Primjene fibriranih svežnjeva u C^*-algebrama

Ilja Gogić

PMF-MO, Sveučilište u Zagrebu &
PMF-DMI, Univerzitet u Novom Sadu

Seminar za geometriju, obrazovanje i vizualizaciju sa primenama
Matematički institut SANU
Beograd, 21. novembra 2013.

Neka je X LCH (lokalno kompaktan Hausdorffov) prostor i neka je $C_0(X)$ skup svih neprekidnih funkcija $f : X \to \mathbb{C}$ koje trnu u ∞, tj. za svako $\varepsilon > 0$ postoji kompaktan podskup $K \subseteq X$ takav da je $|f(x)| < \varepsilon$ za sve $x \in X \setminus K$.

- $C_0(X)$ postaje kompleksna $*$-algebra uz standardne operacije po točkama

$$(\alpha f)(x) := \alpha \cdot f(x)$$

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$$

  i involuciju

$$f^*(x) := \overline{f(x)},$$

  gdje su $f, g \in C_0(X)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ te $x \in X$.

- $C_0(X)$ možemo opskrbiti sa sup-normom

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| \ : \ x \in X\},$$

s obzirom na koju $C_0(X)$ postaje Banachov prostor.

- Sup-norma je očito submultiplikativna, tj.

$$\|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

Drugim riječima, $C_0(X)$ je uz sup-normu Banachova algebra.

- Ukoliko uzmemo u obzir i involuciju, sup-norma zadovoljava i sljedeće, tzv. C^*-svojstvo:

$$\|f^* \cdot f\|_\infty = \|f\|_\infty^2.$$

s obzirom na koju $C_0(X)$ postaje Banachov prostor.

- Sup-norma je očito submultiplikativna, tj.

$$\|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

Drugim riječima, $C_0(X)$ je uz sup-normu Banachova algebra.

- Ukoliko uzmemo u obzir i involuciju, sup-norma zadovoljava i sljedeće, tzv. C^*-svojstvo:

$$\|f^* \cdot f\|_\infty = \|f\|_\infty^2.$$

Napomena

Algebra $C_0(X)$ je komutativna, tj. vrijedi $f \cdot g = g \cdot f$ za sve $f, g \in C_0(X)$.

s obzirom na koju $C_0(X)$ postaje Banachov prostor.

- Sup-norma je očito submultiplikativna, tj.

$$\|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

Drugim riječima, $C_0(X)$ je uz sup-normu Banachova algebra.

- Ukoliko uzmemo u obzir i involuciju, sup-norma zadovoljava i sljedeće, tzv. C^*-svojstvo:

$$\|f^* \cdot f\|_\infty = \|f\|_\infty^2.$$

Napomena

Algebra $C_0(X)$ je komutativna, tj. vrijedi $f \cdot g = g \cdot f$ za sve $f, g \in C_0(X)$.

Što dobivamo ako ispustimo komutativnost?

Definicija

C^*-**algebra** *je kompleksna Banachova* $*$*-algebra* A *čija norma* $\|\cdot\|$ *zadovoljava* C^**-svojstvo. Drugim riječima:*

- *A je algebra nad* $\mathbb{C}$.
- *A je opskrbljena s involucijom, tj. s preslikavanjem* $\square^* : A \to A$, $a \mapsto a^*$, *koje zadovoljava sljedeća svojstva:*

  $$(\alpha a + \beta b)^* = \overline{\alpha} a^* + \overline{\beta} b^*, \quad (ab)^* = b^* a^*, \quad te \quad (a^*)^* = a,$$

  za sve $a, b \in A$ *i* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
- *A je uz normu* $\|\cdot\|$ *normirana algebra, tj. vrijedi*

  $$\|a \cdot b\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$$

  za sve $a, b \in A$.
- *A je s obzirom na normu* $\|\cdot\|$ *Banachov prostor.*

Definicija (Nastavak)

- *Norma* $\|\cdot\|$ *zadovoljava* C^*-**svojstvo**, *tj. vrijedi*

$$\|a^*a\| = \|a\|^2$$

za sve $a \in A$.

Definicija (Nastavak)

- *Norma* $\|\cdot\|$ *zadovoljava* C^*-**svojstvo**, *tj. vrijedi*

$$\|a^*a\| = \|a\|^2$$

za sve $a \in A$.

Morfizme u kategoriji C^*-algebri sačinjavaju tzv. $*$-**homomorfizmi**, tj. multiplikativna linearna preslikavanja $\phi : A \to B$ koja čuvaju involuciju.

Definicija (Nastavak)

- *Norma $\|\cdot\|$ zadovoljava C^*-**svojstvo**, tj. vrijedi*

$$\|a^*a\| = \|a\|^2$$

za sve $a \in A$.

Morfizme u kategoriji C^*-algebri sačinjavaju tzv. $*$-**homomorfizmi**, tj. multiplikativna linearna preslikavanja $\phi : A \to B$ koja čuvaju involuciju.

Propozicija

Neka je $\phi : A \to B$ $*$-homomorfizam između C^*-algebri A i B.

- *ϕ je kontrakcija (tj. $\|\phi(a)\| \leq \|a\|$ za sve $a \in A$).*
- *$\phi(A)$ je C^*-podalgebra od B (naglasak na zatvorenosti).*
- *Ako je ϕ injekcija, tada je ϕ izometrija.*

C^*-algebre i kvantna mehanika

U kvantnoj mehanici se fizikalni sistem obično opisuje s unitalnom C^*-algebrom A. Pritom:

- **Observable** čini skup svih hermitskih elemenata u A (tj. elementi $a \in A$ za koje je $a^* = a$); one predstavljaju izmjerive vrijednosti sistema A.
- **Stanja** na A su definirana kao pozitivni funkcionali na A (tj. linearna preslikavanja $\omega : A \to \mathbb{C}$ koja zadovoljavaju $\omega(a^*a) \geq 0$ za sve $a \in A$) za koje je $\omega(1_A) = 1$.
- Ako je sistem u stanju ω, tada je $\omega(a)$ očekivana vrijednost observable a.

Ovakav C^*-algebarski pristup se koristi u Haag-Kastlerovoj aksiomatizaciji lokalne kvantne teorije polja, gdje je svakom otvorenom podskupu prostorno vremenskog kontinuuma Minkowskog pridružena neka C^*-algebra.

Primjer

Ako je X LCH prostor, tada je $C_0(X)$ (uz sup-normu) komutativna C^*-algebra. Algebra $C_0(X)$ je unitalna ako i samo ako je X kompaktan prostor. U tom slučaju je $C_0(X) = C(X)$.

Primjer

Ako je X LCH prostor, tada je $C_0(X)$ (uz sup-normu) komutativna C^*-algebra. Algebra $C_0(X)$ je unitalna ako i samo ako je X kompaktan prostor. U tom slučaju je $C_0(X) = C(X)$.

Neka je sada A općenita unitalna komutativna C^*-algebra.

- Označimo s $X = X(A)$ prostor svih **karaktera** na A, tj. skup svih unitalnih multiplikativnih linearnih funkcionala $\chi : A \to \mathbb{C}$.
- Svaki karakter χ na A je ograničen s $\|\chi\| = 1$, pa imamo $X \subseteq \mathrm{Ball}(A^*)$. Štoviše, X je w^*-zatvoren podskup od $\mathrm{Ball}(A^*)$, pa je kao takav kompaktan (Banach-Alaogluov teorem).
- Za $a \in A$ definirajmo funkciju $\hat{a} : X \to \mathbb{C}$ s $\hat{a}(\chi) := \chi(a)$. Tada je $\hat{a} \in C(X)$ za sve $a \in A$.
- **Geljfandova transformacija** od A je funkcija $\mathcal{G}_A : A \to C(X)$ definirana s $\mathcal{G}(a) := \hat{a}$.

Teorem (komutativni Geljfand-Naimarkov teorem)

Ako je A unitalna komutativna C^*-algebra, tada je Geljfandova transofmacija $\mathcal{G}_A$ izometrički $*$-izomorfizam s A na $C(X(A))$.

Teorem (komutativni Geljfand-Naimarkov teorem)

Ako je A unitalna komutativna C^*-algebra, tada je Geljfandova transofmacija $\mathcal{G}_A$ izometrički $*$-izomorfizam s A na $C(X(A))$.

U terminima teorije kategorija:

- Neka je **CH** kategorija čiji su objekti svi kompaktni Hausdorffovi prostori, a morfizmi neprekidne funkcije.
- Neka je **UKC*** kategorija čiji su objekti sve unitalne komutativne C^*-algebre, a morfizmi unitalni $*$-homomorfizmi.
- Definirajmo dva kontravarijantna funktora $C : \mathbf{CH} \rightsquigarrow \mathbf{UKC}^*$ i $X : \mathbf{UKC}^* \rightsquigarrow \mathbf{CH}$ na sljedeći način:
  - ▷ Funktor C prevodi CH prostor X u unitalnu komutativnu C^*-algebru $C(X)$, a neprekidnu funkciju $F : X \to Y$ u unitalni $*$-homomorfizam $C(F) : C(Y) \to C(X)$, $C(F)(f) := f \circ F$.
  - ▷ Funktor X prevodi unitalnu komutativnu C^*-algebru A u CH prostor $X(A)$, a unitalni $*$-homomorfizam $\phi : A \to B$ u neprekidnu funkciju $X(\phi) : X(B) \to X(A)$, $X(\phi)(\chi) := \chi \circ \phi$.

U terminima teorije kategorija (nastavak):

Za $x \in X$ označimo s ϵ_x pripadni evaluacijski karakter na $C(X)$, $\epsilon_x : f \mapsto f(x)$ i definirajmo preslikavanje $\epsilon_X : X \to X(C(X))$ s $\epsilon_X : x \mapsto \epsilon_X$. Tada se lako provjeri da sljedeći dijagrami komutiraju:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle \epsilon_X} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_Y} \\ X(C(X)) & \xrightarrow{X(C(f))} & X(C(Y)) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \downarrow{\scriptstyle \mathcal{G}_A} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{G}_B} \\ C(X(A)) & \xrightarrow{C(X(\phi))} & C(X(B)) \end{array}$$

U terminima teorije kategorija (nastavak):

Za $x \in X$ označimo s ϵ_x pripadni evaluacijski karakter na $C(X)$, $\epsilon_x : f \mapsto f(x)$ i definirajmo preslikavanje $\epsilon_X : X \to X(C(X))$ s $\epsilon_X : x \mapsto \epsilon_X$. Tada se lako provjeri da sljedeći dijagrami komutiraju:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \epsilon_X} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \epsilon_Y} \\ X(C(X)) & \xrightarrow{X(C(f))} & X(C(Y)) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{G}_A} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{G}_B} \\ C(X(A)) & \xrightarrow{C(X(\phi))} & C(X(B)) \end{array}$$

Korolar

$X \circ C \cong \mathrm{id}_{\mathbf{CH}}$ i $C \circ X \cong \mathrm{id}_{\mathbf{UKC}^*}$ (prirodni izomorfizam funktora). Dakle, kategorije **CH** *i* $\mathbf{UKC}^*$ *su međusobno dualne.*

Pitanje

Možemo li ovu dualnost proširiti do dualnosti između kategorija **LCH** lokalno kompaktnih Hausdorffovih prostora i $\mathbf{KC}^*$ komutativnih C^*-algebri?

Pitanje

Možemo li ovu dualnost proširiti do dualnosti između kategorija **LCH** lokalno kompaktnih Hausdorffovih prostora i $\mathbf{KC}^*$ komutativnih C^*-algebri?

Odgovor

Možemo, no trebamo biti oprezni pri izboru odgovarajućih morfizama. Naime ako za morfizme u **LCH** uzmemo pravilna neprekidna preslikavanja, a za morfizme u $\mathbf{KC}^*$ nedegenerirane $*$-homomorfizme, tada se može pokazati da su kategorije **LCH** i $\mathbf{KC}^*$ zaista dualne.

Pitanje

Možemo li ovu dualnost proširiti do dualnosti između kategorija **LCH** lokalno kompaktnih Hausdorffovih prostora i $\mathbf{KC}^*$ komutativnih C^*-algebri?

Odgovor

Možemo, no trebamo biti oprezni pri izboru odgovarajućih morfizama. Naime ako za morfizme u **LCH** uzmemo pravilna neprekidna preslikavanja, a za morfizme u $\mathbf{KC}^*$ nedegenerirane $*$-homomorfizme, tada se može pokazati da su kategorije **LCH** i $\mathbf{KC}^*$ zaista dualne.

Zaključak

Dakle, prelaskom s LCH prostora X na funkcijsku algebru $C_0(X)$ nije izgubljena niti jedna topološka informacija prostora X. Radi toga, mnoge topološke pojmove, svojstva i konstrukcije možemo formulirati u terminima C^*-algebri, bez pozivanja na komutativnost ili na inherentni prostor. Na taj način dobivamo njihove direktne (nekomutativne) generalizacije. Neki od tih primjera su ilustrirani sljedećom tablicom.

TOPOLOGIJA	C^*-ALGEBRE
otvoren podskup	zatvoren ideal
otvoren gust podskup	esencijalni zatovren ideal
zatvoren podskup	kvocijentna algebra
homeomorfizam	$*$-automorfizam
kompaktnost	unitalnost
povezanost	algebra bez projektora
Kartezijev produkt	prostorni tenzorski produkt
kompaktifikacija	unitizacija
vjerojatnosna mjera	stanje
Lebesgueova dimenzija	nuklearna dimenzija
topološka K-teorija	K-teorija za C^*-algebre

TOPOLOGIJA	C^*-ALGEBRE
otvoren podskup	zatvoren ideal
otvoren gust podskup	esencijalni zatovren ideal
zatvoren podskup	kvocijentna algebra
homeomorfizam	$*$-automorfizam
kompaktnost	unitalnost
povezanost	algebra bez projektora
Kartezijev produkt	prostorni tenzorski produkt
kompaktifikacija	unitizacija
vjerojatnosna mjera	stanje
Lebesgueova dimenzija	nuklearna dimenzija
topološka K-teorija	K-teorija za C^*-algebre

Radi toga na nekomutativne C^*-algebre možemo gledati kao na algebre funkcija na "nekomutativnim prostorima", koji ne postoje u klasičnom smislu. U tom kontekstu se teorija C^*-algebri smatra **nekomutativnom topologijom**.

Osnovni primjeri C^*-algebri

- Matrične algebre $\mathbb{M}_n = M_n(\mathbb{C})$ nad $\mathbb{C}$ s euklidskom operatorskom normom su C^*-algebre. Štoviše, svaka konačno-dimenzionalna C^*-algebra je (do na $*$-izomorfizam) konačna direktna suma matričnih algebri.
- Algebra $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ svih ograničenih operatora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ je C^*-algebra uz uobičajene operacije, adjungiranje te operatorsku normu.
- Ako je A C^*-algebra i X LCH prostor, tada je $C_0(X, A)$ C^*-algebra uz operacije po točkama i sup-normu.
- Svakoj lokalno kompaktnoj grupi G možemo pridružiti C^*-algebru $C^*(G)$. Sve o teoriji reprezentacija od G je kodirano u $C^*(G)$.
- **Topološki dinamički sistem** se sastoji od kompaktnog prostora X, lokalno kompaktne grupe G i neprekidnog djelovanja grupa $\alpha : G \curvearrowright X$. Takvoj trojci (X, α, G) možemo pridružiti transformacijsku grupovnu C^*-algebru $C(X) \rtimes_\alpha G$.

Definicija

Reprezentacija *C^*-algebre A je $*$-homomorfizam $\pi : A \to \mathbb{B}(\mathcal{H}_\pi)$, gdje je $\mathcal{H}_\pi$ Hilbertov prostor. Pod dimenzijom od π podrazumijevamo dimenziju od $\mathcal{H}_\pi$. Za reprezentaciju π kažemo da je:*

- **vjerna** *ako je π injekcija (izometrija).*
- **ireducibilna** *ako π nema netrivijalnih invarijantnih potprostora, tj. ako je $\mathcal{K}$ (zatvoren) potprostor od $\mathcal{H}_\pi$ takav da je $\pi(A)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$, tada je nužno $\mathcal{K} = \{0\}$ ili $\mathcal{K} = \mathcal{H}_\pi$.*

Definicija

Reprezentacija *C^*-algebre A je $*$-homomorfizam $\pi : A \to \mathbb{B}(\mathcal{H}_\pi)$, gdje je $\mathcal{H}_\pi$ Hilbertov prostor. Pod dimenzijom od π podrazumijevamo dimenziju od $\mathcal{H}_\pi$. Za reprezentaciju π kažemo da je:*

- **vjerna** *ako je π injekcija (izometrija).*
- **ireducibilna** *ako π nema netrivijalnih invarijantnih potprostora, tj. ako je $\mathcal{K}$ (zatvoren) potprostor od $\mathcal{H}_\pi$ takav da je $\pi(A)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$, tada je nužno $\mathcal{K} = \{0\}$ ili $\mathcal{K} = \mathcal{H}_\pi$.*

Teorem (Nekomutativni Geljfand-Naimarkov teorem)

Svaka C^*-algebra dopušta vjernu reprezentaciju.

Definicija

Reprezentacija *C^*-algebre A je $*$-homomorfizam $\pi : A \to \mathbb{B}(\mathcal{H}_\pi)$, gdje je $\mathcal{H}_\pi$ Hilbertov prostor. Pod dimenzijom od π podrazumijevamo dimenziju od $\mathcal{H}_\pi$. Za reprezentaciju π kažemo da je:*

- **vjerna** *ako je π injekcija (izometrija).*
- **ireducibilna** *ako π nema netrivijalnih invarijantnih potprostora, tj. ako je $\mathcal{K}$ (zatvoren) potprostor od $\mathcal{H}_\pi$ takav da je $\pi(A)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$, tada je nužno $\mathcal{K} = \{0\}$ ili $\mathcal{K} = \mathcal{H}_\pi$.*

Teorem (Nekomutativni Geljfand-Naimarkov teorem)

Svaka C^*-algebra dopušta vjernu reprezentaciju.

Napomena

Radi prethodnog teorema, C^*-algebru možemo (konkretno) definirati kao uniformno zatvorenu samoadjungiranu podalgebru od $\mathbb{B}(\mathcal{H})$, gdje je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor.

Definicija

Neka je A C^*-algebra.

- *Za ideal P u A kažemo da je* **primitivan** *ako je on jezgra neke ireducibilne reprezentacije od A. Skup svih primitivnih ideala u A označavamo s $\mathrm{Prim}(A)$.*
- $\mathrm{Prim}(A)$ *opskrbljujemo s* **Jacobsonovom topologijom***: Otvorene skupove u $\mathrm{Prim}(A)$ čine skupovi oblika*

$$\{P \in \mathrm{Prim}(A) \ : \ I \not\subseteq P\},$$

  gdje I prolazi po skupu obostranih zatvorenih ideala u A.

Za $\mathrm{Prim}(A)$ snabdjeven s Jacobsonovom topologijom kažemo da je **primitivni spektar** *od A.*

Primjer

Neka je $A = C_0(X)$, gdje je X LCH prostor. Za točku $x \in X$ stavimo $C_x(X) := \{f \in C_0(X) \ : \ f(x) = 0\}$. Tada je

$$\mathrm{Prim}(C_0(X)) = \{C_x(X) \ : \ x \in X\}.$$

Nadalje podskup $F \subseteq X$ je zatvoren u X ako i samo ako je pripadni podskup $\{C_x(X) \ : \ x \in F\}$ zatvoren u $\mathrm{Prim}(C_0(X))$.

Primjer

Neka je $A = C_0(X)$, gdje je X LCH prostor. Za točku $x \in X$ stavimo $C_x(X) := \{f \in C_0(X) \ : \ f(x) = 0\}$. Tada je

$$\mathrm{Prim}(C_0(X)) = \{C_x(X) \ : \ x \in X\}.$$

Nadalje podskup $F \subseteq X$ je zatvoren u X ako i samo ako je pripadni podskup $\{C_x(X) \ : \ x \in F\}$ zatvoren u $\mathrm{Prim}(C_0(X))$.

Napomena

- $\mathrm{Prim}(A)$ je uvijek lokalno kompaktan T_0-prostor. No općenito, $\mathrm{Prim}(A)$ ne mora biti T_1.
- Ako je C^*-algebra A unitalna, tada je $\mathrm{Prim}(A)$ kompaktan. Obrat općenito ne vrijedi.

Ako je A C^*-algebra bez jedinice, tada A možemo na nekoliko načina uložiti u unitalnu C^*-algebru koja sadrži A kao esencijalni ideal. Najveća među njima je tzv. **multiplikatorska algebra** $M(A)$. Ona je nekomutativni analogon Stone-Čechovljeve kompaktifikacije.

Ako je A C^*-algebra bez jedinice, tada A možemo na nekoliko načina uložiti u unitalnu C^*-algebru koja sadrži A kao esencijalni ideal. Najveća među njima je tzv. **multiplikatorska algebra** $M(A)$. Ona je nekomutativni analogon Stone-Čechovljeve kompaktifikacije.

Svaka C^*-algebra A postaje modul nad algebrom $C_b(\mathrm{Prim}(A))$ ograničenih neprekidnih kompleksnih funkcija na $\mathrm{Prim}(A)$. O tome govori sljedeći bitan teorem:

Teorem (Dauns-Hofmannov teorem)

Neka je A C^*-algebra. Tada postoji jedinstven $*$-izomorfizam Φ_A s $C_b(\mathrm{Prim}(A))$ na centar $ZM(A)$ od $M(A)$ takav da vrijedi

$$\Phi_A(f)a + P = f(P)(a + P) \qquad (\textit{jednakost u } A/P)$$

za sve $f \in C_b(\mathrm{Prim}(A))$, $a \in A$ i $P \in \mathrm{Prim}(A)$.

Definicija

Za C^*-algebru A kažemo da je **homogena** *ako su sve ireducibilne reprezentacije od A n-dimenzionalne (n je prirodan broj). Ukoliko ćemo htjeti naglasiti broj n, onda ćemo reći da je A n-homogena C^*-algebra.*

Definicija

Za C^*-algebru A kažemo da je **homogena** *ako su sve ireducibilne reprezentacije od A n-dimenzionalne (n je prirodan broj). Ukoliko ćemo htjeti naglasiti broj n, onda ćemo reći da je A n-homogena C^*-algebra.*

Propozicija

Ako je A homogena C^*-algebra, tada je $\mathrm{Prim}(A)$ (lokalno kompaktan) Hausdorffov prostor.

Definicija

Za C^*-algebru A kažemo da je **homogena** *ako su sve ireducibilne reprezentacije od A n-dimenzionalne (n je prirodan broj). Ukoliko ćemo htjeti naglasiti broj n, onda ćemo reći da je A n-homogena C^*-algebra.*

Propozicija

Ako je A homogena C^*-algebra, tada je $\mathrm{Prim}(A)$ (lokalno kompaktan) Hausdorffov prostor.

Primjer

C^*-algebra A je 1-homogena ako i samo ako je A komutativna. Posebno, svaka 1-homogena C^*-algebra je oblika $A = C_0(X)$ za neki LCH prostor X.

Definicija

Za C^*-algebru A kažemo da je **homogena** *ako su sve ireducibilne reprezentacije od A n-dimenzionalne (n je prirodan broj). Ukoliko ćemo htjeti naglasiti broj n, onda ćemo reći da je A n-homogena C^*-algebra.*

Propozicija

Ako je A homogena C^*-algebra, tada je $\mathrm{Prim}(A)$ (lokalno kompaktan) Hausdorffov prostor.

Primjer

C^*-algebra A je 1-homogena ako i samo ako je A komutativna. Posebno, svaka 1-homogena C^*-algebra je oblika $A = C_0(X)$ za neki LCH prostor X.

Primjer

Ako je X LCH prostor, tada je C^*-algebra $C_0(X, \mathbb{M}_n)$ n-homogena. Za algebre tog oblika kažemo da su **trivijalne** n-homogene C^*-algebre.

Netrivijalne primjere n-homogenih C^*-algebri dobivamo kao algebre prereza fibriranih svežnjeva s vlaknom $\mathbb{M}_n$ i strukturnom grupom $G = \mathrm{Aut}(\mathbb{M}_n)$.

Netrivijalne primjere n-homogenih C^*-algebri dobivamo kao algebre prereza fibriranih svežnjeva s vlaknom $\mathbb{M}_n$ i strukturnom grupom $G = \mathrm{Aut}(\mathbb{M}_n)$.

Fibrirani svežnjevi

Prisjetimo se, ako su E, X i F topološki prostori, $p : E \to X$ neprekidna surjekcija te G topološka grupa koja djeluje neprekidno na prostoru F, tada za petorku (E, X, F, p, G) kažemo da je **fibrirani svežanj** s baznim prostorom X, totalnim prostorom E, vlaknom F i strukturnom grupom G ako postoji otvoreni pokrivač $\{U_i\}$ od X (tzv. atlas) te homeomorfizmi $\phi_i : U_i \times F \to p^{-1}(U_i)$ koji čuvaju vlakna, tj. za koje dijagram

$$\begin{tikzcd} U_i \times F \arrow[r, "\phi_i"] \arrow[d, "\mathrm{proj}_1"'] & p^{-1}(U_i) \arrow[dl, "p"] \\ U_i & \end{tikzcd}$$

komutira, pri čemu su tranzicijske funkcije

Fibrirani svežnjevi (nastavak)

$$\phi_{ji} := (\phi_j^{-1} \circ \phi_i)|_{U_i \cap U_j} : (U_i \cap U_j) \times F \to (U_i \cap U_j) \times F$$

oblika

$$\phi_{ji}(x, \xi) = (x, \overline{\phi}_{ji}(x)(\xi)),$$

za neprekidne funkcije $\overline{\phi}_{ji} : U_i \cap U_j \to G$ koje formiraju Čechov 1-kociklus, tj.

$$\overline{\phi}_{ii} \equiv e \quad na \ U_i \quad i \quad \overline{\phi}_{ij} \circ \overline{\phi}_{jk} \circ \overline{\phi}_{ki} \equiv e \quad na \ U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Funkcije $\overline{\phi}_{ji}$ se također zovu tranzicijske funkcije.

Fibrirani svežnjevi (nastavak)

$$\phi_{ji} := (\phi_j^{-1} \circ \phi_i)|_{U_i \cap U_j} : (U_i \cap U_j) \times F \to (U_i \cap U_j) \times F$$

oblika

$$\phi_{ji}(x, \xi) = (x, \overline{\phi}_{ji}(x)(\xi)),$$

za neprekidne funkcije $\overline{\phi}_{ji} : U_i \cap U_j \to G$ koje formiraju Čechov 1-kociklus, tj.

$$\overline{\phi}_{ii} \equiv e \quad na\ U_i \quad i \quad \overline{\phi}_{ij} \circ \overline{\phi}_{jk} \circ \overline{\phi}_{ki} \equiv e \quad na\ U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Funkcije $\overline{\phi}_{ji}$ se također zovu tranzicijske funkcije.

- Za svaku točku $x \in X$ praslika $E_x := p^{-1}(x)$ je homeomorfna s F. Za E_x kažemo da je vlakno nad x.
- Ako su bazni prostor X i projekcija p fiksirani, tada često koristimo oznaku E za cijelu petorku (E, X, F, p, G). Ukoliko želimo istaknuti strukturnu grupu G, onda ćemo kraće reći da je E G-svežanj.

Primjer

- Osnovni primjer fibriranog svežnja je **produktni svežanj** $E = X \times F$, gdje je p projekcija na prvu koordinatu, a $G = \{e\}$.
- Istaknutu klasu fibriranih svežnjeva nad X čine **prostori natkrivanja** od X. To su fibrirani svežnjevi nad X čije je vlakno F diskretan prostor. U tom slučaju je svaki $U_i \times F$ homeomorfan disjunktnoj uniji od $|F|$ kopija od U_i.

Primjer

- Osnovni primjer fibriranog svežnja je **produktni svežanj** $E = X \times F$, gdje je p projekcija na prvu koordinatu, a $G = \{e\}$.
- Istaknutu klasu fibriranih svežnjeva nad X čine **prostori natkrivanja** od X. To su fibrirani svežnjevi nad X čije je vlakno F diskretan prostor. U tom slučaju je svaki $U_i \times F$ homeomorfan disjunktnoj uniji od $|F|$ kopija od U_i.

Definicija

Za dva G-svežnja E i E' s istim baznim prostorom X kažemo da su **izomorfna** *i pišemo $E \cong E'$ ako postoji homeomorfizam $\phi : E \to E'$ takav da za sve $x \in X$ vrijedi $\phi(E_x) = E'_x$ i inducirano preslikavanje $\phi|_{E_x} : E_x \to E'_x$ pripada grupi G.*

Primjer

- Osnovni primjer fibriranog svežnja je **produktni svežanj** $E = X \times F$, gdje je p projekcija na prvu koordinatu, a $G = \{e\}$.
- Istaknutu klasu fibriranih svežnjeva nad X čine **prostori natkrivanja** od X. To su fibrirani svežnjevi nad X čije je vlakno F diskretan prostor. U tom slučaju je svaki $U_i \times F$ homeomorfan disjunktnoj uniji od $|F|$ kopija od U_i.

Definicija

Za dva G-svežnja E i E' s istim baznim prostorom X kažemo da su **izomorfna** *i pišemo $E \cong E'$ ako postoji homeomorfizam $\phi : E \to E'$ takav da za sve $x \in X$ vrijedi $\phi(E_x) = E'_x$ i inducirano preslikavanje $\phi|_{E_x} : E_x \to E'_x$ pripada grupi G.*

Za fibrirani svežanj koji je izomorfan produktnom svežnju $X \times F$ kažemo da je **trivijalan**.

Primjer

Osnovni primjer netrivijalnog fibriranog svežnja je Möbiusova vrpca, kao svežanj nad kružnicom $\mathbb{S}^1$, vlaknom $[-1, 1]$ i strukturnom grupom $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\pm \mathrm{id}\}$.

Primjer

Osnovni primjer netrivijalnog fibriranog svežnja je Möbiusova vrpca, kao svežanj nad kružnicom $\mathbb{S}^1$, vlaknom $[-1, 1]$ i strukturnom grupom $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\pm\mathrm{id}\}$.

Definicija

Neka je E G-svežanj nad Y s vlaknom F. Za neprekidno preslikavanje $f : X \to Y$ definiramo

$$f^*E := \{(x, \xi) \in X \times E \;:\; f(x) = p(\xi)\}$$

te ga opskrbimo s relativnom topologijim. Definirajmo preslikavanje $\widetilde{p} : f^*E \to X$ s $\widetilde{p}(x, \xi) := x$. Tada f^*E postaje G-svežanj s baznim prostorom X i vlaknom F. Naime, ako su $\overline{\phi}_{ji}$ tranzicijske funkcije od E, tada su $f^*\overline{\phi}_{ji} := \overline{\phi}_{ji} \circ f$ tranzicijske funkcije od f^*E. Za f^*E kažemo da je **inducirani svežanj** *od E preko f (eng. pullback bundle).*

Imamo sljedeći bitan rezultat:

Teorem

Ako su dva neprekidna preslikavanja $f, g : X \to Y$ homotopna, tada su inducirani svežnjevi f^*E i f^*F izomorfni.

Imamo sljedeći bitan rezultat:

Teorem

Ako su dva neprekidna preslikavanja $f, g : X \to Y$ homotopna, tada su inducirani svežnjevi f^*E i f^*F izomorfni.

Dakle, ako s $\mathrm{Bun}(X, G)$ označimo klase izomorfizama G-svežnjeva nad X te s $[X, Y]$ homotopske klase neprekidnih preslikavanja $f : X \to Y$, tada je s

$$[E] \mapsto [f^*E], \qquad \mathrm{Bun}(Y, G) \to \mathrm{Bun}(X, G)$$

dobro definirano preslikavanje. Posebno, ako su prostori X i Y homotopski ekvivalentni, tada imamo bijekciju s $\mathrm{Bun}(X, G)$ na $\mathrm{Bun}(Y, G)$.

Imamo sljedeći bitan rezultat:

Teorem

Ako su dva neprekidna preslikavanja $f, g : X \to Y$ homotopna, tada su inducirani svežnjevi f^*E i f^*F izomorfni.

Dakle, ako s $\mathrm{Bun}(X, G)$ označimo klase izomorfizama G-svežnjeva nad X te s $[X, Y]$ homotopske klase neprekidnih preslikavanja $f : X \to Y$, tada je s

$$[E] \mapsto [f^*E], \qquad \mathrm{Bun}(Y, G) \to \mathrm{Bun}(X, G)$$

dobro definirano preslikavanje. Posebno, ako su prostori X i Y homotopski ekvivalentni, tada imamo bijekciju s $\mathrm{Bun}(X, G)$ na $\mathrm{Bun}(Y, G)$.

Posebno, budući da je svaki svežanj nad jednotočkovnim prostorom trivijalan, imamo:

Korolar

Svaki fibrirani svežanj nad kontraktibilnim prostorom je trivijalan.

Prerez svežnja E je svaka neprekidna funkcija $s : X \to E$ takva da je $s(x) \in E_x$ za sve $x \in X$. Skup svih prereza od E označavamo s $\Gamma(E)$.

Prerez svežnja E je svaka neprekidna funkcija $s : X \to E$ takva da je $s(x) \in E_x$ za sve $x \in X$. Skup svih prereza od E označavamo s $\Gamma(E)$.

Istaknutu klasu fibriranih svežnjeva čine vektorski i algebarski svežnjevi:

Vektorski svežnjevi

Ako je $F = \mathbb{C}^n$ sa standardnim skalarnim produktom i ako za strukturnu grupu uzmemo grupu $U(n)$ unitarnih transformacija od $\mathbb{C}^n$, tada se takav fibrirani svežanj E zove **vektorski svežanj**. Ako je bazni prostor X lokalno kompaktan, tada skup $\Gamma_0(E)$ svih prereza od E koji trnu u ∞ postaje Banachov $C_b(X)$-modul, uz operacije po vlaknima, normu

$$\|s\| := \sup\{\|s(x)\| \ : \ x \in X\} \quad (s \in \Gamma_0(E))$$

i $C_b(X)$-djelovanje

$$(f \cdot s)(x) := f(x)s(x) \quad (f \in C_b(X), \ s \in \Gamma_0(E)).$$

Algebarski svežnjevi

Ako je $F = \mathbb{M}_n$ i ako za strukturnu grupu uzmemo grupu $\mathrm{Aut}(\mathbb{M}_n)$ svih $*$-automorfizama od $\mathbb{M}_n$, tada za takav svežanj kažemo da je **algebarski svežanj**. Budući da je svaki $*$-automorfizam od $\mathbb{M}_n$ unutrašnji, tj. oblika $a \mapsto uau^*$ za neku unitarnu matricu $u \in U(n)$ i budući da jedino unitarne matrice iz $\{\lambda I \ : \lambda \in \mathbb{S}^1\} \cong \mathbb{S}^1$ komutiraju sa svim matricama iz $\mathbb{M}_n$, imamo identifikaciju

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{M}_n) \cong PU(n) := U(n)/\mathbb{S}^1.$$

Upravo razlike između grupa $U(n)$ i $PU(n)$ generiraju razlike između teorija vektorskih i algebarskih svežnjeva.

Algebarski svežnjevi

Ako je $F = \mathbb{M}_n$ i ako za strukturnu grupu uzmemo grupu $\mathrm{Aut}(\mathbb{M}_n)$ svih $*$-automorfizama od $\mathbb{M}_n$, tada za takav svežanj kažemo da je **algebarski svežanj**. Budući da je svaki $*$-automorfizam od $\mathbb{M}_n$ unutrašnji, tj. oblika $a \mapsto uau^*$ za neku unitarnu matricu $u \in U(n)$ i budući da jedino unitarne matrice iz $\{\lambda I \ : \lambda \in \mathbb{S}^1\} \cong \mathbb{S}^1$ komutiraju sa svim matricama iz $\mathbb{M}_n$, imamo identifikaciju

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{M}_n) \cong PU(n) := U(n)/\mathbb{S}^1.$$

Upravo razlike između grupa $U(n)$ i $PU(n)$ generiraju razlike između teorija vektorskih i algebarskih svežnjeva.

Primjer

Ako je E algebarski $\mathbb{M}_n$-svežanj nad LCH prostorom X, tada je $\Gamma_0(E)$ n-homogena C^*-algebra (uz već definirane operacije i normu, te množenje i involuciju po vlaknima) i $\mathrm{Prim}(\Gamma_0(E)) \cong X$.

Štoviše, na taj način dobivamo sve n-homogene C^*-algebre:

Teorem (Fell, Tomiyama-Takesaki 1961)

Neka je A n-homogena C^*-algebra. Tada algebri A možemo pridružiti algebarski $\mathbb{M}_n$-svežanj E nad $X = \mathrm{Prim}(A)$ takav da je A $*$-izomorfna C^*-algebri $\Gamma_0(E)$. Štoviše, dvije takve C^*-algebre $A_i = \Gamma_0(E_i)$ sa primitivnim spektrima X_i su $*$-izomorfne ako i samo ako su pripadni svežnjevi E_i ekvivalentni, u smislu da postoji homeomorfizam $f : X_1 \to X_2$ takav da je $E_1 \cong f^* E_2$ (izomorfizam svežnjeva nad X_1).

Štoviše, na taj način dobivamo sve n-homogene C^*-algebre:

Teorem (Fell, Tomiyama-Takesaki 1961)

Neka je A n-homogena C^*-algebra. Tada algebri A možemo pridružiti algebarski $\mathbb{M}_n$-svežanj E nad $X = \mathrm{Prim}(A)$ takav da je A $*$-izomorfna C^*-algebri $\Gamma_0(E)$. Štoviše, dvije takve C^*-algebre $A_i = \Gamma_0(E_i)$ sa primitivnim spektrima X_i su $*$-izomorfne ako i samo ako su pripadni svežnjevi E_i ekvivalentni, u smislu da postoji homeomorfizam $f : X_1 \to X_2$ takav da je $E_1 \cong f^* E_2$ (izomorfizam svežnjeva nad X_1).

Problem klasifikacije

Za dani CH prostor X odrediti broj neizomorfnih klasa n-homogenih C^*-algebri čiji je primitivni spektar homeomorfan s X.

Štoviše, na taj način dobivamo sve n-homogene C^*-algebre:

Teorem (Fell, Tomiyama-Takesaki 1961)

Neka je A n-homogena C^*-algebra. Tada algebri A možemo pridružiti algebarski $\mathbb{M}_n$-svežanj E nad $X = \mathrm{Prim}(A)$ takav da je A $*$-izomorfna C^*-algebri $\Gamma_0(E)$. Štoviše, dvije takve C^*-algebre $A_i = \Gamma_0(E_i)$ sa primitivnim spektrima X_i su $*$-izomorfne ako i samo ako su pripadni svežnjevi E_i ekvivalentni, u smislu da postoji homeomorfizam $f : X_1 \to X_2$ takav da je $E_1 \cong f^* E_2$ (izomorfizam svežnjeva nad X_1).

Problem klasifikacije

Za dani CH prostor X odrediti broj neizomorfnih klasa n-homogenih C^*-algebri čiji je primitivni spektar homeomorfan s X.

Prema prethodnom teoremu, problem klasifikacije n-homogenih C^*-algebri nad X ekvivalentan je problemu klasifikacije algebarskih svežnjeva nad X.

Teorem ekvivalencije

Dva svežnja s istim baznim prostorom, vlaknom i strukturnom grupom su ekvivalentna ako i samo ako su njihovi asocirani glavni svežnjevi ekvivalentni.

Teorem ekvivalencije

Dva svežnja s istim baznim prostorom, vlaknom i strukturnom grupom su ekvivalentna ako i samo ako su njihovi asocirani glavni svežnjevi ekvivalentni.

Dakle, problem klasifikacije n-homogenih C^*-algebri A s $\mathrm{Prim}(A) \cong X$ ekvivalentan je problemu klasifikacije glavnih $PU(n)$-svežnjeva nad X.

Teorem ekvivalencije

Dva svežnja s istim baznim prostorom, vlaknom i strukturnom grupom su ekvivalentna ako i samo ako su njihovi asocirani glavni svežnjevi ekvivalentni.

Dakle, problem klasifikacije n-homogenih C^*-algebri A s $\mathrm{Prim}(A) \cong X$ ekvivalentan je problemu klasifikacije glavnih $PU(n)$-svežnjeva nad X.

- Za $n = 1$ problem je naravno trivijalan, jer tu riječ o komutativnim C^*-algebrama s primitivnim spektrom X, a svaka takva algebra je $*$-izomorfna funkcijskoj algebri $C_0(X)$.
- Također ako je CH prostor X kontraktibilan ili 0-dimenzionalan, tada je svaka homogena C^*-algebra A s $\mathrm{Prim}(A) \cong X$ trivijalna.
- S druge strane, za $n > 1$ opći problem klasifikacije postaje vrlo kompliciran i vodi u teška pitanja iz neabelove kohomologije. Odgovori se znaju samo neke niskodimenzionalne CW-komplekse kao npr. za k-sfere $\mathbb{S}^k$ i k-toruse $\mathbb{T}^k$.

Za klasifikaciju algebarskih svežnjeva nad prostorima oblika $\Sigma(X)$ (Σ je operator suspenzije) možemo koristiti sljedeći teorem:

Teorem klasifikacije

Pretpostavimo da je grupa G putevima povezana. Tada postoji bijekcija između klasa ekvivalencije G-svežnjeva nad $\Sigma(X)$ i klasa homotopije $[X, G]$.

Za klasifikaciju algebarskih svežnjeva nad prostorima oblika $\Sigma(X)$ (Σ je operator suspenzije) možemo koristiti sljedeći teorem:

Teorem klasifikacije

Pretpostavimo da je grupa G putevima povezana. Tada postoji bijekcija između klasa ekvivalencije G-svežnjeva nad $\Sigma(X)$ i klasa homotopije $[X, G]$.

Posebno, budući da je $\Sigma(\mathbb{S}^{k-1}) = \mathbb{S}^k$, dobivamo:

Korolar

Ako je grupa G putevima povezana, tada su klase ekvivalencije G-svežnjeva nad $\mathbb{S}^k$ sa strukturnom grupom G u bijekciji s elementima $k-1$-homotopske grupe $\pi_{k-1}(G)$.

Za klasifikaciju algebarskih svežnjeva nad prostorima oblika $\Sigma(X)$ (Σ je operator suspenzije) možemo koristiti sljedeći teorem:

Teorem klasifikacije

Pretpostavimo da je grupa G putevima povezana. Tada postoji bijekcija između klasa ekvivalencije G-svežnjeva nad $\Sigma(X)$ i klasa homotopije $[X, G]$.

Posebno, budući da je $\Sigma(\mathbb{S}^{k-1}) = \mathbb{S}^k$, dobivamo:

Korolar

Ako je grupa G putevima povezana, tada su klase ekvivalencije G-svežnjeva nad $\mathbb{S}^k$ sa strukturnom grupom G u bijekciji s elementima $k-1$-homotopske grupe $\pi_{k-1}(G)$.

Posebno, kako je $\pi_1(PU(n)) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ za sve $n \in \mathbb{N}$, imamo ukupno n neizomorfnih klasa n-homogenih C^*-algebri s primitivnim spektrom $\mathbb{S}^2$.

Algebarski $\mathbb{M}_n$-svežnjevi nad $\mathbb{S}^2$

- Označimo redom s $\mathbb{S}^2_+$ i $\mathbb{S}^2_-$ gornju i donju zatvorenu polusferu.
- Imamo $\mathbb{S}^2_+ \cap \mathbb{S}^2_- = \mathbb{S}^1$ i za tranzicijsku funkciju $\overline{\phi}_{2,1}$ uzmimo neprekidnu funkciju $V : \mathbb{S}^1 \to PU(n)$.
- Neka je E svežanj nad $\mathbb{S}^2$ s atlasom $\{\mathbb{S}^2_+, \mathbb{S}^2_-\}$ i tranzicijskom funkcijom V.
- Dva svežnja E i E' definirana s tranzicijskim funkcijama V i V' su ekvivalentna ako i samo ako vrijedi $\mathrm{ind}(V) - \mathrm{ind}(V') = nl$ $(l \in \mathbb{Z})$, gdje je
$$\mathrm{ind}(V) = (2\pi)^{-1}[\arg\det V(t)]_{\mathbb{S}^1}$$
obrtni broj funkcije V s obzirom na kružnicu $\mathbb{S}^1$.
- Za svako $0 \leq j \leq n-1$ definirajmo tranzicijsku funkciju
$$V_j : \mathbb{S}^1 \to U(n), \quad V_j : z \mapsto \mathrm{diag}(z^j, 1, \ldots, 1).$$
- Tada su svežnjevi E_j definirani s V_j predstavnici svih n klasa ekvivalencije.

Više homotopske grupe $\pi_k(PU(n))$

Za $k \geq 2$ imamo

$$\pi_k(PU(n)) \cong \pi_k(SU(n)) \cong \pi_k(U(n)),$$

pa za opis viših homotopskih grupa od $PU(n)$ možemo koristiti

- Bottovu periodičnost od $U(n)$: Za $k > 1$ i $n \geq \frac{k+1}{2}$ imamo

$$\pi_k(U(n)) \cong \begin{cases} 0 & : \ k \text{ paran} \\ \mathbb{Z} & : \ k \text{ neparan}. \end{cases}$$

- Borel-Hirzebruchov teorem: Za sve $n \in \mathbb{N}$ imamo $\pi_{2n}(U(n)) = \mathbb{Z}/n!\mathbb{Z}$.

Npr. za $1 \leq k \leq 7$ i $1 \leq n \leq 10$ imamo sljedeću tablicu:

Broj neizomorfnih klasa n-homogenih C^*-algebri s $\mathrm{Prim}(A) \cong \mathbb{S}^k$

	$\mathbb{M}_1$	$\mathbb{M}_2$	$\mathbb{M}_3$	$\mathbb{M}_4$	$\mathbb{M}_5$	$\mathbb{M}_6$	$\mathbb{M}_7$	$\mathbb{M}_8$	$\mathbb{M}_9$	$\mathbb{M}_{10}$
$\mathbb{S}^1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mathbb{S}^2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathbb{S}^3$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mathbb{S}^4$	1	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$
$\mathbb{S}^5$	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mathbb{S}^6$	1	2	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$
$\mathbb{S}^7$	1	12	6	1	1	1	1	1	1	1

Npr. za $1 \leq k \leq 7$ i $1 \leq n \leq 10$ imamo sljedeću tablicu:

Broj neizomorfnih klasa n-homogenih C^*-algebri s $\mathrm{Prim}(A) \cong \mathbb{S}^k$

	$\mathbb{M}_1$	$\mathbb{M}_2$	$\mathbb{M}_3$	$\mathbb{M}_4$	$\mathbb{M}_5$	$\mathbb{M}_6$	$\mathbb{M}_7$	$\mathbb{M}_8$	$\mathbb{M}_9$	$\mathbb{M}_{10}$
$\mathbb{S}^1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mathbb{S}^2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathbb{S}^3$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mathbb{S}^4$	1	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$
$\mathbb{S}^5$	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mathbb{S}^6$	1	2	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$
$\mathbb{S}^7$	1	12	6	1	1	1	1	1	1	1

S druge strane, imamo sljedeću interesantnu činjenicu:

Teorem (Antonevič-Krupnik, 2000)

Svaki algebarski svežanj nad $\mathbb{S}^k$ je trivijalan kao vektorski svežanj.

Na svaku C^*-algebru možemo gledati kao na Banachov modul nad centrom $ZM(A)$ svoje multiplikatorske algebre, pri čemu $ZM(A)$ djeluje na elemente od A (lijevim) množenjem. Taj modul ćemo kraće označiti s $_Z A$.

Na svaku C^*-algebru možemo gledati kao na Banachov modul nad centrom $ZM(A)$ svoje multiplikatorske algebre, pri čemu $ZM(A)$ djeluje na elemente od A (lijevim) množenjem. Taj modul ćemo kraće označiti s ${}_Z A$.

Banachovi moduli ${}_Z A$ imaju interesatna svojstva, npr. oni su **lokalno konveksni**. To znači da za svaka dva pozitivna elementa $z_1, z_2 \in ZM(A)$ s $z_1 + z_2 = 1$ te proizvoljne $a_1, a_2 \in A$ vrijedi

$$\|z_1 a_1 + z_2 a_2\| \leq \max\{\|a_1\|, \|a_2\|\}.$$

Lokalno konveksni moduli nad komutativnim C^*-algebrama su posebno interesantni, jer oni niču kao moduli prereza tzv. Hofmannovih svežnjeva.

Na svaku C^*-algebru možemo gledati kao na Banachov modul nad centrom $ZM(A)$ svoje multiplikatorske algebre, pri čemu $ZM(A)$ djeluje na elemente od A (lijevim) množenjem. Taj modul ćemo kraće označiti s ${}_Z A$.

Banachovi moduli ${}_Z A$ imaju interesatna svojstva, npr. oni su **lokalno konveksni**. To znači da za svaka dva pozitivna elementa $z_1, z_2 \in ZM(A)$ s $z_1 + z_2 = 1$ te proizvoljne $a_1, a_2 \in A$ vrijedi

$$\|z_1 a_1 + z_2 a_2\| \leq \max\{\|a_1\|, \|a_2\|\}.$$

Lokalno konveksni moduli nad komutativnim C^*-algebrama su posebno interesantni, jer oni niču kao moduli prereza tzv. Hofmannovih svežnjeva.

Definicija

Za C^*-algebru A kažemo da je **konačno centralno generirana** *(KCG) ako je modul ${}_Z A$ konačno generiran.*

Problem

Karakterizirati sve KCG C^*-algebre.

Problem

Karakterizirati sve KCG C^*-algebre.

Koristeći neprekidni funkcionalni račun najprije dobivamo

Lema

Svaka KCG C^*-algebra je unitalna.

Problem

Karakterizirati sve KCG C^*-algebre.

Koristeći neprekidni funkcionalni račun najprije dobivamo

Lema

Svaka KCG C^*-algebra je unitalna.

Primjer

- Neka je X CH prostor. Tada je svaka trivijalna homogena C^*-algebra $A = C(X, \mathbb{M}_n)$ KCG. Zaista, ako identificiramo $C(X, \mathbb{M}_n)$ s $M_n(C(X))$ na uobičajen način, tada imamo

$$Z(A) = \{\mathrm{diag}(f, \ldots, f) : \ f \in C(X)\} \cong C(X).$$

Neka su $(e_{ij})_{i,j=1}^n$ standardne matrične jedinice u $\mathbb{M}_n$, koje identificiramo s pripadnim konstantnim matričnim funkcijama na X. Tada za svaku funkciju $a = (a_{ij}) \in M_n(C(X))$ imamo $a = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \cdot e_{ij}$. Dakle:

Primjer (nastavak)

$$A = \mathrm{span}_{Z(A)}\{e_{ij} \ : \ 1 \le i, j \le n\}.$$

- Općenitije, svaka unitalna n-homogena C^*-algebra A je KCG. To se lako vidi koristeći lokalnu trivijalnost pripadnog algebarskog $\mathbb{M}_n$-svežnja od A, particiju jedinice te činjenicu da su trivijalne homogene C^*-algebre KCG.

Primjer (nastavak)

$$A = \mathrm{span}_{Z(A)}\{e_{ij} \;:\; 1 \leq i,j \leq n\}.$$

- Općenitije, svaka unitalna n-homogena C^*-algebra A je KCG. To se lako vidi koristeći lokalnu trivijalnost pripadnog algebarskog $\mathbb{M}_n$-svežnja od A, particiju jedinice te činjenicu da su trivijalne homogene C^*-algebre KCG.

Napomena

Klasa KCG C^*-algebri je stabilna na kvocijentiranje i na formiranje konačnih direktnih suma.

Primjer (nastavak)

$$A = \mathrm{span}_{Z(A)}\{e_{ij} \; : \; 1 \leq i,j \leq n\}.$$

- Općenitije, svaka unitalna n-homogena C^*-algebra A je KCG. To se lako vidi koristeći lokalnu trivijalnost pripadnog algebarskog $\mathbb{M}_n$-svežnja od A, particiju jedinice te činjenicu da su trivijalne homogene C^*-algebre KCG.

Napomena

Klasa KCG C^*-algebri je stabilna na kvocijentiranje i na formiranje konačnih direktnih suma.

Posebno, konačne direktne sume unitalnih homogenih C^*-algebri su KCG. Štoviše, na taj način smo u stvari dobili sve KCG C^*-algebre:

Teorem (I.G. 2011)

C^*-algebra A je KCG ako i samo ako je A konačna direkna suma unitalnih homogenih C^*-algebri. Posebno, svaka KCG C^*-algebra je automatski Z-projektivna.

Skica dokaza

- Najprije pokažemo da je A subhomogena, tj. da postoji prirodan broj n takav da su sve ireducibilne reprezentacije od A dimenzije manje ili jednake n.
- Izaberimo najmanji takav n. Tada A sadrži najveći ideal J koji je n-homogen kao C^*-algebra.
- Pokažemo da je pripadni algebarski $\mathbb{M}_n$-svežnanj E od J nad $X := \mathrm{Prim}(J)$ konačnog tipa kao vektorski svežanj, tj. X dopušta konačan otvoreni pokrivač $\{U_j\}$ na kojem je svaki restrikcijski svežanj $E|_{U_j}$ trivijalan kao vektorski svežanj ranga n^2.
- Tada je E konačnog tipa i kao algebarski svežanj (Phillips 2007), pa je $M(J)$ n-homogena C^*-algebra (Magajna 2009). Njen pripadni $\mathbb{M}_n$-svežanj F nad βX (Stone-Čechovljeva kompaktifikacija) proširuje E (tj. $F|_X = E$).
- Dokaz zatim reduciramo na slučaj kada je X povezan gust (otvoren) podskup od $\mathrm{Prim}(A)$, tako da je $J \subseteq A \subseteq M(J) = \Gamma(F)$.

Skica dokaza (nastavak)

- U tom slučaju, pokazat ćemo da je $J = M(J)$, odakle će slijediti $J = A$. To je ekvivalentno s tvrdnjom da je prostor X kompaktan.
- Pretpostavimo suprotno. Tada možemo naći točku $x_0 \in \beta X \setminus X$, njenu kompaktnu okolinu H i ideal I_H of $M(J)$ tako da kvocijentnu C^*-algebru $A_H := A/(I_H \cap A)$ možemo identificirati s C^*-podalgebrom od $C(H, \mathbb{M}_n)$, pri čemu u toj identifikaciji vrijedi

$$a_{1n}|_{H \setminus U} = 0 \quad \textit{za sve} \quad a = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in A_H,$$

  gdje je $U := X \cap H$.
- U je gust otvoren podskup od H i $x_0 \notin U$. Koristeći tu činjenicu, sada dokažemo da je komutativna C^*-algebra $C_0(U)$ konačno generirana kao modul nad samom sobom.
- Iz Leme zaključujemo da algebra $C_0(U)$ mora biti unitalna. Odavde slijedi da je U kompaktan, pa je $U = H$. Time napokon dobivamo kontradikciju s činjenicom da je $x_0 \in H \setminus U$.