

Još uvijek nije poznata karakterizacija neseparabilnih C^*-algebri koje dopuštaju samo unutrašnje derivacije.

Napomena

Još uvijek nije poznata karakterizacija neseparabilnih C^*-algebri koje dopuštaju samo unutrašnje derivacije.

Problem

Ako je δ derivacija na C^*-algebri A, postoji li nužno postoji esencijalni ideal I u A takav da je restrikcija $\delta|_I$ unutrašnja derivacija?

Napomena

Još uvijek nije poznata karakterizacija neseparabilnih C^*-algebri koje dopuštaju samo unutrašnje derivacije.

Problem

Ako je δ derivacija na C^*-algebri A, postoji li nužno postoji esencijalni ideal I u A takav da je restrikcija $\delta|_I$ unutrašnja derivacija?

Odgovor na prethodno pitanje je općenito negativan (čak i za separabilne algebre), no kontraprimjeri nisu jednostavani. Ipak, vrijedi sljedeći slabiji rezultat:

Napomena

Još uvijek nije poznata karakterizacija neseparabilnih C^*-algebri koje dopuštaju samo unutrašnje derivacije.

Problem

Ako je δ derivacija na C^*-algebri A, postoji li nužno postoji esencijalni ideal I u A takav da je restrikcija $\delta|_I$ unutrašnja derivacija?

Odgovor na prethodno pitanje je općenito negativan (čak i za separabilne algebre), no kontraprimjeri nisu jednostavani. Ipak, vrijedi sljedeći slabiji rezultat:

Teorem (Pedersen, 1978)

Ako je A separabilna C^*-algebra, tada za svako $\epsilon > 0$ postoji esencijalan ideal I u A i element $a \in M(I)$ takav da je $\|(\delta - \delta_a)|_I\| < \epsilon$.

- Ako su I, J esencijalni ideali u A takvi da je $I \subseteq J$, tada vrijedi inkluzija multiplikatorskih algebri $M(J) \subseteq M(I)$.
- Neformalno, ukoliko formiramo "uniju" svih multiplikatorskih algebri $M(I)$, pri čemu I prolazi po skupu $\mathrm{Id}_{ess}(A)$ svih esencijalnih ideala u A, dolazimo do **ograničene simetrične algebre kvocijenata** $Q_b(A)$ od A.
- $Q_b(A)$ ima prirodnu strukturu pred-C^*-algebre.
- Upotpunjenjem od $Q_b(A)$ dolazimo do C^*-algebre $M_{\mathrm{loc}}(A)$ koja se zove **lokalna multiplikatorska algebra** od A.

- Ako su I, J esencijalni ideali u A takvi da je $I \subseteq J$, tada vrijedi inkluzija multiplikatorskih algebri $M(J) \subseteq M(I)$.
- Neformalno, ukoliko formiramo "uniju" svih multiplikatorskih algebri $M(I)$, pri čemu I prolazi po skupu $\mathrm{Id}_{ess}(A)$ svih esencijalnih ideala u A, dolazimo do **ograničene simetrične algebre kvocijenata** $Q_b(A)$ od A.
- $Q_b(A)$ ima prirodnu strukturu pred-C^*-algebre.
- Upotpunjenjem od $Q_b(A)$ dolazimo do C^*-algebre $M_{\mathrm{loc}}(A)$ koja se zove **lokalna multiplikatorska algebra** od A.

Definicija

Formalno:

$$Q_b(A) := (\mathrm{alg}-) \varinjlim \{M(I) \ : \ I \in \mathrm{Id}_{ess}(A)\},$$

$$M_{\mathrm{loc}}(A) := (C^*-) \varinjlim \{M(I) \ : \ I \in \mathrm{Id}_{ess}(A)\}.$$

Primjer

Općenito $M_{\mathrm{loc}}(A)$ je vrlo teško eksplictitno opisati, čak i u slučajevima kada je A jednostavnog oblika. Poznato je:

(i) Ako je $A = C_0(X)$ komutativna, tada je $M_{\mathrm{loc}}(A) = C(\varprojlim \beta U)$, gdje je $\varprojlim \beta U$ inverzni limes Stone-Čechovljevih kompaktifikacija βU, pri čemu U prolazi po svim otvorenim gustim podskupovima U od X. Nadalje, $M_{\mathrm{loc}}(A)$ je (komutativna) AW^*-algebra.

(ii) Ako je A prosta, tada je (očito) $M_{\mathrm{loc}}(A) = M(A)$.

(iii) Ako je A AW^*-algebra, tada je $M_{\mathrm{loc}}(A) = A$.

Propozicija

Svaka derivacija δ *na* C^**-algebri* A *može se na jedinstven način proširiti do derivacije* $\overline{\delta}$ *na* $M_{\mathrm{loc}}(A)$*. Nadalje, vrijedi* $\|\overline{\delta}\| = \|\delta\|$*.*

Propozicija

Svaka derivacija δ na C^*-algebri A može se na jedinstven način proširiti do derivacije $\overline{\delta}$ na $M_{\mathrm{loc}}(A)$. Nadalje, vrijedi $\|\overline{\delta}\| = \|\delta\|$.

Teorem (Pedersen, 1978)

Svaka derivacija δ na separabilnoj C^*-algebri je implementirana s lokalnim multiplikatorom (tj. $\overline{\delta} = \delta_a$ za neko $a \in M_{\mathrm{loc}}(A)$). Štoviše, element a koji implementira $\overline{\delta}$ se može odabrati tako da vrijedi $\|\delta\| = 2\|a\|$.

Propozicija

Svaka derivacija δ na C^*-algebri A može se na jedinstven način proširiti do derivacije $\overline{\delta}$ na $M_{\mathrm{loc}}(A)$. Nadalje, vrijedi $\|\overline{\delta}\| = \|\delta\|$.

Teorem (Pedersen, 1978)

Svaka derivacija δ na separabilnoj C^*-algebri je implementirana s lokalnim multiplikatorom (tj. $\overline{\delta} = \delta_a$ za neko $a \in M_{\mathrm{loc}}(A)$). Štoviše, element a koji implementira $\overline{\delta}$ se može odabrati tako da vrijedi $\|\delta\| = 2\|a\|$.

Napomena

Pedersenov teorem vrijedi i za širu klasu C^*-algebri u kojima je svaki esencijalni ideal σ-unitalan. Specijalno, Pedersenov teorem implicira Sakaijev teorem da je svaka derivacija proste C^*-algebre unutrašnja. Ipak, većina von Neumannovih (odn. AW^*-algebri) ne zadovoljava prethodni uvjet, pa je prirodno postaviti sljedeće pitanje:

Problem (Pedersen, 1978)

Vrijedi li prethodni rezultati i za neseparabilne C^*-algebre, tj. da li je svaka derivacija (neseparabilne) C^*-algebre A implementirana s lokalnim multiplikatorom?

Problem (Pedersen, 1978)

Vrijedi li prethodni rezultati i za neseparabilne C^*-algebre, tj. da li je svaka derivacija (neseparabilne) C^*-algebre A implementirana s lokalnim multiplikatorom?

Teorem (G., 2012, prihvaćeno u PAMS)

Ako je A subhomogena C^*-algebra (tj. dimenzije svih ireducibilnih reprezentacija od A su konačne i odozgo omeđene), tada postoji esencijalni ideal I u A takav da za svaku derivaciju δ na A postoji element $a \in M(I)$ takav da je $\delta|_I = \delta_a$ i $\|\delta\| = 2\|a\|$. Specijalno, svaka derivacija subhomogene C^*-algebre je implementirana s lokalnim multiplikatorom.

Štoviše, nedavno sam dobio i konkretan opis od $M_{\mathrm{loc}}(A)$ za sljedeću klasu C^*-algebri (koja uključuje sve subhomogene):

Teorem (G., 2012, na recenziji u JMAA)

Ako su sve ireducibilne reprezentacije C^*-algebre A konačnodimenzionalne tada je

$$M_{\mathrm{loc}}(A) \cong \prod_{n=1}^{\infty} C(X_n) \otimes \mathrm{M}_n(\mathbb{C}),$$

pri čemu je svaki prostor X_n kompaktan Hausdorffov i ekstremno nepovezan. Specijalno, $M_{\mathrm{loc}}(A)$ je AW^*-algebra tipa I.

Korolar

Ako su sve ireducibilne reprezentacije od A konačnodimenzionalne, tada vrijedi:

(i) *Svaka derivacija od A je implementirana s lokalnim multiplikatorom;*

(ii) *Svaki $*$-automorfizam σ od A koji je identiteta na $Z(A)$ je implementiran s lokalnim multiplikatorom, tj. postoji unitarni element $u \in M_{\mathrm{loc}}(A)$ takav da je $\sigma(x) = uxu^*$ $(x \in A)$.*

Korolar

Ako su sve ireducibilne reprezentacije od A konačnodimenzionalne, tada vrijedi:

(i) *Svaka derivacija od A je implementirana s lokalnim multiplikatorom;*

(ii) *Svaki $*$-automorfizam σ od A koji je identiteta na $Z(A)$ je implementiran s lokalnim multiplikatorom, tj. postoji unitarni element $u \in M_{\mathrm{loc}}(A)$ takav da je $\sigma(x) = uxu^*$ $(x \in A)$.*

Napomena

Dobiveni rezultati se posebno mogu primijeniti na grupovne C^*-algebre $C^*(G)$, pri čemu je G kompaktna (Hausdorffova) grupa.

Iduću širu klasu C^*-algebri koju valja ispitati su sve liminalne C^*-algebre. No tu već postoje bitne razlike:

Iduću širu klasu C^*-algebri koju valja ispitati su sve liminalne C^*-algebre. No tu već postoje bitne razlike:

Primjer (Argerami, Farenick i Massey, 2009)

Za $A := C([0,1]) \otimes \mathbb{K}(\mathcal{H})$ ($\mathcal{H}$ separabilan) vrijedi $M_{\mathrm{loc}}(M_{\mathrm{loc}}(A)) \neq M_{\mathrm{loc}}(A)$. Specijalno $M_{\mathrm{loc}}(A)$ nije AW^*-algebra.

Iduću širu klasu C^*-algebri koju valja ispitati su sve liminalne C^*-algebre. No tu već postoje bitne razlike:

Primjer (Argerami, Farenick i Massey, 2009)

Za $A := C([0,1]) \otimes \mathbb{K}(\mathcal{H})$ ($\mathcal{H}$ separabilan) vrijedi $M_{\mathrm{loc}}(M_{\mathrm{loc}}(A)) \neq M_{\mathrm{loc}}(A)$. Specijalno $M_{\mathrm{loc}}(A)$ nije AW^*-algebra.

Teorem (Ara i Matheiu, 2011)

Ako je X savršen, separabilan i lokalno kompaktan Hausdorffov prostor te $A := C_0(X) \otimes B$, gdje je B neunitalna separabilna prosta C^*-algebra, tada je $M_{\mathrm{loc}}(M_{\mathrm{loc}}(A)) \neq M_{\mathrm{loc}}(A)$.

Iduću širu klasu C^*-algebri koju valja ispitati su sve liminalne C^*-algebre. No tu već postoje bitne razlike:

Primjer (Argerami, Farenick i Massey, 2009)

Za $A := C([0,1]) \otimes \mathbb{K}(\mathcal{H})$ ($\mathcal{H}$ separabilan) vrijedi $M_{\mathrm{loc}}(M_{\mathrm{loc}}(A)) \neq M_{\mathrm{loc}}(A)$. Specijalno $M_{\mathrm{loc}}(A)$ nije AW^*-algebra.

Teorem (Ara i Matheiu, 2011)

Ako je X savršen, separabilan i lokalno kompaktan Hausdorffov prostor te $A := C_0(X) \otimes B$, gdje je B neunitalna separabilna prosta C^*-algebra, tada je $M_{\mathrm{loc}}(M_{\mathrm{loc}}(A)) \neq M_{\mathrm{loc}}(A)$.

Problem (Pedersen)

Kada vrijedi $M_{\mathrm{loc}}(M_{\mathrm{loc}}(A)) = M_{\mathrm{loc}}(A)$?

S druge strane, svaka derivacija na C^*-algebri A je potpuno ograničena, čuva ideale od A te je $Z(M(A))$-bimodularna. Stereotip operatora s tim svojstvima su tzv. **elementarni operatori**, koji su po definiciji konačne sume operatora obostranog množenja $M_{a,b} : x \mapsto axb$ $(a, b \in M(A))$.

S druge strane, svaka derivacija na C^*-algebri A je potpuno ograničena, čuva ideale od A te je $Z(M(A))$-bimodularna. Stereotip operatora s tim svojstvima su tzv. **elementarni operatori**, koji su po definiciji konačne sume operatora obostranog množenja $M_{a,b} : x \mapsto axb$ $(a, b \in M(A))$.

Radi toga je prirodno pitati se može li se svaka derivacija na C^*-algebri po volji dobro cb-aproksimirati s elementarnim operatorima.

S druge strane, svaka derivacija na C^*-algebri A je potpuno ograničena, čuva ideale od A te je $Z(M(A))$-bimodularna. Stereotip operatora s tim svojstvima su tzv. **elementarni operatori**, koji su po definiciji konačne sume operatora obostranog množenja $M_{a,b} : x \mapsto axb$ $(a, b \in M(A))$.

Radi toga je prirodno pitati se može li se svaka derivacija na C^*-algebri po volji dobro cb-aproksimirati s elementarnim operatorima.

Teorem (G., 2011, prihvaćeno u PEMS)

Neka je A C^*-algebra i δ derivacija na A. Ako je $\overline{\delta}$ jedinstveno proširenje od δ do derivacije na $M_{\mathrm{loc}}(A)$, tada je ekvivalentno:

(i) *$\overline{\delta}$ je unutrašnja (tj. δ je implementirana s lokalnim multiplikatorom);*

(ii) *$\overline{\delta}$ dopušta cb-aproksimaciju s elementarnim operatorima.*