ODABRANA POGLAVLJA TEORIJE OPERATORSKIH ALGEBRI

Ilja Gogić

Zagreb, PMF-MO
ak. god. 2016.-2017.

Sadržaj

Poglavlje 1

Pregled preliminarnih rezultata

S $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ redom označavamo polja realnih odnosno kompleksnih brojeva. S $\mathbb{R}_+$ i $\mathbb{R}_-$ redom označavamo skupove nenegativnih odnosno nepozitivnih realnih brojeva. Ako drugačije nije istaknuto, svi vektorski prostori u ovom kolegiju bit će nad poljem $\mathbb{C}$. Posebno, sve algebre će biti kompleksne algebre.

Ako su X metrički prostor, $x \in X$ i $r > 0$, tada otvorenu i zatvorenu kuglu oko x radijusa r u X redom označavamo s $K_X(x,r)$ i $\overline{K}_X(x,r)$. Sferu oko x radijusa r u X označavamo s $S_X(x,r)$. Ako je X normiran prostor, tada ćemo umjesto $\overline{K}_X(0,1)$ češće pisati $\mathrm{Ball}(X)$.

Od studenata očekujemo da su upoznati s osnovama opće topologije, apstraktne i linearne algebre te realne, kompleksne i funkcionalne analize. U sljedećim točkama dat ćemo pregled nekih tema koje možda nisu bile obrađivane u standardnim kursevima iz algebre i analize, a koje ćemo koristiti u ovom kolegiju. Dokazi tvrdnji koje ovdje nisu dokazane mogu se naći u standardnim udžbenicima iz realne i funkcionalne analize ([2, 6, 16, 18]).

1.1 Osnovni rezultati elementarne funkcionalne analize

Neka su X i Y normirani prostori. Za linearni operator $T : X \to Y$ kažemo da je **ograničen** ako postoji konstanta $C > 0$ takva da vrijedi

$$\|Tx\| \le C\|x\| \quad \forall x \in X.$$

za sve $x \in X$.

Propozicija 1.1.1. *Neka su X i Y normirani prostori te neka je $T : X \to Y$ linearni operator. Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:*

(i) T je ograničen.

(ii) T je neprekidan.

(iii) T je neprekidan u 0.

Skup svih ograničnih linearnih operatora s X u Y označavamo s $\mathbb{B}(X,Y)$. Tada $\mathbb{B}(X,Y)$ postaje normiran prostor uz standardnu linearnu strukturu te operatorsku normu

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\| : x \in \mathrm{Ball}(X)\} \quad (T \in \mathbb{B}(X,Y)). \tag{1.1}$$

Ako je $Y = X$, tada umjesto $\mathbb{B}(X,X)$ pišemo $\mathbb{B}(X)$.

Neka je X normiran prostor. U ovom kolegiju ćemo skup $\mathbb{B}(X,\mathbb{C})$ svih ograničenih linaernih funcionala na X označavati (nestandardno) s $X^\natural$. Za $X^\natural$ kažemo da je **(topološki) dual** od X.

Ako je $X \neq \{0\}$, onda je i $X^\natural \neq \{0\}$. To je posljedica sljedećeg bitnog teorema (odnosno njegovog korolara):

Teorem 1.1.2 (**Hahn-Banachov teorem**). *Neka je X normiran prostor i neka je $Y \leq X$ njegov (ne nužno zatvoren) potprostor. Ako je φ ograničen linearni funkcional na Y, tada se φ može proširiti do ograničenog linearnog funkcionala $\widetilde{\varphi}$ na X tako da vrijedi $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.*

Korolar 1.1.3. *Neka je $X \neq \{0\}$ normiran prostor. Tada za svaki $x \in X$ postoji $\varphi \in X^\natural$ takav da vrijedi $\|\varphi\| = 1$ i $|\varphi(x)| = \|x\|$. Posebno, $X^\natural \neq \{0\}$.*

* * *

Za podskup A topološkog prostora Ω kažemo da je:

(a) **nigdje gust** u Ω ako je $\operatorname{Int}(\overline{A}) = \emptyset$;

(b) **prve kategorije** u Ω, ako se A može prikazati kao prebrojiva unija nigdje gustih skupova;

(c) **druge kategorije** u Ω, ako A nije prve kategorije;

(d) **rezidualan** u Ω, ako je njegov komplement $\Omega \setminus A$ skup prve kategorije u Ω.

Propozicija 1.1.4. *Za topološki prostor Ω su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) Svaki neprazan otvoren skup u Ω je skup druge kategorije u Ω.

(ii) Svaki rezidualan skup u Ω je gust u Ω.

(iii) Ako je $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, gdje su $F_n \subseteq \Omega$ zatvoreni skupovi, tada je otvoren skup $\bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{Int} F_n$ gust u Ω.

Za topološki prostor Ω kažemo da je **Baireov prostor** ako on zadovoljava neku (pa onda i svaku) od ekvivalentnih tvrdnji Propozicije 1.1.4.

Teorem 1.1.5 (**Baireov teorem o kategoriji**). *Ako je topološki prostor Ω potpuno metrizabilan (tj. ako na Ω postoji metrika s obzirom na koju je Ω potpun metrički prostor) onda je Ω Baireov prostor.*

Potpun normiran prostor zove se **Banachov prostor**. Dakle, normiran prostor X je Banachov prostor ako svaki Cauchyjev niz u X konvergira u X. Sljedeća dva rezultata obično se dokazuju korištenjem Baireovog teorema o kategoriji:

Teorem 1.1.6 (**Banach-Steinhausov teorem**). *Neka je X Banachov prostor, Y normiran prostor te $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{B}(X,Y)$ neka familija operatora. Tada je ekvivalentno:*

(i) $\mathcal{F}$ je ***uniformno ograničena****, tj.* $\sup\{\|T\| : T \in \mathcal{F}\} < \infty$.

(ii) $\mathcal{F}$ je ***jako ograničena****, tj.* $\sup\{\|Tx\| : T \in \mathcal{F}\} < \infty$ *za sve $x \in X$.*

(iii) $\mathcal{F}$ je ***slabo ograničena****, tj.* $\sup\{|\varphi(Tx)| : T \in \mathcal{F}\} < \infty$ *za sve $x \in X$ i $\varphi \in Y^\natural$.*

Banach-Steinhausov teorem se često zove i **princip uniformne ograničenosti**.

Teorem 1.1.7 (**Teorem o otvorenom preslikavanju**). *Neka su X Banachov prostor, Y normiran prostor i $T \in \mathbb{B}(X,Y)$. Ako je slika operatora T skup druge kategorije u Y, tada je T surjektivno otvoreno preslikavanje (tj. $T(X) = Y$ i T slika otvorene skupove u X u otvorene skupove u Y). Posebno, ako su X i Y Banachovi prostori, tada je svaki surjektivni operator $T \in \mathbb{B}(X,Y)$ otvoreno preslikavanje.*

Kao direktnu posljedicu Teorema 1.1.7 dobivamo sljedeći rezultat:

Korolar 1.1.8 (**Banachov teorem o inverzu**). *Neka su X i Y Banachovi prostori. Svaki bijektivni operator $T \in \mathbb{B}(X,Y)$ je ograničen odozdo, tj. postoji konstanta $\delta > 0$ takva da vrijedi $\|Tx\| \geq \delta\|x\|$ za sve $x \in X$. Posebno, $T^{-1} \in \mathbb{B}(Y,X)$.*

Teorem o otvorenom preslikavanju ekvivalentan je još jednom klasičnom teoremu funkcionalne analize - Teoremu o zatvorenom grafu. Ako su X i Y normirani prostori, prisjetimo se da tada i $X \times Y$ ima strukturu normiranog prostora uz standarnu linearnu strukturu i normu $\|(x,y)\| := \|x\| + \|y\|$. Tada u $X \times Y$ vrijedi

$$(x_n, y_n) \longrightarrow (x_0, y_0) \quad \Longleftrightarrow \quad x_n \longrightarrow x_0 \;\;\&\;\; y_n \longrightarrow y_0.$$

Ako je linearni operator $T : X \to Y$ ograničen, tada je očito njegov graf $\Gamma_T = \{(x, Tx) : \; x \in X\}$ zatvoren potprostor od $X \times Y$. Ako su X i Y potpuni, vrijedi i obrat:

Korolar 1.1.9 (**Teorem o zatvorenom grafu**). *Neka su X i Y Banachovi prostori. Linearni operator $T : X \to Y$ je ograničen ako i samo ako je Γ_T zatvoren potprostor od $X \times Y$.*

* * *

Neka je sada $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Dakle, $\mathcal{H}$ je vektorski prostor snabdjeven sa skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$, tako da je $\mathcal{H}$ potpun s obzirom na induciranu normu $\|\xi\| := \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}$ (tj. $\mathcal{H}$ je potpun unitarni prostor). Tada je dual od $\mathcal{H}$ posebno jednostavnog oblika. O tome govori sljedeći teorem:

Teorem 1.1.10 (**Rieszov teorem o reprezentaciji ograničenog linearnog funkcionala**). *Za svaki ograničen linearni funkcional φ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ postoji jedinstven vektor $\eta \in \mathcal{H}$ takav da vrijedi $\varphi(\xi) = \langle \xi, \eta \rangle$ za sve $\xi \in \mathcal{H}$, gdje $\langle \cdot, \cdot \rangle$ označava skalarni produkt na $\mathcal{H}$.*

Iz Teorema 1.1.10 slijedi da za svaki operator $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ postoji jedinstven operator $T^* \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ takav da vrijedi

$$\langle T\xi, \eta \rangle = \langle \xi, T^*\eta \rangle \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Za operator T^* kažemo da je **adjungiran operatoru** T (ili da je T^* je **adjungat** od T). Lako se provjeri da preslikavanje $T \mapsto T^*$ zadovoljava sljedeća svojstva:

(i) $(\lambda S + \mu T)^* = \overline{\lambda} S^* + \overline{\mu} T^*$ za sve $S, T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$;

(ii) $(ST)^* = T^* S^*$ za sve $S, T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$;

(iii) $(T^*)^* = T$ za sve $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$;

(iv) $\|T^*T\| = \|T\|^2$ za sve $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$.

Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i neka je F **ograničena seskvilinearna forma** na $\mathcal{H}$ (tj. $F : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ je funkcija koja je linearna u prvoj varijabli, antilinearna u drugoj varijabli te zadovoljava nejednakost

$$|F(\xi, \eta)| \leq C\|\xi\|\|\eta\| \qquad (\xi, \eta \in \mathcal{H})$$

za neku konstantu $C > 0$.

Svaki operator $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ definira seskvilinearnu formu na $\mathcal{H}$ danu s

$$F(\xi, \eta) := \langle T\xi, \eta \rangle. \tag{1.2}$$

S druge strane, iz Teorema 1.1.10 slijedi da su sve ograničene seskvilinearne forme na $\mathcal{H}$ tog oblika. Naime, za fiksiran vektor $\eta \in \mathcal{H}$ preslikavanje $\xi \mapsto F(\xi, \eta)$ definira ograničen linearni funkcional na $\mathcal{H}$, pa iz Teorema 1.1.10 slijedi da postoji jedinstven vektor iz $\mathcal{H}$, kojeg ćemo označiti sa $S\eta$, takav da je $F(\xi, \eta) = \langle \xi, S\eta \rangle$ za sve $\xi \in \mathcal{H}$. Lako se provjeri da preslikavanje $S : \eta \mapsto S\eta$ definira ograničen linearni operator na $\mathcal{H}$, tj. $S \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$. Ako stavimo $T := S^*$, zaključujemo da je F oblika (1.2). Time smo dokazali sljedeći rezultat

Teorem 1.1.11 (**Rieszov teorem o reprezentaciji ograničene seskvilinearne forme**). *Ako je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor, tada za svaku ograničenu seskvilinearnu formu $F : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ postoji jedinstven operator $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ takav da vrijedi $F(\xi, \eta) = \langle T\xi, \eta \rangle$ za sve $\xi, \eta \in \mathcal{H}$.*

1.2 Lokalno konveksni prostori

Pretpostavimo da je X skup, $\{(Y_i, \tau_i)\}_{i \in \mathbb{I}}$ familija topoloških prostora i $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ familija funkcija, takva da svaka funkcija f_i $(i \in \mathbb{I})$ preslikava X u Y_i. **Slaba topologija na X generirana familijom** $\mathcal{F}$ je najslabija topologija na X s obzirom na koju su sve funkcije f_i $(i \in \mathbb{I})$ neprekidne. Tu topologiju obično označavamo s $\sigma(X, \mathcal{F})$.

Istaknimo par osnovnih svojstava topologije $\sigma(X, \mathcal{F})$:

(i) Bazu topologije $\sigma(X, \mathcal{F})$ čine svi konačni presjeci skupova oblika

$$\{f_i^{-1}(V) : \ V \in \tau_i, i \in \mathbb{I}\}.$$

(ii) Mreža (x_j) u X konvergira prema točki $x_0 \in X$ u topologiji $\sigma(X, \mathcal{F})$ ako i samo ako mreža $(f_i(x_j))$ konverigra prema točki $f_i(x_0)$ u topologiji τ_i za sve $i \in \mathbb{I}$.

(iii) Neka je Z topološki prostor. Funkcija $g : Z \to X$ je neprekidna ako i samo ako su sve funkcije $f_i \circ g : Z \to Y_i$ $(i \in \mathbb{I})$ neprekidne.

(iv) Pretpostavimo da familija $\mathcal{F}$ razdvaja točke od X, tj. za svake dvije različite točke $x, y \in X$ postoji funkcija $f_i \in \mathcal{F}$ takva da je $f_i(x) \neq f_i(y)$. Ako svaki od prostora Y_i zadovoljava aksiom separacije T_0, T_1, T_2, T_3 ili $T_{3\frac{1}{2}}$, tada topologija $\sigma(X, \mathcal{F})$ zadovoljava taj isti aksiom separacije.

Primjer 1.2.1. Neka je $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in \mathbb{I}}$ familija topoloških prostora. **Produktna topologija** na Kartezijevom produktu $\prod_{i \in \mathbb{I}} X_i$ je slaba topologija generirana familijom $\{\pi_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ koordinatnih projekcija $\pi_i : \prod_{i \in \mathbb{I}} X_i \to X_i$, $\pi_i : (x_i)_{i \in \mathbb{I}} \mapsto x_i$. Ako su svi prostori X_i kompaktni, tada je prema Tihonovljevom teoremu i njihov produkt $\prod_{i \in \mathbb{I}} X_i$ kompaktan prostor.

* * *

Za prostor X kažemo da je **topološki vektorski prostor** ako je X vektorski prostor snabdjeven s Hausdorffovom topologijom s obzirom na koju su operacije zbrajanja $+ : X \times X \to X$, $(x, y) \mapsto x + y$ i množenja skalarom $\mathbb{C} \times X \to X$, $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ neprekidne.

Za topološki vektorski prostor X kažemo da je **lokalno konveksan** ako nulvektor $0 \in X$ ima konveksnu bazu okolina, tj. bazu okolina koja se sastoji od konveksnih skupova. Tada i svaka točka $x_0 \in X$ ima konveksnu bazu okolina. Zaista, translacija $x \mapsto x_0 + x$ je homeomorfizam s X na X (s inverzom $x \mapsto x - x_0$), odakle slijedi da je U okolina od 0 ako i samo ako je $x_0 + U$ okolina od x_0.

Neka je X vektorski prostor i pretpostavimo da je na X zadana **separirajuća familija polunormi** $\{\| \cdot \|_i\}_{i\in\mathbb{I}}$, tj. iz $\|x\|_i = 0$ za sve $i \in \mathbb{I}$ slijedi $x = 0$. Familija $\{\| \cdot \|_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ inducira prirodnu topologiju τ na X koju definiramo kao slabu topologiju generiranom familijom funkcija $x \mapsto \|x - x_0\|_i$ $(x_0 \in X, i \in \mathbb{I})$. Alternativno, τ je jedinstvena topologija na X takva da vrijedi

$$x_j \xrightarrow{\tau} x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \|x_j - x_0\|_i \longrightarrow 0 \quad \forall i \in \mathbb{I}.$$

Bazu okolina točke $x_0 \in X$ u topologiji τ čine skupovi oblika

$$U(x_0, i_1, \ldots, i_n, \varepsilon) := \{x \in X : \ \|x - x_0\|_{i_1} < \varepsilon, \ldots, \|x - x_0\|_{i_n} < \varepsilon\},$$

gdje su $n \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{I}$ i $\varepsilon > 0$. Budući da je familija $\{\| \cdot \|_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ separirajuća, τ je potpuno regularna (specijalno Hausdorffova) topologija. Također, lako se provjeri da je svaki bazni skup $U(0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \varepsilon)$ konveksan te da su operacije zbrajanja i množenja skalarom neprekidne s obzirom na topologiju τ. Dakle, (X, τ) je lokalno konveksan prostor. Sljedeći teorem kaže da sve lokalno konveksne prostore dobivamo na taj način:

Teorem 1.2.2. *Topološki vektorski prostor X je lokalno konveksan ako i samo ako je njegova topologija generirana s nekom separirajućom familijom polunormi na X.*

Neka je X lokalno konveksan prostor čija je topologija generirana sa separirajućom familijom polunormi $\{\| \cdot \|_i\}_{i\in\mathbb{I}}$. Kao i kod normiranih prostora, skup svih neprekidnih linearnih funkcionala na X označavamo s $X^\natural$ i zovemo **dual** od X. Tada je $X^\natural$ vektorski prostor uz standardnu linearnu strukturu. Nadalje, primijetimo da je linearni funkcional $\varphi : X \to \mathbb{C}$ neprekidan ako i samo je φ neprekidan u 0, tj. ako vrijedi $\varphi(x_j) \longrightarrow 0$, čim je (x_j) mreža u X za koju $\|x_j\|_i \longrightarrow 0$ za sve $i \in \mathbb{I}$.

Vrijedi i sljedeća korisna karakterizacija neprekidnosti linearnih funkcionala:

Teorem 1.2.3. *Neka je X lokalno konveksan prostor čija je topologija generirana sa separirajućom familijom polunormi $\{\| \cdot \|_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ i neka je φ linearni funkcional na X. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) φ je neprekidan;

(ii) postoji konačno mnogo indeksa $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{I}$ i konstanta $C > 0$ tako da za sve $x \in X$ vrijedi

$$|\varphi(x)| \leq C \max\{\|x\|_{i_1}, \ldots, \|x\|_{i_n}\}.$$

Istaknimo sljedeći bitni teorem separacije, kao i njegove dvije direktne posljedice:

Teorem 1.2.4. *Neka je X lokalno konveksan prostor i neka su S i K dva disjunktna zatvorena konveksna podskupa od X. Ako je K kompaktan, tada postoje $\varphi \in X^\natural$, $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon > 0$ takvi da za sve $x \in S$ i $y \in K$ vrijedi*

$$\mathrm{Re}(\varphi(x)) \leq \alpha < \alpha + \varepsilon \leq \mathrm{Re}(\varphi(y)).$$

Korolar 1.2.5. *Neka je S konveksan podskup lokalno konveksnog prostora X. Točka $x_0 \in X$ pripada zatvaraču od S ako i samo ako postoji mreža (x_j) u S takva da vrijedi $\varphi(x_j) \longrightarrow \varphi(x_0)$ za sve $\varphi \in X^\natural$.*

Korolar 1.2.6. *Neka je X lokalno konveksan prostor i neka je Y zatvoren potprostor od X. Tada za svaku točku $x_0 \in X \setminus Y$ postoji $\varphi \in X^\natural$ takav da je $\varphi(x_0) = 1$ i $f(y) = 0$ za sve $y \in Y$.*

Napomena 1.2.7. Direktna posljedica Korolara 1.2.6 je da je dual netrivijalnog lokalno konveksnog prostora netrivijalan.

Primjer 1.2.8. Neka je X lokalno konveksan prostor.

- Svaki funkcional $\varphi \in X^\natural$ definira polunormu $\| \cdot \|_\varphi$ na X danu s

$$\|x\|_\varphi := |\varphi(x)| \qquad (x \in X).$$

  Tada se topologija w inducirana familijom polunormi $\{\| \cdot \|_\varphi\}_{\varphi \in X^\natural}$ zove **slaba topologija** na X . Budući da je ta familija polunormi separirajuća (posljedica Korolara 1.2.6), (X, w) je lokalno konveksan prostor. U terminu mreža, imamo

$$x_j \xrightarrow{w} x_0 \quad \iff \quad \varphi(x_j) \longrightarrow \varphi(x_0) \quad \forall \varphi \in X^\natural.$$

- Svaki vektor $x \in X$ definira polunormu $\| \cdot \|_x$ na $X^\natural$ danu s

$$\|\varphi\|_x := |\varphi(x)| \qquad (\varphi \in X^\natural).$$

  Tada se topologija w^* inducirana familijom polunormi $\{\| \cdot \|_x\}_{x \in X}$ zove **slaba-zvijezda topologija** na X . Budući da je ta familija polunormi očigledno separirajuća, $(X^\natural, w^*)$ je lokalno konveksan prostor. U terminu mreža, imamo

$$\varphi_j \xrightarrow{w^*} \varphi_0 \quad \iff \quad \varphi_j(x) \longrightarrow \varphi_0(x) \quad \forall x \in X.$$

Napomena 1.2.9. U kontekstu normiranih prostora X topologija inducirana iz norme se često zove **jaka topologija** na X. Dakle, za mrežu (niz) (x_j) koja konvergira u normi prema vektoru x_0 također kažemo da (x_j) jako konvergira prema x_0 i pišemo $x_j \xrightarrow{s} x_0$.

Koristeći Tihonovljev teorem nije teško dokazati sljedeći bitan teorem:

Teorem 1.2.10 (Banach-Alaogluov teorem). *Ako je X normiran prostor, tada je jedinična kugla* $\mathrm{Ball}(X^\natural)$ *w^*-kompaktna.*

* * *

Neka je X lokalno konveksan prostor i neka je S konveksan podskup od X. Za točku $x \in S$ kažemo da je **ekstremna točka** od S ako iz prikaza $x = (1-t)x_1 + tx_2$, gdje su $t \in (0, 1)$ i $x_1, x_2 \in S$, slijedi $x = x_1 = x_2$. Skup svih ekstremnih točaka od S označavamo s $\mathrm{ext}(S)$.

Teorem 1.2.11 (Krein-Milmanov teorem). *Neka je S kompaktan konveksan podskup lokalno konveksnog prostora X. Tada je skup* $\mathrm{ext}(S)$ *neprazan. Štoviše, S je zatvorena konveksna ljuska od* $\mathrm{ext}(S)$*, tj. S je zatvarač skupa svih konačnih konveksnih kombinacija $t_1x_1 + \ldots + t_nx_n$, gdje su $x_1, \ldots, x_n$ vektori iz* $\mathrm{ext}(S)$ *i $t_1, \ldots, t_n$ nenegativni realni brojevi takvi da je $t_1 + \ldots + t_n = 1$.*

1.3 Algebre i $*$-algebre

Algebra je vektorski prostor A nad poljem $\mathbb{C}$ kompleksnih brojeva na kojem je zadana operacija **množenja**, tj. asocijativna binarna operacija

$$A \times A \to A, \quad (a,b) \mapsto ab$$

koja je bihomogena s obzirom na operaciju množenja skalarom i distributivna s lijeva i s desna s obzirom na operaciju zbrajanja na A. Drugim riječima, vrijedi:

$$a(bc) = (ab)c, \quad (\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab), \quad a(b+c) = ab + ac \quad \text{i} \quad (a+b)c = ac + bc$$

za sve $a, b, c \in A$ i $\lambda \in \mathbb{C}$. Ako vrijedi $ab = ba$ za sve $a, b \in A$ tada kažemo da je A **komutativna**.

Jedinica u algebri A je element $1 \in A$ takav da je

$$1a = a1 = a \quad \forall a \in A.$$

Ako jedinica u algebri postoji, ona jedinstvena. **Unitalna algebra** je algebra u kojoj postoji jedinica.

Ako je A unitalna algebra, tada za element $a \in A$ kažemo da je **invertibilan** ako postoji element $a^{-1} \in A$ takav da je

$$a^{-1}a = aa^{-1} = 1.$$

Element a^{-1}, ako postoji, je jedinstven i zovemo ga **inverz** od a. Skup svih invertibilnih elemenata algebre A označavamo s $A^\times$. Primijetimo da je $A^\times$ grupa s obzirom na operaciju množenja.

Primjer 1.3.1. Neka je X normiran prostor. Tada je $\mathbb{B}(X)$ unitalna algebra s obzirom na standardnu linearnu strukturu i komponiranje operatora kao množenje. Jedinica u $\mathbb{B}(X)$ je jedinični operator. Očito je $\mathbb{B}(X)$ nekomutativna čim je $\dim X > 1$.

Podskup B algebre A zove se **podalgebra** od A ako je B algebra s obzirom na operacije koje su definirane kao restrikcije operacija algebre A. Primijetimo da je potprostor B od A podalgebra od A ako i samo ako je B zatvoren s obzirom na operaciju množenja, tj. vrijedi

$$a, b \in B \quad \Longrightarrow \quad ab \in B.$$

Za podalgebru B unitalne algebre A kažemo da je **unitalna podalgebra** ako B sadrži jedinicu algebre A. Napomenimo da je moguće da je B unitalna algebra, ali da B nije unitalna podalgebra algebre A. Naime, moguće je da B ima jedinicu, ali da ta jedinica nije jednaka jedinici algebre A:

Neka su su A i B algebre. Za preslikavanje $\phi : A \to B$ kažemo da je **homomorfizam algebri** ako je ϕ linearno i multiplikativno, tj. vrijedi

$$\phi(\lambda a + \mu b) = \lambda\phi(a) + \mu\phi(b) \quad \text{i} \quad \phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$$

za sve $a, b \in A$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Ako su A i B unitalne algebre s jedinicama 1_A i 1_B i ako vrijedi $\phi(1_A) = 1_B$ onda se ϕ zove **unitalni homomorfizam**. Injektivni homomorfizam zove se **monomorfizam**, surjektivni homomorfizam zove se **epimorfizam**, a bijektivni homomorfizam zove se **izomorfizam**. Za algebre A i B kažemo da su **izomorfne** ako postoji izomorfizam $\phi : A \to B$. Primijetimo da je izomorfnost algebri relacija ekvivalencije (na klasi svih algebri).

Primjer unitalne komutativne algebre je algebra $\mathbb{C}[z]$ polinoma u jednoj varijabli z nad poljem $\mathbb{C}$. Ako je A unitalna algebra i $p \in \mathbb{C}[z]$ polinom s rastavom

$$p = p(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_n z^n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k,$$

tada za element $a \in A$ definiramo

$$p(a) := \alpha_0 1 + \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \ldots + \alpha_n a^n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k a^k.$$

Preslikavanje

$$\phi_a : \mathbb{C}[z] \to A, \qquad \phi_a : p \mapsto p(a) \tag{1.3}$$

je unitalni homomorfizam algebri. Njegova je slika najmanja unitalna podalgebra od A koja sadrži element a, tj. potprostor od A razapet svim potencijama $\{1, a, a^2, \ldots\}$ elementa a.

* * *

Neka je A unitalna algebra. **Spektar** elementa $a \in A$ definiramo kao skup

$$\sigma(a) = \sigma_A(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda 1 - a \notin A^\times\}.$$

Za komplement spektra elementa a u $\mathbb{C}$ kažemo da je **rezolventni skup** od a i označavamo ga s $\rho(a)$ (ili s $\rho_A(a)$ kada želimo istaknuti ambijentalnu algebru A).

Napomena 1.3.2. Element $a \in A$ je invertibilan ako i samo ako $0 \notin \sigma(a)$. Nadalje, ako je algebra A trivijalna, tj. $A = \{0\}$, onda je 0 jedinica u toj algebri, pa je $A^\times = A = \{0\}$. Stoga je u tom slučaju $\sigma(0) = \emptyset$. Ako je algebra A netrivijalna, onda je $\sigma(\lambda 1) = \{\lambda\}$ za sve $\lambda \in \mathbb{C}$.

Propozicija 1.3.3. *Neka je A unitalna algebra.*

(i) Za sve $a \in A$ i $p \in \mathbb{C}[z]$ vrijedi:

$$\sigma(p(a)) = p(\sigma(a)) = \{p(\lambda) \ : \ \lambda \in \sigma(a)\}.$$

(ii) Za sve $a \in A^\times$ vrijedi:

$$\sigma\left(a^{-1}\right) = \sigma(a)^{-1} = \{\lambda^{-1} \ : \ \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Dokaz. (i). Neka je $\lambda \in \sigma(a)$. Tada postoji polinom $q \in \mathbb{C}[z]$, takav da je

$$p(z) - p(\lambda) = (z - \lambda) q(z).$$

Ako na tu jednakost djelujemo s homomorfizmom ϕ_a iz (1.3), dobivamo

$$p(a) - p(\lambda) 1 = (a - \lambda 1) q(a).$$

Pretpostavimo da je $p(a) - p(\lambda)1 \in A^\times$ i stavimo $b := (p(a) - p(\lambda)1)^{-1}$. Slijedi

$$1 = b\,(p(a) - p(\lambda)1) = b \cdot q(a)(a - \lambda 1) = (a - \lambda 1)(b \cdot q(a)).$$

Odavde slijedi da je $a - \lambda 1 \in A^\times$, što je kontradikcija s pretpostavkom $\lambda \in \sigma(a)$. Dakle, $p(a) - p(\lambda)1 \notin A^\times$, odnosno $p(\lambda) \in \sigma(p(a))$. Time smo dokazali inkluziju $p(\sigma(a)) \subseteq \sigma(p(a))$.

Dokažimo sada obratnu inkluziju. Pretpostavimo da je stupanj polinoma p jednak n i neka je $\mu \in \sigma(p(a))$. Budući da je polje $\mathbb{C}$ algebarski zatvoreno, postoje skalari $\alpha \neq 0$ i $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ takvi da je

$$p(z) - \mu = \alpha \cdot (z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_n).$$

Primijenimo li na gornju jednakost homomorfizam ϕ_a iz (1.3), dobivamo

$$p(a) - \mu 1 = \alpha \cdot (a - \lambda_1 1) \cdots (a - \lambda_n 1).$$

Kako je $\mu \in \sigma(p(a))$, vrijedi $p(a) - \mu 1 \notin A^\times$, odakle slijedi da postoji $j \in \{1, \ldots, n\}$ takav da $a - \lambda_j 1 \notin A^\times$, tj. $\lambda_j \in \sigma(a)$. No tada je $\mu = p(\lambda_j) \in p(\sigma(a))$. Time je dokazana i obrnuta inkluzija $\sigma(p(a)) \subseteq p(\sigma(a))$.

(ii). Neka je $\lambda \in \sigma(a)$, tj. $\lambda 1 - a$ nije invertibilan. Iz jednakosti

$$\lambda 1 - a = -\lambda(\lambda^{-1} 1 - a^{-1})a,$$

slijedi da $\lambda^{-1} 1 - a^{-1}$ nije invertibilan, odnosno $\lambda^{-1} \in \sigma(a^{-1})$. Time je dokazana inkluzija $\sigma(a)^{-1} \subseteq \sigma(a^{-1})$. Zamjena uloga a i a^{-1} daje $\sigma(a^{-1})^{-1} \subseteq \sigma(a)$, što je ekvivalentno s $\sigma(a^{-1}) \subseteq \sigma(a)^{-1}$. □

Propozicija 1.3.4. *Neka je A unitalna algebra. Tada za sve $a, b \in A$ vrijedi*

$$\sigma(ab) \setminus \{0\} = \sigma(ba) \setminus \{0\}.$$

Dokaz. Dovoljno je dokazati da je $1 - ab \in A^\times$ ako i samo ako je $1 - ba \in A^\times$. Ako je $1 - ab$ invertibilan s inverzom c, onda se lako provjeri da je $1 + bca$ inverz od $1 - ba$. □

Propozicija 1.3.5. *Neka je $\phi\colon A \to B$ unitalni homomorfizam unitalnih algebri A i B. Tada za svaki $a \in A$ vrijedi*

$$\sigma_B(\phi(a)) \subseteq \sigma_A(a).$$

Dokaz. Tvrdnja slijedi direktno iz činjenice $\phi(A^\times) \subseteq B^\times$. □

Neka je A unitalna algebra. **Rezolventa** elementa $a \in A$ je funkcija $R_a : \rho(a) \to A$ definirana s

$$R_a(\lambda) := (\lambda 1 - a)^{-1}.$$

Propozicija 1.3.6. *Neka je A unitalna algebra. Tada za sve $a \in A$ i $\lambda, \mu \in \rho(a)$ vrijedi*

$$(\lambda - \mu) R_a(\lambda) R_a(\mu) = R_a(\mu) - R_a(\lambda).$$

Posebno, $R_a(\lambda)$ i $R_a(\mu)$ komutiraju.

Dokaz. Gornju jednakost redom pomnožimo s invertibilnim elementima $(\lambda 1 - a)$ s lijeva i $(\mu 1 - a)$ s desna. □

* * *

Neka je A algebra i neka je I potprostor od A. Kažemo da je I:

- **Lijevi ideal** u A, ako je $AI \subseteq I$, tj. za sve $a \in A$ i $b \in I$ vrijedi $ab \in I$.
- **Desni ideal** u A, ako je $IA \subseteq I$, tj. za sve $a \in I$ i $b \in A$ vrijedi $ab \in I$.
- **Obostrani ideal** (ili samo **ideal**) ako je I istovremeno i lijevi i desni ideal u A.

Očito su $\{0\}$ i A ideali u A koje zovemo **trivijalni ideali**. Za lijevi/desni/obostrani ideal I u A kažemo da je **pravi**, ako je $I \neq A$.

Napomena 1.3.7. Ako je A unitalna algebra, tada da za pravi lijevi, desni ili obostrani ideal I u A vrijedi $1 \notin I$. Štoviše, ako je I pravi lijevi, desni ili obostrani ideal u A, onda I ne sadrži niti jedan invertibilni element, tj. $I \cap A^\times = \emptyset$.

Za pravi lijevi/desni/obostrani ideal M u A kažemo da je **maksimalan** ako M nije sadržan niti u jednom drugom pravom lijevom/desnom/obostranom idealu u A.

Lijevi (desni) ideal I u A je **modularan** ako postoji element $e \in A$ takav da je $ae - a \in I$ ($ea - a \in I$) za sve $a \in A$. U tom slučaju za element e kažemo da je **desna (lijeva) jedinica modulo ideal** I. Za (obostrani) ideal I u A kažemo da je modularan ako je on istovremeno modularan i kao lijevi i kao desni ideal. U tom slučaju postoji $e \in A$ takav da je $a - ae \in A$ i $a - ea \in A$ za sve $a \in A$ (tj. e je jedinica modulo ideal I). Očito je svaki lijevi/desni/obostrani ideal koji sadrži modularni lijevi/desni/obostrani ideal također modularan. Nadalje, ako je algebra A unitalna tada je svaki lijevi/desni/obostrani ideal u A modularan (stavimo $e = 1$). Zbog toga je pojam modularnosti interesantan samo za neunitalne algebre.

Propozicija 1.3.8. *Svaki pravi modularni lijevi/desni/obostrani ideal I u A je sadržan u nekom modularnom maksimalnom lijevom/desnom/obostranom idealu.*

Dokaz. Tvrdnju ćemo dokazati za lijeve ideale. Za desne i za obostrane dokaz je sasvim analogan. Pretpostavimo da je I pravi modularni lijevi ideal i neka je e desna jedinica modulo I. Primijetimo da za lijevi ideal $I \subseteq J$ u A vrijedi $J \neq A$ ako i samo ako $e \notin J$. Zaista, ako je $e \in J$, tada za sve $a \in A$ imamo $a \in ae + I \subseteq J$. Promotrimo familiju lijevih ideala

$$\mathcal{F} := \{J : \quad J \supseteq I \text{ i } e \notin J\}.$$

Tada je $\mathcal{F}$ neprazna familija jer je $I \in \mathcal{F}$. Uredimo $\mathcal{F}$ s inkluzijom kao parcijalnim uređajem. Neka je $\mathcal{L}$ lanac u $\mathcal{F}$ i stavimo $L := \bigcup \mathcal{L}$. Tada je L lijevi ideal u A koji sadrži I i $e \notin L$. Dakle, L je gornja međa od $\mathcal{L}$. Stoga, prema Zornovoj lemi, $\mathcal{F}$ ima maksimalni element M. Zbog početne napomene zaključujemo da je M modularni maksimalni lijevi ideal. □

S $\mathrm{Max}(A)$ označavamo skup svih modularnih maksimalnih (obostranih) ideala u A.

Korolar 1.3.9. *Neka je A komutativna unitalna algebra. Tada je element $a \in A$ invertibilan ako i samo ako $a \notin M$ za sve $M \in \mathrm{Max}(A)$.*

Dokaz. Zaista, $a \notin A^{\times}$ ako i samo ako je aA pravi ideal u A, što je prema Propoziciji 1.3.8 ekvivalentno s $aA \subseteq M$ za neki $M \in \mathrm{Max}(A)$. □

Neka je I (obostrani) ideal u algebri A. U kvocijentni vektorski prostor A/I uvodimo operaciju množenja na sljedeći način:

$$(a + I)(b + I) = ab + I \qquad (a, b \in A).$$

Iz činjenice da je I obostrani ideal slijedi da ta definicija ima smisla, tj. ne ovisi o izboru predstavnika a i b klasa kvocijentnog prostora. Doista, ako je $a + I = a' + I$ i $b + I = b' + I$ (tj. $a - a' \in I$ i $b - b' \in I$) onda je

$$ab - a'b' = a(b - b') + (a - a')b' \in I,$$

dakle, $ab + I = a'b' + I$. S tako definiranim množenjem A/I postaje algebra koja se zove **kvocijentna algebra** algebre A po idealu I. Kvocijentno preslikavanje $\pi_I : A \to A/I$, koje element algebre A preslikava u njegovu klasu modulo I (tj. $\pi_I(a) = a + I$) je epimorfizam algebri. Ako je 1 jedinica u algebri A, njena klasa $\pi_I(e) = 1 + I$ je jedinica u kvocijentnoj algebri A/I. S druge strane, algebra A/I je unitalna s jedinicom $e + I$ ako i samo ako vrijedi $ae - a \in I$ i $ea - a \in I$ za sve $a \in A$. Dakle,

Napomena 1.3.10. Kvocijentna algebra A/I je unitalna ako i samo ako je ideal I modularan.

Propozicija 1.3.11. *Neka je A komutativna algebra i neka je $M \in \mathrm{Max}(A)$. Tada je A/M polje.*

Dokaz. Neka je e jedinica modulo M. Najprije primijetimo da je algebra A/M prosta, tj. A/M nema pravih ideala. Zaista, ako je I ideal u A/M i ako je $\pi_M : A \to A/M$ kvocijentno preslikavanje, tada je $\pi_M^{-1}(I)$ ideal u A koji sadrži M, dakle $\pi_M^{-1}(I) = A$ ili $\pi_M^{-1}(I) = M$, jer je M maksimalan. Slijedi $I = A/M$ ili $I = 0$. Budući da je A/M unitalna komutativna prosta algebra, prema Korolaru 1.3.9, svaka klasa $a + M$ $(a \in A \setminus M)$ je invertibilna u A/M. □

Dokaz sljedeće jednostavne činjenice izostavljamo.

Propozicija 1.3.12. *Neka je $\phi : A \to B$ homomorfizam algebri. Tada vrijedi:*

(i) Slika $\phi(A) = \{\phi(a) : \ a \in A\}$ homomorfizma ϕ je podalgebra od B.

(ii) Jezgra $\ker \phi = \{a \in A : \ \phi(a) = 0\}$ homomorfizma ϕ je obostrani ideal u algebri A.

(iii) Inducirano preslikavanje $\dot{\phi} : A/\ker\phi \to B$, definirano s

$$\dot{\phi}(a + \ker\phi) = \phi(a) \qquad (a \in A),$$

je izomorfizam algebre $A/\ker\phi$ na algebru $\phi(A)$.

∗ ∗ ∗

Neka je A algebra koja nema jedinicu. Na Kartezijevom produktu $\widetilde{A} := A \times \mathbb{C}$ definiramo operacije zbrajanja i množenja skalarom po komponentama, dok množenje definiramo na sljedeći način:

$$(a, \lambda)(b, \mu) := (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu) \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{C}, \ a, b \in A).$$

Tada je jednostavno provjeriti da je $\widetilde{A}$ unitalna algebra s jedinicom $1 = (0, 1_{\mathbb{C}})$ i da je $a \mapsto (a, 0)$ monomorfizam algebre A u algebru $\widetilde{A}$. Koristeći taj monomorfizam smatramo da je $A \subseteq \widetilde{A}$. Na taj način A postaje (modularni maksimalni) ideal u algebri $\widetilde{A}$ i imamo rastav $\widetilde{A} = A \oplus \mathbb{C}1$. Za algebru $\widetilde{A}$ kažemo da je iz algebre A dobivena **unitizacijom** ili **dodavanjem jedinice**. Na taj način svaku algebru bez jedinice uranjamo u unitalnu algebru. Također primijetimo da je $\widetilde{A}$ komutativna ako i samo ako je A komutativna.

Ako algebra A nije unitalna, tada za bilo koji element $a \in A$ definiramo

$$\sigma(a) = \sigma_A(a) := \sigma_{\widetilde{A}}(a).$$

Primijetimo da je u tom slučaju $0 \in \sigma(a)$ za sve $a \in A$.

∗ ∗ ∗

Neka je A algebra. **Involucija** na A je antilinearno, antimultiplikativno i involutorno preslikavanje $* : A \to A$. Drugim riječima, vrijedi:

(a) $(\lambda a + \mu b)^* = \overline{\lambda} a^* + \overline{\mu} b^*$ za sve $a, b \in A$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$;

(b) $(ab)^* = b^* a^*$ za sve $a, b \in A$;

(c) $(a^*)^* = a$ za sve $a \in A$.

∗-algebra je algebra na kojoj je zadana involucija. Primijetimo da iz svojstva (c) slijedi da je involucija bijekcija s A na A.

Propozicija 1.3.13. *Neka je A unitalna $*$-algebra. Tada vrijedi:*

(i) $1^* = 1$.

(ii) Element $a \in A$ je invertibilan ako i samo ako je a^* invertibilan, te je $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$.

(iii) Za sve $a \in A$ je

$$\sigma(a^*) = \sigma(a)^* = \{\overline{\lambda} : \ \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Dokaz. (i). Iz svojstva (c) i (b) slijedi da je 1^* također jedinica u A. Kako je jedinica u algebri jedinstvena, slijedi $1^* = 1$.

(ii). Neka je $a \in A^\times$. Ako na jednakost $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ djelujemo s involucijom i uzmemo u obzir tvrdnju (i), dobivamo $(a^{-1})^*a^* = a^*(a^{-1})^* = 1$. Dakle, $a^* \in A^\times$ i $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$. Obratno, ako je $a^* \in A^\times$, tada je prema dokazanom i svojstvu (c), $a = (a^*)^* \in A^\times$.

(iii). Za $\lambda \in \mathbb{C}$ prema (ii) i svojstvu (a) imamo

$$\begin{aligned} \lambda \notin \sigma(a) &\iff \lambda 1 - a \in A^\times \iff (\lambda 1 - a)^* \in A^\times \iff \overline{\lambda} 1 - a^* \in A^\times \\ &\iff \overline{\lambda} \notin \sigma(a^*). \end{aligned}$$

□

Primjer 1.3.14. Neka je Ω neprazan skup i neka je $\ell_\infty(\Omega)$ skup svih ograničenih funkcija $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Tada $\ell_\infty(\Omega)$ ima strukturu unitalne komutativne $*$-algebre s obzirom na operacije po točkama

$$(\lambda f)(t) := \lambda f(t), \quad (f+g)(t) := f(t) + g(t), \quad (fg)(t) := f(t)g(t) \quad \text{i} \quad f^*(t) := \overline{f(t)},$$

gdje su $f, g \in \ell_\infty(S)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ i $t \in \Omega$. Jedinica u algebri $A = \ell_\infty(\Omega)$ je konstantna funkcija $1_A : t \mapsto 1_\mathbb{C}$.

Primjer 1.3.15. Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Tada je $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ unitalna $*$-algebra s obzirom na standardnu linearnu i multiplikativnu strukturu (Primjer 1.3.1) te adjungiranje operatora kao involuciju. Posebno, ako je $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$, onda je skup $\mathbb{M}_n \cong \mathbb{B}(\mathbb{C}^n)$ svih kompleksnih matrica reda n $*$-algebra.

Neka je u daljnjem A $*$-algebra. Za element $a \in A$ kažemo da je:

- **hermitski**, ako je $a^* = a$;
- **normalan**, ako je $a^*a = aa^*$;
- **projektor**, ako je $a^* = a = a^2$.

Nadalje, ako je A unitalna, tada za a kažemo da je

- **unitaran**, ako je $a^*a = a^*a = 1$;
- **izometrija**, ako je $a^*a = 1$;
- **koizometrija**, ako je $aa^* = 1$;
- **parcijalna izometrija**, ako je $aa^*a = a$.

Napomena 1.3.16. U slučaju $*$-algebre $A = \mathbb{B}(\mathcal{H})$ gornji pojmovi imaju uobičajena značenja.

Jasno je da su hermitski i unitarni elementi normalni. Skup svih hermitskih elemenata u A označavamo s A_h. Primijetimo da je A_h realan vektorski prostor i da vrijedi $A = A_h \oplus iA_h$. Zaista, jasno je da vrijedi $A_h \cap iA_h = \{0\}$. S druge strane, svaki element $a \in A$ možemo prikazati u obliku $a = a_1 + ia_2$, gdje su $a_1, a_2 \in A_h$ dani s

$$a_1 = \frac{1}{2}(a + a^*) \quad i \quad a_2 = \frac{1}{2i}(a - a^*).$$

Jedinstvene elemente a_1 i a_2 redom označavamo s $\mathrm{Re}\, a$ i $\mathrm{Im}\, a$. Nadalje, iz

$$a^*a = (\mathrm{Re}\, a)^2 + (\mathrm{Im}\, a)^2 - i(\mathrm{Im}\, a \cdot \mathrm{Re}\, a - \mathrm{Re}\, a \cdot \mathrm{Im}\, a)$$

i

$$aa^* = (\mathrm{Re}\, a)^2 + (\mathrm{Im}\, a)^2 + i(\mathrm{Im}\, a \cdot \mathrm{Re}\, a - \mathrm{Re}\, a \cdot \mathrm{Im}\, a)$$

slijedi da je element a normalan ako i samo $\mathrm{Re}\, a$ i $\mathrm{Im}\, a$ komutiraju.

Propozicija 1.3.17. *Neka je A ∗-algebra. Tada vrijedi:*

(i) Svaka lijeva/desna jedinica u A je jedinica u A.

(ii) Ako je A unitalna, tada je hermitski element $a \in A_h$ lijevo/desno invertibilan u A ako i samo ako je on invertibilan u A.

Dokaz. (i). Dokaz ćemo provesti za slučaj kada A ima lijevu jedinicu e. Adjungiranjem jednakosti $ea = a$ za sve $a \in A$ dobivamo $a^*e^* = a^*$ za sve $a \in A$. Kako je involucija bijekcija s A na A, slijedi da je e^* desna jedinica u A. Dakle, $e^* = ee^* = e$, odnosno $e = e^*$ je jedinica u A.

(ii). Dokaz ćemo provesti za slučaj kada je $a \in A_h$ lijevo invertibilan. Tada postoji $b \in A_h$ takav da je $ba = 1$. Odatle slijedi $ab^* = (ba)^* = 1$. Dakle, $b = b^*$ je inverz od a u B. □

Za podskup S algebre A definiramo skup

$$S^* := \{a^* : \ a \in S\}.$$

Kažemo da je S **samoadjungiran** ako je $S^* = S$. Za samoadjungiranu podalgebru B od A kažemo da je **∗-podalgebra** od A.

Primjer 1.3.18. Neka je Ω topološki prostor i neka je $C_b(\Omega)$ skup svih ograničenih neprekidnih funkcija $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Tada je $C_b(\Omega)$ unitalna ∗-podalgebra od $\ell_\infty(\Omega)$.

Ako je I samoadjungirani ideal u A, tada je kvocijentna algebra A/I ∗-algebra uz involuciju

$$(a + I)^* := a^* + I \quad (a \in A).$$

Ako je A neunitalna, tada na njenoj unitizaciji $\widetilde{A}$ definiramo involuciju

$$(a + \lambda 1)^* := a^* + \overline{\lambda} 1 \quad (a \in A, \ \lambda \in \mathbb{C}),$$

koja očito proširuje involuciju od A. Dakle, $\widetilde{A}$ je ∗-algebra i A je u njoj samoadjungirani ideal.

Za homomorfizam $\phi : A \to B$ ∗-algebri A i B kažemo da je **∗-homomorfizam** ako je ϕ kompatibilan s obzirom na involucije na A i B, tj. ako vrijedi

$$\phi(a^*) = \phi(a)^* \quad \forall a \in A.$$

Pojmovi $*$-monomorfizma, $*$-epimorfizma i $*$-izomorfizma imaju očita značenja. Ako je $\phi : A \to B$ $*$-homomorfizam, primijetimo da je tada njegova jezgra $\ker\phi$ samoadjungirani ideal u A i da je njegova slika $\phi(A)$ $*$-podalgebra od B. Nadalje, ako A i B nisu unitalne, tada se ϕ na jedinstven način proširuje do unitalnog $*$-homomorfizma $\widetilde{\phi} : \widetilde{A} \to \widetilde{B}$. To proširenje je eksplicitno dano s

$$\widetilde{\phi}(a + \lambda 1_A) = \phi(a) + \lambda 1_B \qquad (a \in A,\ \lambda \in \mathbb{C}).$$

Neka je A $*$-algebra. Ako je $\varphi : A \to \mathbb{C}$ linearni funkcional na A tada je s

$$\varphi^*(a) := \overline{\varphi(a^*)} \qquad (a \in A),$$

također zadan linearni funkcional na A. Očito vrijedi

$$\varphi^{**} = \varphi, \qquad (\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^* \quad \text{i} \quad (\lambda\varphi)^* = \overline{\lambda}\varphi^*.$$

Za φ kažemo da je **hermitski funkcional** ako vrijedi $\varphi^* = \varphi$ (ili ekvivalentno, ako je φ $*$-linearno preslikavanje s A u $\mathbb{C}$).

Naravno, svaki linearni funkcional φ ima jedinstven prikaz u obliku $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, gdje su φ_1 i φ_2 hermitski funkcionali; oni su dani s

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi^*) \quad i \quad \varphi_2 = \frac{1}{2i}(\varphi - \varphi^*).$$

Propozicija 1.3.19. *Neka je A $*$-algebra. Linearni funkcional $\varphi : A \to \mathbb{C}$ je hermitski ako i samo ako vrijedi $\varphi(A_h) \subseteq \mathbb{R}$. U tom slučaju je $\varphi(\operatorname{Re} a) = \operatorname{Re}\varphi(a)$ za sve $a \in A$.*

Dokaz. Ako je φ hermitski tada za $a \in A_h$ imamo $\varphi(a) = \varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$; dakle $\varphi(a) \in \mathbb{R}$.

Obratno, ako je $\varphi(A_h) \subseteq \mathbb{R}$, tada je za $a \in A$ očito $\varphi(\operatorname{Re} a) = \operatorname{Re}\varphi(a)$ i imamo

$$\begin{aligned} \varphi(a^*) &= \varphi(\operatorname{Re} a - i \operatorname{Im} a) = \varphi(\operatorname{Re} a) - i\varphi(\operatorname{Im} a) = \overline{\varphi(\operatorname{Re} a) + i\varphi(\operatorname{Im} a)} \\ &= \overline{\varphi(a)}, \end{aligned}$$

odakle slijedi da je φ hermitski. $\square$

1.4 Lokalno kompaktni Hausdorffovi prostori

Neka je Ω neprazan skup. Tada $*$-algebru $\ell_\infty(\Omega)$ možemo opskrbiti s uniformnom ili sup-normom

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| :\ t \in \Omega\}.$$

S obzirom na tu normu $\ell_\infty(\Omega)$ je Banachov prostor. Ako je Ω topološki prostor, tada je $C_b(\Omega)$ uniformno zatvorena $*$-podalgebra od $\ell_\infty(\Omega)$, pa je $C_b(\Omega)$ i sam Banachov prostor s obzirom na sup-normu.

Neka je sada K kompaktan Hausdorffov (kraće CH) prostor. Tada je on normalan pa na njemu vrijede Urysohnova lema i Tietzeov teorem o proširenju preslikavanja. Budući da je svaka neprekidna funkcija $f : K \to \mathbb{C}$ ograničena, imamo $C(K) = C_b(K)$.

Općenitije, za topološki prostor Ω kažemo da je **lokalno kompaktan** ako svaka točka iz Ω ima kompaktnu okolinu. Ako je Ω lokalno kompaktan Hausdorffov (kraće LCH) prostor, tada se lako vidi da ako su K i U podskupovi od Ω, takvi da je K kompaktan, U otvoren i $K \subseteq U$, onda postoji pretkompaktan otvoren skup V u Ω takav da je $K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Na LCH prostorima vrijede sljedeće varijante Urysohnove leme i Tietzeovog teorema o proširenju:

Propozicija 1.4.1. *Neka je Ω LCH prostor, K i U podskupovi od Ω takvi da je K kompaktan, U otvoren i $K \subseteq U$.*

(i) Postoji neprekidna funkcija $f : \Omega \to [0,1]$ takva da je $f|_K = 1$ i $f|_{\Omega \setminus U} = 0$.

(ii) Ako je $f : K \to [0,1]$ neprekidna funkcija, tada postoji neprekidna funkcija $F : \Omega \to [0,1]$ takva da je $F|_K = f$ i $F|_{\Omega\setminus U} = 0$.

Posebno, prema (a) dijelu Propozicije 1.4.1 LCH prostori su potpuno regularni.

Za neprekidnu funkciju $f : \Omega \to \mathbb{C}$ kažemo da u beskonačnosti teži prema kompleksnom broju ℓ, ako je za svaki $\varepsilon > 0$ skup

$$\{t \in \Omega : \ |f(t) - \ell| \geq \varepsilon\}$$

kompaktan. U tom slučaju pišemo $\ell = \lim_{t\to\infty} f(t)$.

Ako je $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$, tada kažemo da f **trne u** ∞. Skup svih neprekidnih funkcija $f : \Omega \to \mathbb{C}$ koje trnu u ∞ označavamo s $C_0(\Omega)$. Dakle,

$$C_0(\Omega) = \{f \in C(\Omega) : \ \lim_{t\to\infty} f(t) = 0\}.$$

Propozicija 1.4.2. *Neka je Ω LCH prostor. Tada je $C_0(\Omega)$ uniformno zatvorena $*$-podalgebra od $C_b(\Omega)$. Posebno, $C_0(\Omega)$ je Banachov prostor s obzirom na sup-normu.*

Za neprekidnu funkciju $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definiramo njen **nosač** kao zatvarač komplementa skupa svih nultočki od f u Ω, tj.

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{t \in \Omega : \ f(t) \neq 0\}}.$$

Skup svih neprekidnih funkcija $f : \Omega \to \mathbb{C}$ čiji je nosač kompaktan skup označavamo s $C_c(\Omega)$. Tada je $C_c(\Omega)$ $*$-podalgebra od $C_b(\Omega)$ koja nije unitalna niti uniformno zatvorena ako prostor Ω nije kompaktan. Naime, imamo:

Propozicija 1.4.3. *Ako je Ω LCH prostor onda je $C_0(\Omega)$ uniformni zatvarač od $C_c(\Omega)$ unutar $C_b(\Omega)$.*

* * *

Pretpostavimo da je (Ω, τ) LCH prostor koji nije kompkatan i neka je ∞ neka točka koja ne leži u Ω. Stavimo $\widetilde{\Omega} := \Omega \cup \{\infty\}$ i definirajmo topologiju $\widetilde{\tau}$ na $\widetilde{\Omega}$ na sljedeći način:

(a) Svaki otvoren podskup od Ω je sadržan u $\widetilde{\tau}$, tj. $\tau \subseteq \widetilde{\tau}$;

(b) Ako je $K \subseteq \Omega$ kompaktan, tada je $\Omega \setminus K \cup \{\infty\} \in \widetilde{\tau}$.

Tada je $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\tau})$ CH prostor koji sadrži Ω kao gust otvoren podskup. Prostor $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\tau})$ se zove **Aleksandrovljeva (jednotočkovna) kompaktifikacija** od Ω. Primijetimo da prelaskom na Aleksandrovljvu kompaktifikaciju možemo napraviti sljedeće identifikacije

$$C(\widetilde{\Omega}) = \{f \in C(\Omega) : \ \exists \lim_{t\to\infty} f(t) \in \mathbb{C}\} = \widetilde{C(\Omega)}, \tag{1.4}$$

$$C_0(\Omega) = \{f \in C(\widetilde{\Omega}) : \ f(\infty) = 0\}. \tag{1.5}$$

Općenito, ako je Ω LCH topološki prostor, **kompaktifikacija** od Ω je naziv za bilo koji kompaktan prostor koji sadrži Ω kao gust podskup. Aleksandrovljeva kompaktifikacija je najmanja kompaktifikacija od Ω, jer je komplement od Ω u $\widetilde{\Omega}$ samo jedna točka. S druge strane, **Stone-Čechovljeva kompaktifikacija** $\beta\Omega$ je najveća kompaktifikacija od Ω. Ona je (do homeomorfizam) okarakterizirana sljedećim univerzalnim svojstvom:

* * *

Neka je Ω LCH prostor i neka je $\mathcal{B}_\Omega$ Borelova σ-algebra na Ω. Ako je $E \in \mathcal{B}_\Omega$ tada za pozitivnu mjeru Borelovu mjeru μ na Ω kažemo da je:

(a) **regularna izvana** na E ako vrijedi $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : \; E \subseteq U, \; U \text{ otvoren}\}$;

(b) **regularna iznutra** na E ako vrijedi $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : \; K \subseteq E, \; K \text{ kompaktan}\}$.

Ako je μ regularna izvana i regularna iznutra na svim Borelovim podskupovima od Ω onda za μ kažemo da je **regularna mjera**. Za μ kažemo da je **Radonova mjera** ako je onda konačna na svim kompaktnim skupovima u Ω, regularna izvana na svim Borelovim skupovima i regularna iznutra na svim otvorenim skupovima u Ω.

Napomena 1.4.4. Ako LCH prostor Ω zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti (ili općenitije, ako je svaki otvoren skup u Ω σ-kompaktan), tada je svaka Borelova mjera koja ja konačna na kompaktnim skupovima u Ω regularna (posebno Radonova) mjera.

Kompleksna Borelova mjera na Ω je svaka σ-aditivna funkcija s $\mathcal{B}_\Omega$ u $\mathbb{C}$, tj. funkcija $\mu : \mathcal{B}_\Omega \to \mathbb{C}$ takva da je $\mu(\emptyset) = 0$ i za svaki niz (E_n) disjunktnih podskupova iz $\mathcal{B}_\Omega$ vrijedi

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n),$$

pri čemu gornji red konvergira apsolutno. Posebno, sve kompleksne Borelove mjere su konačne.

Za danu kompleksnu Borelovu mjeru μ na Ω definiraramo **integral** izmjerive funkcije $f : \Omega \to \mathbb{C}$ s obzirom na μ na sljedeći način:

- Najprije označimo redom s μ_1 i μ_2 realni i imaginarni dio od μ, dakle

$$\mu_1(E) := \operatorname{Re} \mu(E) \quad \text{i} \quad \mu_2(E) := \operatorname{Im} \mu(E) \qquad (E \in \mathcal{O}_\Omega).$$

  Tada su μ_1 i μ_2 konačne mjere s predznakom i $\mu = \mu_1 + i\mu_2$.

- Neka su redom μ_1^+, μ_1^- i μ_2^+, μ_2^- jedinstvene konačne pozitivne mjere koje dobivamo primjenom Hahn-Jordanove dekompozicije na mjere μ_1 i μ_2; dakle

$$\mu_1 = \mu_1^+ - \mu_1^- \quad \text{i} \quad \mu_2 = \mu_2^+ - \mu_2^-.$$

- Ako je f poprima samo realne vrijednosti, tada definiramo

$$\int_\Omega f \, d\mu := \left(\int_\Omega f \, d\mu_1^+ - \int_\Omega f \, d\mu_1^-\right) + i\left(\int_\Omega f \, d\mu_2^+ - \int_\Omega f \, d\mu_2^-\right),$$

  ukoliko izraz s desne strane ima smisla.

- Za općenitu izmjerivu kompleksnu funkciju f na Ω definiramo:

$$\int_\Omega f \, d\mu := \int_\Omega \operatorname{Re} f \, d\mu + i \int_\Omega \operatorname{Im} f \, d\mu.$$

Za kompleksnu Borelovu mjeru μ na Ω kažemo da je Radonova mjera ako je njena **totalna varijacija**

$$|\mu|(E) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)| \ : n \in \mathbb{N},\ \{E_i\}_{i=1}^{n} \text{ je izmjeriva particija od } E \right\} \quad (E \in \mathcal{O})$$

(pozitivna) Radonova mjera na Ω. Lako se vidi da je Borelova mjera μ Radonova ako i samo ako su sve pozitivne mjere μ_i^+, μ_i^- $(i = 1, 2)$ iz dekompozicije $\mu = (\mu_1^+ - \mu_1^-) + i(\mu_2^+ - \mu_2^-)$ Radonove. Prema Napomeni 1.4.4 ako je svaki otvoren skup u LCH prostoru Ω σ-kompaktan, tada je svaka Borelova mjera na Ω Radonova.

Skup svih kompleksnih Radonovih mjera na LCH prostoru Ω označavamo s $M(\Omega)$.

Propozicija 1.4.5. *Ako je Ω LCH prostor, tada je $M(\Omega)$ (kompleksan) Banachov prostor s obzirom na standardnu linearnu strukturu i normu $\|\mu\| := |\mu|(\Omega)$.*

Svaka kompleksna Radonova mjera μ na Ω definira ograničen linearni funkcional φ_μ na $C_0(\Omega)$ na prirodan način:

$$\varphi_\mu(f) := \int_\Omega f \, d\mu \quad (f \in C_0(\Omega)). \tag{1.6}$$

Njegova norma je jednaka $\|\varphi_\mu\| = \|\mu\| = |\mu|(\Omega)$. S druge strane, svaki ograničen linearni funkcional na $C_0(\Omega)$ je oblika (1.6) za neku kompleksnu Radonovu mjeru μ. O tome nam govori sljedeći bitan teorem reprezentacije:

Teorem 1.4.6 (Riesz–Markovljev teorem). *Neka je Ω LCH prostor. Preslikavanje*

$$\Phi : M(\Omega) \to C(\Omega)^\natural, \quad \Phi : \mu \mapsto \varphi_\mu$$

definira izometrički izomorfizam Banachovih prostora.

* * *

Prema klasičnom Weierstrassovom teoremu iz elementarne analize za svaku neprekidnu funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ i $\varepsilon > 0$ postoji polinom p s realnim koeficijentima takav da je $\|f - p|_{[a,b]}\|_\infty < \varepsilon$. Imamo sljedeće bitno poopćenje tog rezultata:

Teorem 1.4.7 (Stone-Weierstrassov teorem). *Neka je K CH prostor i neka je A zatvorena $*$-podalgebra od $C(K)$ koja razdvaja točke od K i koja sadrži konstantne funkcije. Tada je $A = C(K)$.*

Dokaz. Označimo s $A^\perp$ anihilator od A u $C(K)^\natural$, tj.

$$A^\perp := \{\varphi \in C(X)^\natural : \ \varphi(f) = 0, \text{ za sve } f \in A\}.$$

Prema Hahn-Banachovom teoremu dovoljno je dokazati da je $A^\perp = \{0\}$. Pretpostavimo da je $A^\perp \neq \{0\}$. Prema Banach-Alaogluovom teoremu (Teorem 1.2.10), $\mathrm{Ball}(A^\perp)$ je w^*-kompaktna, pa iz Krein-Milmanovog teorema slijedi $\mathrm{ext}(\mathrm{Ball}(A^\perp)) \neq \emptyset$. Fiksirajmo neki funkcional $\varphi \in \mathrm{ext}(\mathrm{Ball}(A^\perp))$. Prema Riesz-Markovljevom teoremu reprezentacije (Teorem 1.4.6) postoji jedinstvena kompleksna Radonova mjera μ na K takva da vrijedi

$$\varphi(f) = \int_K f \, d\mu \qquad (f \in C(K)).$$

Neka je N nosač od μ, tj.

$$N := K \setminus \bigcup\{U : \ U \subset K \text{ otvoren i } |\mu|(U) = 0\}.$$

Dakle,

$$|\mu|(K \setminus N) = 0 \quad \text{i} \quad \int_K f\,d\mu = \int_N f\,d\mu \quad \text{za sve } f \in C(K).$$

Kako je $A^\perp \neq \{0\}$, $\|\mu\| = 1$ i $N \neq \emptyset$. Fiskirajmo neku točku $x_0 \in N$. Pokazat ćemo da je $N = \{x_0\}$.

Zaista, pretpostavimo da postoji točka $x \in N$ takva da je $x \neq x_0$. Budući da algebra A razdvaja točke od K, postoji $f_1 \in A$ takva da je $f_1(x_0) \neq f_1(x) := \beta$. Kako A sadrži konstantne funkcije, za $f_2 := f_1 - \beta$ imamo $f_2 \in A$ te $f_2(x_0) \neq 0 = f_2(x)$. Nadalje, budući da je A samoadjungirana, imamo $f_3 := |f_2|^2 = f_2 f_2^* \in A$. Također, $f_3(x) = 0 < f_3(x_0)$ i $f_3 \geq 0$. Stavimo

$$f := (1 + \|f_3\|)^{-1} f_3.$$

Tada je $f \in A$, $f(x) = 0$, $f(x_0) > 0$ i $0 \leq f < 1$ na K. Nadalje, kako je A algebra, imamo $gf, g(1-f) \in A$ za sve $g \in A$. Budući da je $\mu \in A^\perp$, imamo

$$0 = \int_K gf\,d\mu = \int_K g(1-f)\,d\mu \quad \text{za sve } g \in A.$$

Dakle, $f\mu, (1-f)\mu \in A^\perp$, pri čemu za bilo koju ograničenu Borelovu funkciju h na K s $h\mu$ označavamo mjeru na $(K, \mathcal{O}_K)$ definiranu s

$$(h\mu)(E) := \int_E h\,d\mu \qquad (E \in \mathcal{O}_K).$$

Primijetimo da je $\|h\mu\| = \int_K |h|\,d\mu$.

Stavimo

$$\alpha := \|f\mu\| = \int_K f\,d|\mu|.$$

Kako je $f(x_0) > 0$, postoji otvorena okolina U od x_0 i $\varepsilon > 0$ takvi da je $f(y) > \varepsilon$ za sve $y \in U$. Posebno, budući da je $U \cap N \neq \emptyset$, imamo

$$\alpha = \int_K f\,d|\mu| \geq \int_U f\,d|\mu| \geq \varepsilon|\mu|(U) > 0.$$

Slično, iz $f(x_0) < 1$ dobivamo $\alpha < 1$. Dakle, $0 < \alpha < 1$. Također,

$$1 - \alpha = 1 - \int_K f\,d|\mu| = \int_K (1-f)\,d|\mu| = \|(1-f)\mu\|.$$

Budući da mjeru μ možemo prikazati u obliku

$$\mu = \alpha \left[\frac{f\mu}{\|f\mu\|}\right] + (1-\alpha)\left[\frac{(1-f)\mu}{\|(1-f)\mu\|}\right],$$

mora biti $\mu = \|f\mu\|^{-1} f\mu = \alpha^{-1} f\mu$, jer je $\mu \in \mathrm{ext}(\mathrm{Ball}(A^\perp))$. No koje mjere μ i $\alpha^{-1}f\mu$ mogu biti jednake jedino ako je $\alpha^{-1} f = 1$ μ-gotovo svuda. Kako je f neprekidna, mora biti $f \equiv \alpha$ na N. Posebno, imamo $f(x_0) = \alpha$, jer je $x_0 \in N$. Iz $\alpha = f(x_0) > f(x) = 0$ zaključujemo da $x \notin N$. Dakle, $N = \{x_0\}$, pa je $\mu = \gamma\delta_{x_0}$ za neko $|\gamma| = 1$ (δ_{x_0} označava Diracovu mjeru koncentriranu u točki x_0). Kako je $\mu \in A^\perp$ i $1 \in A$, slijedi

$$0 = \int_K 1\,d\mu = \gamma;$$

kontradikcija. Dakle, $A^\perp = \{0\}$, odnosno $A = C(K)$, kao što je i trebalo pokazati. $\square$

Koristeći te identifikacije lako se pokaže sljedeća lokalno kompaktna verzija Stone-Weierstrassovog teorema:

Korolar 1.4.8. *Neka je Ω LCH prostor i neka je A zatvorena $*$-podalgebra od $C_0(\Omega)$ koja razdvaja točke od Ω te za svaku točku $t \in \Omega$ postoji funkcija $f \in A$ takva da je $f(t) \neq 0$. Tada je $A = C_0(\Omega)$.*

1.5 Zadaci

Zadatak 1.5.1. Dokažite da je svaki LCH prostor Baierov prostor.

Zadatak 1.5.2. Neka je X beskonačnodimenzionalni normiran prostor.

(i) Odredite slabi zatvarač jedinične sfere $S_X(0,1)$ u X.

(ii) Zaključite da je slaba topologija na X striktno slabija od jake topologije na X.

Zadatak 1.5.3. Da li je nužno zatvorena jedinična kugla u normiranom prostoru slabo kompaktna?

Zadatak 1.5.4. Neka je X lokalno konveksan prostor i neka je S konveksni podskup od X. Dokažite da vrijedi $\overline{S} = \overline{S}^w$ (tj. zatvarač od S se podudara sa slabim zatvaračem od S).

Zadatak 1.5.5. Neka je $\mathcal{H}$ beskonačnodimenzionalni Hilbertov prostor i neka je (e_n) ortonormiran skup u $\mathcal{H}$. Definirajmo skup

$$S := \{\sqrt{n} e_n : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

(i) Dokažite da je $0 \in \overline{S}^w$.

(ii) Postoji li niz (x_n) u S takav da vrijedi $x_n \xrightarrow{w} 0$?

Zadatak 1.5.6. Dokažite da je lokalno konveksan prostor X metrizabilan ako i samo ako postoji prebrojiva separirajuća familija polunormi na X koja generira njegovu topologiju.

Zadatak 1.5.7. Neka je X Banachov prostor. Dokažite da postoji CH prostor K takav da je X izometrički izomorfan nekom zatvorenom potprostoru od $C(K)$.

Zadatak 1.5.8. Dokažite da je za sve $n \in \mathbb{N}$ matrična algebra $\mathbb{M}_n$ prosta (tj. $\mathbb{M}_n$ nema pravih obostranih ideala).

Zadatak 1.5.9. Dokažite Propoziciju 1.4.1.

Zadatak 1.5.10. Dokažite Propozicije 1.4.2 i 1.4.3.

Zadatak 1.5.11. Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor.

(i) Odredite sve ekstremne točke od $\mathrm{Ball}(\mathcal{H})$.

(ii) Dokažite da je svaka izometrija $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ ekstremna točka od $\mathrm{Ball}(\mathbb{B}(\mathcal{H}))$. Vrijedi li obrat?

Zadatak 1.5.12. Neka je $\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{N})$ i neka su su c_0 i c zatvoreni potprostori od ℓ_∞ definirani s

$$c_0 := \{(\alpha_n) \in \ell_\infty : \ \lim_n \alpha_n = 0\};$$

$$c := \{(\alpha_n) \in \ell_\infty : \ \exists \lim_n \alpha_n \in \mathbb{C}\}.$$

(i) Dokažite da je niz $(1,1,1,\ldots)$ ekstremna točka od $\mathrm{Ball}(\ell_\infty)$ i $\mathrm{Ball}(c)$.

(ii) Dokažite da $\mathrm{Ball}(c_0)$ nema ekstremnih točaka.

(iii) Zaključite da Banachovi prostori c i c_0 nisu izometrički izomorfni.

Zadatak 1.5.13. Neka je Ω LCH prostor. Odredite nužne i dovoljne uvjete na prostor Ω tako da kugla $\mathrm{Ball}(C_0(\Omega))$ ima barem jednu esktremnu točku.

Zadatak 1.5.14. Postoji li Banachov prostor X takav da je prostor $C([0,1])$ izometrički izomorfan dualu $X^\natural$ od X?

Zadatak 1.5.15. Dokažite Korolar 1.4.8.

Zadatak 1.5.16. Neka je K CH prostor i neka je A zatvorena $*$-podalgebra od $C(K)$ koja razdvaja točke od K. Dokažite da je tada ili $A = C(K)$ ili postoji jedinstvena točka $x_0 \in K$ takva da je $A = \{f \in C(K) : \ f(x_0) = 0\}$.

Zadatak 1.5.17. Neka su K i L CH prostori i neka je $\varepsilon > 0$. Dokažite da za svaku funkciju $F \in C(K \times L)$ postoji konačno mnogo funkcija $f_1, \ldots, f_n \in C(K)$ i $g_1, \ldots, g_n \in C(L)$ tako da vrijedi

$$\sup\left\{\left|F(x,y) - \sum_{i=1}^n f_i(x)g_i(y)\right| : \ (x,y) \in (K,L)\right\} < \varepsilon.$$

Poglavlje 2

Elementarna spektralna teorija

2.1 Osnovni pojmovi i primjeri

Definicija 2.1.1. **Normirana algebra** je algebra A nad poljem $\mathbb{C}$ na kojoj je zadana submultiplikativna norma, tj. norma $\|\cdot\|$ takva da vrijedi

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\| \quad \forall a, b \in A.$$

Ako je A unitalna algebra s jedinicom 1 i ako je $\|1\| = 1$, tada kažemo da je A **unitalna normirana algebra**.

Propozicija 2.1.2. *Ako je A normirana algebra, tada je operacija množenja $(a, b) \mapsto ab$ neprekidna kao preslikavanje $A \times A \to A$.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi direktno iz nejednakosti

$$\begin{aligned} \|ab - a'b'\| &= \|a(b - b') + (a - a')b'\| \leq \|a(b - b')\| + \|(a - a')b'\| \\ &\leq \|a\|\|b - b'\| + \|a - a'\|\|b'\|, \end{aligned}$$

gdje su $a, a', b, b' \in A$. □

Definicija 2.1.3. Za normiranu algebru A kažemo ad je **Banachova algebra** ako je A s obzirom na danu normu potpun prostor. Potpuna unitalna normirana aglebra se zove **unitalna Banachova algebra**.

Podalgebra normirane algebre je očito i sama normirana algebra čija je norma dobivena restrikcijom početne norme. Također, zatvarač podalgebre je podalgebra. Specijalno, zatvorena podalgebra Banachove algebre je Banachova algebra.

Neka je A normirana algebra i neka je I zatvoren ideal u A. Tada znamo da je s

$$\|a + I\| := \inf\{\|a + x\| : \ x \in I\} \qquad (a \in A), \tag{2.1}$$

dana norma na kvocijentnom prostoru A/I. S tom normom kvocijentna algebra A/I postaje normirana algebra. Doista, ako su $a, a' \in A$, onda iz činjenice da je I ideal slijedi da je $ax' + xa' + xx' \in I$ za bilo koje $x, x' \in I$. Stoga imamo

$$\begin{aligned} \|(a + I)(a' + I)\| &= \|aa' + I\| \\ &= \inf\{\|aa' + x\| : \ x \in I\} \\ &\leq \inf\{\|aa' + xa' + ax' + xx'\| : \ x, x' \in I\} \\ &= \inf\{\|(a + x)(a' + x')\| : \ x, x' \in I\} \\ &\leq \inf\{\|a + x\|\|a' + x'\| : \ x, x' \in I\} \\ &= \inf\{\|a + x\| : \ x \in I\} \cdot \inf\{\|a' + x'\| : \ x' \in I\} \\ &= \|a + I\| \cdot \|a' + I\|. \end{aligned}$$

Propozicija 2.1.4. *Neka je A normirana algebra i neka je I zatvoreni ideal u A. Tada je A/I normirana algebra s obzirom na kvocijentnu normu (2.1). Nadalje, ako je A Banachova algebra, tada je i A/I Banachova algebra.*

Neka je A neunitalna normirana algebra. Na unitizaciji $\widetilde{A}$ od A definiramo normu s:

$$\|(a,\lambda)\| := \|a\| + |\lambda| \qquad (a \in A,\ \lambda \in \mathbb{C}). \tag{2.2}$$

Primijetimo da ta norma proširuje normu od A, tj. $\|a\|_{\widetilde{A}} = \|a\|_A$ za sve $a \in A$. Snabdjevena s tom normom $\widetilde{A}$ postaje unitalna normirana algebra. Zaista, $\|1\| = \|(0, 1_{\mathbb{C}})\| = 1$, a za $a, b \in A$ te $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ imamo

$$\begin{aligned}
\|(a,\lambda)(b,\mu)\| &= \|(ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)\| = \|ab + \lambda b + \mu a\| + |\lambda\mu| \\
&\leq \|a\|\|b\| + |\lambda|\|b\| + |\mu|\|a\| + |\lambda||\mu| = (\|a\| + |\lambda|)(\|b\| + |\mu|) \\
&= \|(a,\lambda)\| \cdot \|(b,\mu)\|.
\end{aligned}$$

Propozicija 2.1.5. *Neka je A neunitalna normirana algebra. Tada je njena unitizacija $\widetilde{A}$ normirana unitalna algebra uz normu (2.2). Nadalje, ako je A Banachova algebra, tada je i $\widetilde{A}$ Banachova algebra.*

Definicija 2.1.6. **Normirana $*$-algebra** je normirana algebra A na kojoj je zadana involucija za koju vrijedi

$$\|a^*\| = \|a\| \quad \forall a \in A.$$

Banachova $*$-algebra je potpuna (Banachova) nomirana $*$-algebra.

Neka je A normirana $*$-algebra i neka je I zatvoren (obostrani) $*$-ideal u A. Tada je kvocijentna algebra A/I normirana $*$-algebra. Zaista, po definiciji involucije na A/I za $a \in A$ imamo

$$\begin{aligned}
\|a + I\| &= \inf\{\|a + b\| \ : b \in I\} = \inf\{\|a^* + b^*\| \ : b \in I\} = \inf\{\|a^* + b\| \ : b \in I\} \\
&= \|a^* + I\|.
\end{aligned}$$

Nadalje, ako A nije unitalna, tada je i $\widetilde{A}$ normirana $*$-algebra.

Definicija 2.1.7. Za Banachovu algebru A snabdjevenu s involucijom $* : A \to A$ kažemo da je **C^*-algebra** ako njena norma zadovoljava tzv. **C^*-svojstvo**:

$$\|a^* a\| = \|a\|^2 \quad \forall a \in A.$$

Napomena 2.1.8. Ako je A unitalna C^*-algebra, tada direktno iz C^*-svojstva slijedi $\|1\| = 1$. Zaista, koristeći Propoziciju 1.3.13 (i), imamo $\|1\|^2 = \|1^* 1\| = \|1^2\| = \|1\|$, odnosno $\|1\| = 1$.

Propozicija 2.1.9. *Neka je A Banachova algebra snabdjevena s involucijom $* : A \to A$. Ako za sve $a \in A$ vrijedi $\|a\|^2 \leq \|a^* a\|$, tada je involucija na A izometrična i A je C^*-algebra. Posebno, svaka C^*-algebra je Banachova $*$-algebra.*

Dokaz. Zaista, za $a \in A$ iz

$$\|a\|^2 \leq \|a^* a\| \leq \|a^*\|\|a\|, \tag{2.3}$$

slijedi $\|a\| \leq \|a^*\|$. Ukoliko a zamijenimo s a^*, dobivamo $\|a^*\| \leq \|a\|$. Dakle, $\|a^*\| = \|a\|$, što zajedno s (2.3) daje $\|a^* a\| = \|a\|^2$. $\square$

Neka je A C^*-algebra. Za zatvorenu $*$-podalgebru B od A kažemo da je C^***-podalgebra** od A. Ako još k tome algebra A unitalna i ako je njena jedinica sadržana u B kažemo da je B **unitalna** C^***-podalgebra**. Ako je A neunitalna C^*-algebra i $\widetilde{A}$ njena unitizacija, tada znamo da je $\widetilde{A}$ Banachova $*$-algebra uz involuciju $(a+\lambda 1)^* = a^* + \overline{\lambda}1$ i normu $\|a+\lambda 1\| = \|a\| + |\lambda|$ $(a \in A,\ \lambda \in \mathbb{C})$. Međutim, $\widetilde{A}$ općenito nije C^*-algebra (Zadatak 2.6.4). Ipak, $\widetilde{A}$ je moguće opskrbiti s C^*-normom koja proširuje normu od A:

Teorem 2.1.10. *Neka je A neunitalna C^*-algebra. Na njenoj unitizaciji $\widetilde{A}$ definirajmo*

$$\|a+\lambda 1\|_{\widetilde{A}} := \sup\{\|ax+\lambda x\| :\ x \in \mathrm{Ball}(A)\} \qquad (a \in A,\ \lambda \in \mathbb{C}).$$

Tada je $\|\cdot\|_{\widetilde{A}}$ C^*-norma na $\widetilde{A}$ koja proširuje početnu normu od A.

Napomena 2.1.11. Primijetimo da je norma $\|a+\lambda 1\|_{\widetilde{A}}$ elementa $a+\lambda 1$ u stvari operatorska norma u $\mathbb{B}(A)$ njegovog pripadnog lijevog multiplikatora $L_{a+\lambda 1} : x \mapsto (a+\lambda 1)x = ax + \lambda x$,

Dokaz Teorema 2.1.10. Definirajmo preslikavanje

$$\phi : \widetilde{A} \to \mathbb{B}(A) \quad \text{s} \quad \phi(a+\lambda 1) := L_{a+\lambda 1},$$

gdje je $L_{a+\lambda 1}$ pripadni lijevi multiplikator elementa $a+\lambda 1$ (Napomena 2.1.11). Tada je ϕ očito unitalni homomorfizam algebri. Tvrdimo da je ϕ injektivan. Zaista, pretpostavimo da su $a \in A$ i $\lambda \in \mathbb{C}$ takvi da je $L_{a+\lambda 1} = 0$, odnosno

$$ax + \lambda x = 0 \qquad \text{za sve } x \in A. \tag{2.4}$$

Ako bi bilo $\lambda \neq 0$, tada bi za element $e := -\lambda^{-1}a$ vrijedilo $ex = x$ za sve $x \in A$, tj. e bi bila lijeva jedinica u A. Prema Propoziciji 1.3.17, e je jedinica u A. To je u kontradikciji s pretpostavkom da A nije unitalna. Dakle, $\lambda = 0$, pa iz (2.4) slijedi $ax = 0$ za sve $x \in A$. Specijalno, za $x = a^*$ dobivamo

$$0 = \|aa^*\| = \|a^*\|^2 = \|a\|^2,$$

odakle slijedi $a = 0$. Time smo pokazali da je $\ker\phi = \{0\}$, tj. ϕ je injektivan.

Zbog injektivnosti homomorfizma ϕ slijedi da je $\|\cdot\|_{\widetilde{A}}$ submultiplikativna norma na $\widetilde{A}$, tj. $\widetilde{A}$ je normirana algebra. Dokažimo da ta norma proširuje početnu normu od A. Zaista, za $a \in A$ imamo

$$\|a\|_{\widetilde{A}} = \sup\{\|ax\| \ : x \in \mathrm{Ball}(A)\} \leq \|a\|.$$

s druge strane, ako je $a \neq 0$, tada imamo

$$\|a\|_{\widetilde{A}} = \sup\{\|ax\|_A \ : x \in \mathrm{Ball}(A)\} \geq \left\| a\left(\frac{1}{\|a\|}a^*\right)\right\| = \|a\|$$

Dakle, $\|a\|_{\widetilde{A}} = \|a\|$ za sve $a \in A$.

Sada dokažimo da norma $\|\cdot\|_{\widetilde{A}}$ zadovoljava C^*-svojstvo. Za $a \in A$ i $\lambda \in \mathbb{C}$ imamo

$$\begin{aligned}
\|a+\lambda 1\|_{\widetilde{A}}^2 &= \sup\{\|ax+\lambda x\|^2 :\ x \in \mathrm{Ball}(A)\} \\
&= \sup\{\|(ax+\lambda x)^*(ax+\lambda x)\| :\ x \in \mathrm{Ball}(A)\} \\
&= \sup\{\|x^*(a+\lambda 1)^*(a+\lambda 1)x\| :\ x \in \mathrm{Ball}(A)\} \\
&\leq \sup\{\|(a+\lambda 1)^*(a+\lambda 1)x\| :\ x \in \mathrm{Ball}(A)\} \\
&= \|(a+\lambda 1)^*(a+\lambda 1)\|_{\widetilde{A}}.
\end{aligned}$$

Iz Propozicije 2.1.9 zaključujemo da vrijedi

$$\|a+\lambda 1\|_{\widetilde{A}}^2 = \|(a+\lambda 1)^*(a+\lambda 1)\|_{\widetilde{A}}.$$

Preostaje dokazati da je algebra $\widetilde{A}$ potpuna s obzirom na normu $\|\cdot\|_{\widetilde{A}}$. Budući da je algebra $\mathbb{B}(A)$ potpuna s obzirom na operatorsku normu i budući da je monomorfizam $\phi : \widetilde{A} \to \mathbb{B}(A)$ izometričan, dovoljno je dokazati da je njegova slika $\phi(\widetilde{A})$ zatvorena u $\mathbb{B}(A)$. Nadalje, kako je ϕ unitalan, imamo $\phi(\widetilde{A}) = \phi(A) + \mathbb{C}\mathrm{id}_A$, gdje id_A označava identitetu na A. Očito je $\phi(A)$ zatvorena podalgebra u $\mathbb{B}(A)$ (jer je A potpuna, a ϕ izometrija). Zatvorenost algebre $\phi(A) + \mathbb{C}\mathrm{id}_A$ sada slijedi iz poznate činjenice da je u svakom normiranom prostoru suma zatvorenog i konačnodimenzionalnog potprostora zatvoren potprostor. □

Napomena 2.1.12. Pri radu s neunitalnim C^*-algebrama uvijek ćemo uvijek podrazumijevati da je njena unitizacija $\widetilde{A}$ opskrbljena s normom $\|\cdot\|_{\widetilde{A}}$ iz Teorema 2.1.10.

Napomena 2.1.13. U poglavlju 3 ćemo dokazati da je svaki zatvoreni (obostran) ideal I u C^*-algebri A automatski samoadjungiran (dakle $*$-ideal), te da kvocijentna norma na A/I zadovoljava C^*-svojstvo.

* * *

Sada promotrimo nekoliko osnovnih primjera.

Primjer 2.1.14. Neka je Ω neprazan skup. Tada je $\ell_\infty(\Omega)$ unitalna komutativna C^*-algebra s obzirom na sup-normu. Primijetimo da za sve $f \in \ell_\infty(\Omega)$ imamo $\sigma(f) = \overline{f(\Omega)}$ (zatvarač u $\mathbb{C}$).

Primjer 2.1.15. Ako je Ω topološki prostor, tada je $C_b(\Omega)$ unitalna C^*-podalgebra od $\ell_\infty(\Omega)$. Slično kao u primjeru 2.1.14 za sve $f \in C_b(\Omega)$ imamo $\sigma(f) = \overline{f(\Omega)}$. Ako je prostor Ω kompaktan, imamo $C_b(\Omega) = C(\Omega)$ i $\sigma(f) = f(\Omega)$ za sve $f \in C(\Omega)$.

Primjer 2.1.16. Ako je Ω LCH prostor koji nije kompaktan, tada je $C_0(\Omega)$ C^*-podalgebra od $C_b(\Omega)$ koja nema jedinicu. Kao što znamo iz točke 1.4, unitizaciju algebre $C_0(\Omega)$ možemo identificirati s algebrom $C(\widetilde{\Omega})$, gdje je $\widetilde{\Omega}$ Aleksandrovljeva kompaktifikacija od Ω. Nadalje, budući da svaku funkciju $f \in C_0(\Omega)$ možemo identificirati s funkcijom $\widetilde{f} \in C(\widetilde{\Omega})$, koja se na Ω podudara s f i za koju je $\widetilde{f}(\infty) = 0$, imamo

$$\sigma(f) = \sigma_{C_0(\Omega)}(f) = \sigma_{C(\widetilde{\Omega})}(\widetilde{f}) = f(\Omega) \cup \{0\}.$$

Primjer 2.1.17. Neka je $(\Omega, \mathcal{O})$ izmjeriv prostor i neka je $B_\infty(\Omega)$ skup svih ograničenih kompleksnih izmjerivih funkcija na Ω. Tada je $B_\infty(\Omega)$ unitalna C^*-podalgebra od $\ell^\infty(\Omega)$.

Primjer 2.1.18. Neka je $(\Omega, \mathcal{O}, \mu)$ prostor mjere. Skup $L_\infty(\Omega, \mu)$ koji se sastoji od (klasa ekvivalencije) esencijalno omeđenih kompleksnih izmjerivih funkcija na Ω je unitalna komutativna C^*-algebra uz standardne operacije po točkama, dok je norma dana esencijalnim supremumom:

$$\operatorname{ess\,sup} f = \inf\{C > 0 : \ |f(t)| \le C \text{ za gotovo sve } t \in \Omega\}.$$

Nije teško vidjeti da za $f \in L_\infty(\Omega, \mu)$ vrijedi $\sigma(f) = \mathcal{R}(f)$, gdje $\mathcal{R}(f)$ označava esencijalnu sliku funkcije f, tj. skup svih $\lambda \in \mathbb{C}$ za koje skup $\{t \in \Omega : \ |f(t) - \lambda| < \varepsilon\}$ ima pozitivnu mjeru za sve $\varepsilon > 0$.

Primjer 2.1.19. Neka je $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ jedinični disk u $\mathbb{C}$. Definirajmo skup $A(\mathbb{D})$ koji se sastoji od svih funkcija $f \in C(\mathbb{D})$ koje su holomorfne na interioru od $\mathbb{D}$. Tada je $A(\mathbb{D})$ unitalna zatvorena podalgebra od $C(\mathbb{D})$, budući da je uniformni limes niza holmorfnih funkcija holomorfna funkcija. Dakle, $A(\mathbb{D})$ je unitalna Banachova algebra. Primijetimo da kompleksno konjugiranje ne definira involuciju na $A(\mathbb{D})$ budući da funkcija $z \mapsto \overline{z}$ nije holomorfna. Ipak, $A(\mathbb{D})$ ima strukturu Banachove $*$-algebre s obzirom na involuciju

$$f^\dagger(z) := \overline{f(\overline{z})}$$

(Zadatak 2.6.5). Takva algebra $A(\mathbb{D})$ zove se **algebra diska**. Primijetimo da $A(\mathbb{D})$ nije C^*-algebra. Npr. za funkciju $f \in A(\mathbb{D})$ definiranu s $f(z) = e^{iz}$ imamo

$$\|f\|_\infty^2 = \sup\{|e^{iz}|^2 : \ z \in \mathbb{D}\} = \sup\{e^{-2\operatorname{Im} z} : \ z \in \mathbb{D}\} = \sup\{e^{-2y} : \ y \in [-1,1]\} = e^2,$$

dok je s druge strane

$$f^\dagger(z)f(z) = \overline{e^{i\overline{z}}}e^{iz} = e^{-iz}e^{iz} = 1 \quad \forall z \in \mathbb{D} \quad \Longrightarrow \quad \|f^\dagger f\|_\infty = 1.$$

Primjer 2.1.20. Neka je $\ell_1(\mathbb{Z})$ skup svih funkcija $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ takvih da je

$$\|f\|_1 := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)| < +\infty.$$

Tada je $\ell_1(\mathbb{Z})$ Banachov prostor uz operacije s obzirom na operacije po točkama i normom $\|\cdot\|_1$. Množenje funkcija $f, g \in \ell_1(\mathbb{Z})$ definirano je kao njihova konvolucija, tj. kao funkcija $f * g : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ dana s

$$(f * g)(n) := \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(n-m)g(m) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Budući da vrijedi

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} |(f*g)(n)| &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(n-m)g(m) \right| \\
&\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |f(n-m)||g(m)| \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n-m)||g(m)| \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(|g(m)| \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n-m)| \right) \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} |g(m)|\|f\|_1 \\
&= \|f\|_1\|g\|_1,
\end{aligned}$$

zaključujemo da je $f * g \in \ell_1(\mathbb{Z})$ i $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$. Nadalje, kako za sve $f, g \in \ell_1(\mathbb{Z})$ i $n \in \mathbb{Z}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
(f*g)(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(n-m)g(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)g(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(m)f(n-m) \\
&= (g*f)(n),
\end{aligned}$$

zaključujemo da je algebra $\ell_1(\mathbb{Z})$ komutativna.

Za svako $n \in \mathbb{Z}$ označimo s χ_n karakterističnu funkciju skupa $\{n\}$ (dakle $\chi_n(m) = \delta_{mn}$). Tada je χ_0 očito jedinica u $\ell_1(\mathbb{Z})$. Također, za sve $m, n \in \mathbb{Z}$ imamo

$$\|\chi_n\|_1 = 1 \quad \text{i} \quad \chi_n * \chi_m = \chi_{m+n} \ \forall m, n \in \mathbb{Z}. \tag{2.5}$$

Nadalje, na $\ell_1(\mathbb{Z})$ definiramo involuciju

$$f^\star(n) := \overline{f(-n)},$$

s obzirom na koju $\ell_1(\mathbb{Z})$ dobiva strukturu unitalne Banachove $*$-algebre. Primijetimo da $\ell_1(\mathbb{Z})$ nije C^*-algebra. Npr, za $f = \chi_0 - \chi_1 - \chi_2$ imamo $\|f\|_1^2 = 9$. S druge strane, imamo

$$f^\star * f = -\chi_{-2} + 3\chi_0 - \chi_2 \quad \Longrightarrow \quad \|f^\dagger * f\|_1 = 5.$$

Primjer 2.1.21. Neka je $L_1(\mathbb{R})$ skup svih (klasa ekvivalencije) Borelovih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ za koje je

$$\|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, d\lambda(x) < \infty,$$

gdje λ označava Lebesgueovu mjeru na $\mathbb{R}$. Tada je $L_1(\mathbb{R})$ Banachov prostor uz operacije po točkama i normom $\|\cdot\|_1$. Za $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ definiramo njihovu konvoluciju kao funkciju $f*g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ danu s

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\, d\lambda(y).$$

Slično kao u Primjeru 2.1.20 (koristeći Fubinijev teorem i translacionu invarijantnost Lebesgueove mjere) dobivamo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |(f*g)(x)|\, d\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\, d\lambda(y) \right| d\lambda(x) \\
&\le \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)| d\lambda(y) \right) d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} |g(y)|\, d\lambda(y) \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, d\lambda(x) \right),
\end{aligned}$$

odakle slijedi da je $f * g \in L_1(\mathbb{R})$ i $\|f*g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$. Dakle, $L_1(\mathbb{R})$ je s obzirom na konvoluciju komutativna Banachova algebra.

Primijetimo da algebra $L_1(\mathbb{R})$ nije unitalna. Pretpostavimo suprotno i neka je $e \in L_1(\mathbb{R})$ takva da je $e * f = f$ za sve $f \in L_1(\mathbb{R})$. Tada za $\varepsilon = \frac{1}{2}$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve izmjerive skupove A u $\mathbb{R}$ vrijedi

$$\lambda(A) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \int_A |e(x)|\, d\lambda(x) < \frac{1}{2}. \tag{2.6}$$

Posebno, za $A = [-\frac{\delta}{4}, \frac{\delta}{4}]$ i $f = \chi_A$ dobivamo

$$1 = f(0) = (e * f)(0) = \int_A e(0-y)f(y)\, d\lambda(y) = -\int_A e(y)\, d\lambda(y),$$

što je u kontradikciji s (2.6).

Iz Primjera 2.5.13 će slijediti da je za $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\sigma(f) = \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{itx}\, d\lambda(x) : \ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Napomena 2.1.22. Primjeri 2.1.20 i 2.1.21 su samo specijalni slučajevi algebre $L^1(G)$, gdje je G lokalno kompaktna (Hausdorffova) grupa. Naime, svaka takva grupa G dozvoljava pozitivnu regularnu Borelovu mjera na G koja je lijevo translaciono invarijantna, tj. vrijedi $\mu(xE) = \mu(E)$ za sve Borelove skupove E i $x \in G$). Takva mjera se zove **lijeva Haarova mjera** i ona je jedinstvena do na pozitivnu konstantu. Fiksirajmo lijevu Haarovu mjeru μ na G i definirajmo $L^1(G)$ kao skup svih (klasa ekvivalencije) Borelovih funkcija $f : G \to \mathbb{C}$ za koje je

$$\|f\|_1 := \int_G |f| \, d\mu < \infty$$

Konvolucija funkcija $f, g \in L^1(G)$ je dana s

$$(f * g)(x) := \int_G f(y) g(y^{-1}x) \, d\mu(y).$$

Tada $L^1(G)$ postaje Banachova algebra koja se zove **grupovna algebra** od G. Nije teško vidjeti da je algebra $L^1(G)$ komutativna ako i samo ako je grupa G Abelova.

Primjer 2.1.23. Neka je X normiran prostor. Tada je skup $\mathbb{B}(X)$ svih ograničenih operatora na X unitalna normirana algebra uz standardnu linearnu strukturu, kompoziciju operatora kao množenje i operatorsku normu (1.1). Ako je $\dim X > 1$, algebra $\mathbb{B}(X)$ je nekomutativna. Nadalje, $\mathbb{B}(X)$ je Banachova algebra ako i samo ako je X Banachov prostor.

Primjer 2.1.24. Ako je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor tada je $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ unitalna C^*-algebra, uz adjungiranje operatora kao involuciju. Posebno, sve matrične algebre $\mathbb{M}_n \cong \mathbb{B}(\mathbb{C}^n)$ su C^*-algebre.

2.2 Osnovna svojstva Banachovih algebri

Propozicija 2.2.1. *Neka je A unitalna Banachova algebra.*

(i) Ako je $a \in A$ i $\|a\| < 1$, tada je $1 - a \in A^\times$ i vrijedi

$$(1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n, \tag{2.7}$$

gdje je $a^0 := 1$. Specijalno, $\|(1-a)^{-1}\| \leq (1 - \|a\|)^{-1}$.

(ii) Grupa $A^\times$ invertibilnih elemenata u A je otvoren skup u A.

(iii) Invertiranje $a \mapsto a^{-1}$ je neprekidna bijekcija s $A^\times$ na $A^\times$.

Dokaz. (i). Najprije primijetimo da red u (2.7) konvergira u A, jer je on apsolutno konvergentan ($\|a^n\| \leq \|a\|^n < 1$), a svaki apsolutno konvergentni red u Banachovom prostoru je konvergentan. Označimo njegov limes s b. Tvrdimo da je b inverz od $1 - a$. Zaista, budući da je množenje na A neprekidno (Propozicija 2.1.2), imamo

$$(1-a)b = b - ab = \sum_{n=0}^{\infty} a^n - \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1} = 1$$

i

$$b(1-a) = b - ba = \sum_{n=0}^{\infty} a^n - \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1} = 1.$$

Dakle, $(1-a)^{-1} = b$ i

$$\|(1-a)^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|a\|^n = \frac{1}{1-\|a\|}.$$

(ii). Fiksirajmo element $a \in A^\times$. Tvrdimo da su svi elementi b iz otvorene kugle s centrom u a radijusa $\|a^{-1}\|^{-1}$ invertibilni, tj.

$$\left\{b \in A : \ \|b-a\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}\right\} \subseteq A^\times.$$

Naravno, odatle će direktno slijediti da je $A^\times$ otvoren skup. Neka je stoga $b \in A$ takav da je $\|b-a\| < \|a^{-1}\|^{-1}$. Tada je

$$\|1 - a^{-1}b\| = \|a^{-1}(a-b)\| \leq \|a^{-1}\|\|a-b\| < 1.$$

Iz (i) slijedi da je $a^{-1}b$ invertibilan, pa je i b invertibilan.

(iii). Pretpostavimo da je (a_n) niz u $A^\times$ koji konvergira prema elementu $a \in A^\times$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\|a_n - a\| < \frac{1}{2\|a^{-1}\|},$$

odakle slijedi

$$\|1 - a^{-1}a_n\| < \frac{1}{2}.$$

Kako je

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - a^{-1}a_n)^k = a_n^{-1}a,$$

imamo

$$\|a_n^{-1}a\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2.$$

Slijedi

$$\|a_n^{-1}\| \leq \|a_n^{-1}a\|\|a^{-1}\| \leq 2\|a^{-1}\|,$$

pa

$$\|a_n^{-1} - a^{-1}\| = \|a_n^{-1}(a_n - a)a^{-1}\| \leq 2\|a^{-1}\|^2\|a_n - a\| \longrightarrow 0.$$

□

Ako unitalna normirana algebra A nije potpuna, tada $A^\times$ ne mora biti otvoren podskup od A:

Primjer 2.2.2. Algebru $\mathbb{C}[z]$ možemo normirati na sljedeći način:

$$\|p\| = \sup_{|\lambda|\leq 1} |p(\lambda)| \qquad (p \in \mathbb{C}[z]). \tag{2.8}$$

Budući da je $\mathbb{C}[z]^\times = \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, polinomi $p_n(z) := 1 + z/n$ $(n \in \mathbb{N})$ nisu invertibilni $\mathbb{C}[z]$. S druge strane, kako $\|p_n - 1\| \longrightarrow 0$, zaključujemo da $\mathbb{C}[z]^\times$ nije otvoren skup u $\mathbb{C}[z]$. Posebno, $\mathbb{C}[z]$ uz normu (2.8) nije Banachov prostor.

Ukoliko drugačije nije rečeno, od sada pa nadalje ćemo podrazumijevati da su sve Banachove algebre netrvivijalne (tj. različite od $\{0\}$). Sljedeći rezultat smatra se fundamentalnim teoremom teorije Banachovih algebri:

Teorem 2.2.3. *Neka je A Banachova algebra. Tada je spektar svakog elementa $a \in A$ neprazan kompaktan podskup od $\mathbb{C}$ koji je sadržan u zatvorenom disku $\overline{K}_{\mathbb{C}}(0, \|a\|)$.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je A unitalna algebra. Najprije primijetimo da je $\sigma(a)$ zatvoren podskup od $\mathbb{C}$. Zaista, budući da je $A^\times$ otvoren podskup od A (Propozicija 2.2.1 (ii)), $\rho(a)$ je otvoren skup kao praslika od $A^\times$ po neprekidnom preslikavanju $\lambda \mapsto \lambda 1 - a$. Nadalje, prema Propoziciji 2.2.1 (i) za $|\lambda| > \|a\|$ je element $\lambda 1 - a = \lambda(1 - \lambda^{-1}a)$ invertibilan, odakle slijedi da je $\sigma(a)$ sadržan u zatvorenom disku $\overline{K}_{\mathbb{C}}(0, \|a\|)$. Kako je $\sigma(a)$ zatvoren i omeđen podskup od $\mathbb{C}$, on je kompaktan.

Ostaje dokazati da je $\sigma(a)$ neprazan za sve $a \in A$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji element $a \in A$ takav da je $\sigma(a) = \emptyset$. Tada je njegova rezolventa R_a definirana na čitavoj kompleksnoj ravnini $\mathbb{C}$. Fiksirajmo ograničen linearni funkcional φ na A i definirajmo funkciju $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s $f := \varphi \circ R_a$. Tvrdimo da je f cijela funkcija. Zaista, ako je $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ proizvoljna točka, tada zbog neprekidnosti funkcionala φ, Propozicije 1.3.6 i neprekidnosti invertiranja imamo

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} &= \varphi\left(\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{R_a(\lambda) - R_a(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}\right) = \varphi\left(\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{(\lambda_0 - \lambda) R_a(\lambda) R_a(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}\right) \\
&= -\varphi\left(\lim_{\lambda \to \lambda_0} (\lambda 1 - a)^{-1} (\lambda_0 1 - a)^{-1}\right) = -\varphi\left((\lambda_0 1 - a)^{-2}\right) \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Nadalje, ako je $|\lambda| > \|a\|$, iz Propozicije 2.2.1 (i) slijedi

$$|f(\lambda)| \le \|\varphi\| \|R_a(\lambda)\| = \frac{\|\varphi\|}{|\lambda|} \left\| \left(1 - \frac{a}{\lambda}\right)^{-1} \right\| \le \frac{\|\varphi\|}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \frac{\|a\|}{|\lambda|}} = \frac{\|\varphi\|}{|\lambda| - \|a\|}.$$

Dakle, f je ograničena cijela funkcija s $\lim_{|\lambda| \to \infty} f(\lambda) = 0$, pa iz Liouvilleovog teorema slijedi $f = 0$. Kako je $\varphi \in A^\natural$ bio proizvoljan, prema Korolaru 1.2.6 zaključujemo da je $(\lambda 1 - a)^{-1} = R_a(\lambda) = 0$ za sve $\lambda \in \mathbb{C}$. To je naravno kontradikcija, jer je $A \neq \{0\}$. $\square$

Korolar 2.2.4 (**Geljfand-Mazurov teorem**). *Ako je A unitalna Banachova algebra u kojoj je svaki element različit od 0 invertibilan, tada je A izometrički izomorfna algebri kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$.*

Dokaz. Neka je $a \in A$ proizvoljan element. Prema Teoremu 2.2.3, $\sigma(a) \neq 0$. Za $\lambda \in \sigma(a)$ imamo $\lambda 1 - a \in A \setminus A^\times = \{0\}$, tj. $a = \lambda 1$. Dakle $A = \mathbb{C}1$. Definirajmo preslikavanje $\phi : \mathbb{C} \to A$ s $\phi(\lambda) := \lambda 1$. Tada je ϕ očito izometrički izomorfizam Banachovih algebri. $\square$

Definicija 2.2.5. Neka je A Banachova algebra. **Spektralni radijus** elementa $a \in A$ definiramo kao broj

$$r(a) := \sup\{|\lambda| : \ \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Prema Teoremu 2.2.3, $r(a)$ je dobro definiran broj i vrijedi

$$0 \le r(a) \le \|a\|. \tag{2.9}$$

Sljedeći primjer pokazuje da su ocjene u (2.9) najbolje moguće.

Primjer 2.2.6. (i) Neka je Ω LCH prostor i neka je $f \in C_0(\Omega)$. Tada je prema Primjeru 2.1.16, $\sigma(f) = f(\Omega) \cup \{0\}$, pa je $r(f) = \|f\|$.

(ii) U $A = \mathbb{M}_2$ promotrimo matricu

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Budući da je $a^2 = 0$, imamo $\{0\} = \sigma(a^2) = \sigma(a)^2$ (Propozicija 1.3.3), pa je $r(a) = \{0\}$. S druge strane, imamo

$$\begin{aligned} \|a\| &= \sup\left\{ \left\| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} \right\|_{\mathbb{C}^2} : \left\| \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} \right\|_{\mathbb{C}^2} \leq 1 \right\} = \sup\{|\mu| : |\lambda|^2 + |\mu|^2 \leq 1\} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Istaknimo neka jednostavna svojstva spektralnog radijusa.

Propozicija 2.2.7. *Neka je A Banachova algebra. Tada vrijedi:*

(i) $r(\lambda a) = |\lambda| r(a)$ *za sve* $a \in A$ *i* $\lambda \in \mathbb{C}$.

(ii) $r(a^n) = r(a)^n$ *za sve* $a \in A$ *i* $n \in \mathbb{N}$.

(iii) $r(ab) = r(ba)$ *za sve* $a, b \in A$.

Dokaz. Tvrdnje (i) i (ii) slijede direktno iz Propozicije 1.3.3, a tvrdnja (iii) slijedi direktno iz Propozicije 1.3.4. □

Sljedeći teorem nam daje relativno efikasan način za računanje spektralnog radijusa.

Teorem 2.2.8. *Neka je A Banachova algebra. Za svaki element $a \in A$ vrijedi*

$$r(a) = \inf\{\|a^n\|^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Dokaz. Kao i inače, pretpostavljamo da je A unitalna algebra. Neka je $a \in A$. Iz Propozicije 2.2.7 (ii) i ocjene (2.9) slijedi $r(a) \leq \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ za sve $n \in \mathbb{N}$, pa je

$$r(a) \leq \inf\{\|a^n\|^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\} \leq \liminf_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}. \tag{2.10}$$

Neka je Δ otvoren disk u $\mathbb{C}$ s centrom u 0 radijusa $1/r(a)$ (pri tome uzimamo u obzir konvenciju $1/0 = +\infty$). Tada je $1 - \lambda a \in A^\times$ za sve $\lambda \in \Delta$. Fiksirajmo ograničeni funkcional $\varphi \in A^\natural$ i definirajmo funkciju

$$f : \Delta \to \mathbb{C} \quad \text{s} \quad f(z) := \varphi((1 - \lambda a)^{-1}).$$

Kao u dokazu Teorema 2.2.3, zaključujemo da je f holomorfna funkcija na Δ. Dakle, postoji jedinstveni niz kompleksnih brojeva $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ takav da vrijedi

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \lambda^n \qquad (\lambda \in \Delta). \tag{2.11}$$

S druge strane, ako je $|\lambda| < 1/\|a\| (\leq 1/r(a))$, tada je $\|\lambda a\| < 1$, pa je prema Propoziciji 2.2.1 (i)

$$(1 - \lambda a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a^n.$$

Ako na tu jednakost djelujemo s (neprekidnim) funkcionalom φ, dobivamo

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(a^n) \lambda^n \qquad (|\lambda| < 1/\|a\|). \tag{2.12}$$

Budući da je Talyorov red analitičke funkcije jedinstven, iz (2.11) i (2.12) zaključujemo da je $\lambda_n = \varphi(a^n)$ za sve $n \in \mathbb{Z}_+$. Specijalno niz $(\varphi(a^n)\lambda^n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ konvergira prema 0 za sve $\lambda \in \Delta$, pa je on naravno i omeđen. Budući da je $\varphi \in A^\natural$ bio proizvoljan, prema principu uniformne ograničenosti zaključujemo da je $(\lambda^n a^n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ ograničen niz u A. Dakle, postoji $C(\lambda) > 0$ takav da vrijedi $\|\lambda^n a^n\| \le C(\lambda)$ za sve $n \in \mathbb{Z}_+$, odnosno $\|a^n\|^{\frac{1}{n}} \le C(\lambda)^{\frac{1}{n}}/|\lambda|$ (za $\lambda \neq 0$). Odavde slijedi $\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \le 1/|\lambda|$. Dakle, pokazali smo da iz $r(a) < 1/|\lambda|$ slijedi $\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \le 1/|\lambda|$, pa je

$$\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \le r(a). \tag{2.13}$$

Tvrdnja sada slijedi direktno iz (2.10) i (2.13). □

Prisjetimo se, ako je K neprazan kompaktan podskup od $\mathbb{C}$, njegov komplement $\mathbb{C} \setminus K$ ima točno jednu neomeđenu komponentu povezanosti. Za omeđene komponente povezanosti od $\mathbb{C} \setminus K$ kažemo da su **rupe** od K.

Propozicija 2.2.9. *Neka je B unitalna Banachova podalgebra unitalne Banachove algebre A.*

(i) Skup $B^\times$ je otvoren i zatvoren podskup od $B \cap A^\times$.

(ii) Za sve $b \in B$ vrijedi

$$\sigma_A(b) \subseteq \sigma_B(b) \quad \text{i} \quad \partial\sigma_B(b) \subseteq \partial\sigma_A(b).$$

(iii) Ako je $b \in B$ takav da $\sigma_A(b)$ nema rupa, tada je $\sigma_A(b) = \sigma_B(b)$.

Dokaz. (i). Prema Propoziciji 2.2.1 (ii), $B^\times$ je otvoren podskup od $B \cap A^\times$. Kako bismo pokazali njegovu zatvorenost, neka je (b_n) niz u $B^\times$ koji konvergira prema elementu $b \in B \cap A^\times$. Budući da je invertiranje neprekidno (Propozicija 2.2.1 (iii)), niz (b_n^{-1}) konvergira prema elementu b^{-1} u A, a kako je B zatvorena podalgebra, slijedi $b^{-1} \in B$. Dakle, $b \in B^\times$.

(ii). Kako je $B^\times \subseteq A^\times$, za $b \in B$ imamo $\rho_B(b) \subseteq \rho_A(b)$, odnosno $\sigma_A(b) \subseteq \sigma_B(b)$. Nadalje, ako je $\lambda \in \partial\sigma_B(b) \subseteq \sigma_B(b)$, tada postoji niz (λ_n) u $\rho_B(b)$ koji konvergira prema λ. Tada je $\lambda_n 1 - b \in B^\times$ i $\lambda 1 - b \notin B^\times$, pa iz (i) slijedi da $\lambda 1 - b \notin A^\times$, tj. $\lambda \in \sigma_A(b)$. Nadalje, za sve $n \in \mathbb{N}$ je $\lambda_n 1 - b \in A^\times$, odnosno $\lambda_n \in \rho_A(b)$. Dakle, $\lambda \in \partial\sigma_A(b)$, odakle slijedi inkluzija $\partial\sigma_B(b) \subseteq \partial\sigma_A(b)$.

(iii). Ako je $b \in B$ takav da $\sigma_A(b)$ nema rupa, onda je $\rho_A(b)$ povezan podskup od $\mathbb{C}$. Kako je prema (i) i (ii), $\rho_B(b)$ otvoren i zatvoren podskup od $\rho_A(b)$, zbog povezanosti od $\rho_A(b)$ imamo $\rho_B(b) = \rho_A(b)$, odnosno $\sigma_A(b) = \sigma_B(b)$. □

Sljedeći primjer pokazuje da je općenito $\sigma_A(b)$ pravi podskup od $\sigma_B(b)$ kada $\sigma_A(b)$ ima rupa.

Primjer 2.2.10. Neka je $A(\mathbb{D})$ algebra diska iz Primjera 2.1.19. Ako je $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$ jedinična kružnica u $\mathbb{C}$ tada preslikavanje

$$\phi : A(\mathbb{D}) \to C(\mathbb{T}) \qquad \phi(f) = f|_{\mathbb{T}}$$

definira unitalni izometrički monomorfizam algebre $A(\mathbb{D})$ u algebru $C(\mathbb{T})$, gdje $f|_{\mathbb{T}}$ označava restrikciju od f na $\mathbb{T}$. Naime, izometričnost slijedi iz principa maksimuma modula,

$$\|f\|_{A(\mathbb{D})} = \sup\{|f(z)| : \ z \in \mathbb{D}\} = \sup\{|f(z)| : \ z \in \mathbb{T}\} = \|\phi(f)\|_{C(\mathbb{T})}.$$

Stavimo $A := C(\mathbb{T})$ i $B := \phi(A(\mathbb{D}))$, tako da je B unitalna Banachova podalgebra od A. Ako s a označimo identitetu na $\mathbb{D}$, tj. $a(z) = z$ za sve $z \in \mathbb{D}$, tada je $a \in A(\mathbb{D})$ i $\sigma_{A(\mathbb{D})}(a) = a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, pa je i $\sigma_B(\phi(a)) = \mathbb{D}$. S druge strane je $\sigma_A(\phi(a)) = a(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$.

2.3 Karakteri Banachovih algebri

Neka je A algebra. **Karakter algebre** A je svaki homomorfizam algebri $\varphi : A \to \mathbb{C}$ različit od nule. U daljnjem ćemo s $\Omega(A)$ označavati skup svih karaktera algebre A.

Napomena 2.3.1. Ako je A unitalna algebra, tada je svaki $\varphi \in \Omega(A)$ unitalan. Zaista, iz $\varphi(1) = \varphi(1^2) = \varphi(1)^2$ slijedi da je ili $\varphi(1) = 0$ ili $\varphi(1) = 1$. Kad bi bilo $\varphi(1) = 0$, onda bi za svaki $a \in A$ vrijedilo

$$\varphi(a) = \varphi(a1) = \varphi(a)\varphi(1) = 0,$$

odnosno $\varphi = 0$. Dakle, $\varphi(1) = 1$.

Lema 2.3.2. *Neka je A unitalna algebra i neka je φ linearni funkcional na A. Tada je $\varphi \in \Omega(A)$ ako i samo ako vrijedi*

$$\varphi(1) = 1 \quad i \quad \varphi(a^2) = \varphi(a)^2 \tag{2.14}$$

za sve $a \in A$.

Dokaz. Ako je φ karakter na A, tada radi Napomene 2.3.1, φ očito φ zadovoljava (2.14). Obratno, pretpostavimo da je φ linearni funkcional na A koji zadovoljava (2.14). Tada za proizvoljne elemente $a, b \in A$ imamo

$$\begin{aligned} \varphi(a^2) + \varphi(ab + ba) + \varphi(b^2) &= \varphi(a^2 + ab + ba + b^2) \\ &= \varphi((a + b)^2) = (\varphi(a) + \varphi(b))^2 \\ &= \varphi(a^2) + 2\varphi(a)\varphi(b) + \varphi(b^2), \end{aligned}$$

odnosno

$$\varphi(ab + ba) = 2\varphi(a)\varphi(b).$$

Stoga je dovoljno pokazati da vrijedi $\varphi(ba) = \varphi(ab)$. Kako bismo to pokazali, najprije primijetimo da za proizvoljne elemente $x, y \in A$ vrijedi jednakost

$$(xy - yx)^2 + (xy + yx)^2 = 2[x(yxy) + (yxy)x],$$

pa je

$$\begin{aligned} \varphi(xy - yx)^2 + 4\varphi(x)^2\varphi(y)^2 &= \varphi((xy - yx)^2) + \varphi(xy + yx)^2 \\ &= \varphi((xy - yx)^2 + (xy + yx)^2) \\ &= 2\varphi(x(yxy) + (yxy)x) \\ &= 4\varphi(x)\varphi(yxy). \end{aligned}$$

Ukoliko stavimo $x := a - \varphi(a)1$, tako da je $\varphi(x) = 0$, i $y := b$, dobivamo $\varphi(xb) = \varphi(bx)$, odnosno $\varphi(ab) = \varphi(ba)$. □

Teorem 2.3.3 (Gleason-Kahane-Żelazko). *Neka je A unitalna Banachova algebra. Ako je φ linearni funkcional na A, tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) $\varphi \in \Omega(A)$;

(ii) $\varphi(1) = 1$ *i* $\varphi(a) \neq 0$ *za svaki* $a \in A^\times$;

(iii) $\varphi(a) \in \sigma(a)$ *za sve* $a \in A$.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii). Kako je φ karakter na A imamo $\varphi(1) = 1$ (Napomena 2.3.1), pa je $1 = \varphi(a)\varphi(a^{-1}) = \varphi(a^{-1})\varphi(a)$ za sve $a \in A^\times$. Specijalno, $0 \notin \varphi(A^\times)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Ako je $\lambda \in \rho(a)$, tada je $a - \lambda 1 \in A^\times$, pa je $0 \neq \varphi(a - \lambda 1) = \varphi(a) - \lambda$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Najprije primijetimo da je $\varphi(1) = 1$ (jer je $\sigma(1) = \{1\}$). Prema Lemi 2.3.2, dovoljno je dokazati da vrijedi $\varphi(a^2) = \varphi(a)^2$ za sve $a \in A$. Kako bismo to pokazali, fiksirajmo prirodan broj $n \geq 2$ i definirajmo polinom

$$p(\lambda) := \varphi((\lambda 1 - a)^n)$$

stupnja n. Ako s $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ označimo njegove korijene (brojeći njihove kratnosti), tada za sve $1 \leq i \leq n$ imamo

$$0 = p(\lambda_i) = \varphi((\lambda_i 1 - a)^n) \in \sigma((\lambda_i 1 - a)^n).$$

Iz Propozicije 1.3.3 slijedi $\lambda_i \in \sigma(a)$, pa je $|\lambda_i| \leq r(a)$. Kako je

$$\prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) = p(\lambda) = \lambda^n - n\varphi(a)\lambda^{n-1} + \binom{n}{2}\varphi(a^2)\lambda^{n-2} + \cdots + (-1)^n\varphi(a^n),$$

uspoređujući koeficijente vidimo da je

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = n\varphi(a) \quad \text{i} \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i\lambda_j = \binom{n}{2}\varphi(a^2). \tag{2.15}$$

S druge strane, iz druge jednakosti u (2.15) dobivamo

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i\lambda_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + n(n-1)\varphi(a^2). \tag{2.16}$$

Kombinirajući formule (2.15) i (2.16) dobivamo

$$n^2|\varphi(a)^2 - \varphi(a^2)| = \left| -n\varphi(a^2) + \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right| \leq n|\varphi(a^2)| + nr(a)^2. \tag{2.17}$$

Kako nejednakost (2.17) vrijedi za sve $n \geq 2$, zaključujemo da je $\varphi(a^2) = \varphi(a)^2$, kao što je i trebalo pokazati. $\square$

Napomena 2.3.4. Neka je A algebra bez jedinice i neka je $\widetilde{A}$ njena unitizacija. Budući da za $\psi \in \Omega(\widetilde{A})$ mora vrijediti $\psi(1) = 1$, svaki karakter $\varphi \in \Omega(A)$ možemo na jedinstven način proširiti do karaktera $\widetilde{\varphi} \in \Omega(\widetilde{A})$ koji je definiran s

$$\widetilde{\varphi}(a + \lambda 1) := \varphi(a) + \lambda \qquad (a \in A,\ \lambda \in \mathbb{C}).$$

Stavimo $\widetilde{\Omega}(A) := \{\widetilde{\varphi} :\ \varphi \in \Omega(A)\}$. Štoviše, ako s φ_∞ označimo homomorfizam s $\widetilde{A}$ u $\mathbb{C}$ s jezgrom A, tj. $\varphi_\infty(a + \lambda 1) := \lambda$, imamo

$$\Omega(\widetilde{A}) = \widetilde{\Omega}(A) \cup \{\varphi_\infty\}.$$

Zaista, ako je $\psi \in \Omega(\widetilde{A})$ i $\psi \neq \varphi_\infty$, tada je $\psi|_A \in \Omega(A)$; dakle $\psi = \widetilde{\psi|_A}$. Ako identificiramo $\Omega(A)$ s $\widetilde{\Omega}(A) \subseteq \Omega(\widetilde{A})$, imamo $\Omega(\widetilde{A}) = \Omega(A) \cup \{\varphi_\infty\}$.

Korolar 2.3.5. *Neka je A Banachova algebra. Tada je svaki $\varphi \in \Omega(A)$ ograničen linearni funkcional na A i vrijedi $|\varphi(a)| \leq r(a)$ za sve $a \in A$. Specijalno $\|\varphi\| \leq 1$ i $\|\varphi\| = 1$ ako je A unitalna.*

Dokaz. Uzevši u obzir Napomenu 2.3.4 možemo pretpostaviti da je A unitalna. Tada iz teorema 2.3.3 i (2.9) slijedi $|\varphi(a)| \leq r(a) \leq \|a\|$ za sve $a \in A$, pa je $\|\varphi\| \leq 1$. Nadalje, iz $\varphi(1) = 1$ slijedi $\|\varphi\| = 1$. □

Neka je A Banachova algebra. Iz prethodnog korolara slijedi da je $\Omega(A) \subseteq \mathrm{Ball}(A^\natural)$. Kao što znamo, familija funkcionala iz $\mathrm{Ball}(A^\natural)$ razdvaja točke od A, pa je prirodno pitati se vrijedi li isti zaključak i za familiju karaktera $\Omega(A)$ na A. Odgovor na to pitanje je općenito negativan. Štoviše, može se desiti da je $\Omega(A) = \emptyset$, čak i ako je A komutativna.

Primjer 2.3.6. Neka je A Banachova algebra. Za element $a \in A$ kažemo da je **kvazinilpotentan** ako vrijedi $r(a) = 0$. Ako je svaki element $a \in A$ kvazinilpotentan, tada je prema Korolaru 2.3.5, $\Omega(A) = \emptyset$. Trivijalan primjer takve komutativne algebre dobivamo na sljedeći način: Neka je A Banachov prostor i na A definirajmo trivijalni produkt, tj. $ab := 0$ za sve $a, b \in A$. Tada je očito $r(a) = 0$ za sve $a \in A$.

Napomenimo da postoje i netrivijalni primjeri komutativnih Banachovih algebri u kojima je svaki element kvazinilpotentan (Zadatak 2.6.23).

S druge strane, ako je A unitalna komutativna Banachova algebra, tada je uvijek $\Omega(A) \neq \emptyset$. Štoviše, vrijedi sljedeći bitan rezultat:

Teorem 2.3.7. *Neka je A komutativna Banachova algebra. Tada je preslikavanje*

$$\Theta : \Omega(A) \to \mathrm{Max}(A), \qquad \Theta(\varphi) := \ker \varphi = \{a \in A : \ \varphi(a) = 0\}$$

bijekcija sa skupa $\Omega(A)$ svih karaktera na A na skup $\mathrm{Max}(A)$ svih modularnih maksimalnih ideala u A.

Za dokaz Teorema 2.3.7 trebat će nam sljedeći rezultat:

Lema 2.3.8. *Neka je A Banachova algebra i neka je I pravi modularni ideal u A. Ako je $e \in A$ jedinica modulo I, tada je $I \cap K_A(e, 1) = \emptyset$. Posebno:*

(i) $\overline{I}$ je također pravi ideal u A.

(ii) Svaki modularni maksimalni ideal M u A je zatvoren.

Dokaz. Neka je A' algebra definirana na sljedeći način: $A' = A$ ako je A unitalna, odnosno $A' = \widetilde{A}$ ako A nije unitalna. Ako je $a \in A$ takav da je $\|a - e\| < 1$, tada je prema Propoziciji 2.2.1 (i) $1 - (e - a)$ invertibilan u A'. Ako je $(1 - (e - a))^{-1} = b + \lambda 1$ za neke $b \in A$ i $\lambda \in \mathbb{C}$, tada imamo

$$1 = \lambda 1 + b - \lambda e - be + \lambda a + ba.$$

Kako bismo dobili kontradikciju, pretpostavimo da je $a \in I$. Ako je $1 \in A$, tada je

$$1 = \lambda 1 - (\lambda 1)e + b - be + (\lambda 1 + b)a \in I,$$

što je nemoguće. Ako $1 \notin A$, tada je

$$(1 - \lambda)1 = b - \lambda e - be + \lambda a + ba \in A,$$

odakle slijedi $\lambda = 1$ i $e = b - be + a + ba \in I$, kontradikcija. Dakle, $a \notin I$. □

Dokaz Teorema 2.3.7. Ako je $\varphi \in \Omega(A)$, tada je $\ker\varphi$ zatvoreni ideal u A kodimenzije 1. Kako bismo provjerili modularnost od $\ker\varphi$, izaberimo $e \in A$ takav da je $\varphi(e) = 1$. Tada za sve $a \in A$ imamo

$$\varphi(ea - a) = \varphi(e)\varphi(a) - \varphi(a) = 0,$$

pa je $ea - a \in \ker\varphi$. Dakle, e je jedinica modulo ideal $\ker\varphi$, pa je $\ker\varphi$ modularni maksimalni ideal.

Pokažimo injektivnost preslikavanja Θ. Neka su $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega(A)$ takvi da je $\ker\varphi_1 = \ker\varphi_2$; označimo taj ideal s I. Neka je e jedinica modulo I. Budući da je I kodimenzije 1, svaki element $a \in A$ možemo na jedinstven način prikazati u obliku

$$a = \lambda e + b \qquad (\lambda \in \mathbb{C},\ b \in I).$$

Kako je $\varphi(e) = 1$ za svaki homomorfizam φ s $\ker\varphi = I$, imamo

$$\varphi_1(a) = \lambda\varphi_1(e) + \varphi_1(b) = \lambda = \lambda\varphi_2(e) + \varphi_2(b) = \varphi_2(a),$$

a kako je $a \in A$ bio proizvoljan, zaključujemo $\varphi_1 = \varphi_2$.

Ostaje dokazati surjektivnost preslikavanja Θ. Neka je $M \in \mathrm{Max}(A)$. Prema Lemi 2.3.8, M je zatvoren ideal u A. Nadalje, prema Propoziciji 1.3.11, svaki element Banachove algebre A/M je invertibilan, pa je prema Geljfand-Mazurovom teoremu (Teorem 2.2.4) A/M izometrički izomorfna algebri $\mathbb{C}$. Ukoliko s ϕ označimo izomorfizam $A/M \cong \mathbb{C}$ i s $q_M : A \to A/M$ pripadno kvocijentno preslikavanje, tada je $\varphi := \phi \circ q_M \in \Omega(A)$ i $\Theta(\varphi) = \ker\varphi = M$. □

Korolar 2.3.9. *Neka je A unitalna komutativna Banachova algebra. Tada je $\Omega(A) \neq \emptyset$.*

Dokaz. Prema Propoziciji 1.3.8 ideal $\{0\}$ je sadržan u nekom maksimalnom idealu koji je prema Teoremu 2.3.7 jezgra nekog karaktera na Ω. Posebno, $\Omega(A) \neq \emptyset$. □

Definicija 2.3.10. Neka je A komutativna Banachova algebra. **Radikal** $\mathrm{rad}(A)$ od A je definiran kao presjek svih modularnih maksimalnih ideala u A. Ukoliko je $\mathrm{Max}(A) = \emptyset$, tada definiramo $\mathrm{rad}(A) := A$.

Prema Teoremu 2.3.7 imamo

$$\mathrm{rad}(A) = \bigcap\{M :\ M \in \mathrm{Max}(A)\} = \bigcap\{\ker\varphi :\ \varphi \in \Omega(A)\}.$$

Očito je $\mathrm{rad}(A)$ zatvoren ideal u A.

Definicija 2.3.11. Za komutativnu Banachovu algebru A kažemo da je **poluprosta** ako je $\mathrm{rad}(A) = \{0\}$, odnosno **radikalna** ako je $\mathrm{rad}(A) = A$.

Istaknimo sljedeće dvije interesantne posljedice Korolara 2.3.5:

Korolar 2.3.12. *Neka je $\phi : A \to B$ homomorfizam komutativnih Banachovih algebri A i B. Ako je B poluprosta, tada je ϕ neprekidan.*

Dokaz. Prema teoremu o zatvorenom grafu, dovoljno je dokazati sljedeće: Ako je (a_n) niz u A koji konvergira prema 0 i ako niz $(\phi(a_n))$ konvergira prema elementu $b \in B$, tada je $b = 0$. Kako bismo to pokazali, fiksirajmo karakter $\varphi \in \Omega(B)$. Tada je $\varphi \circ \phi \in \Omega(A) \cup \{0\}$, pa su prema Korolaru 2.3.5 oba preslikavanja φ i $\varphi \circ \phi$ neprekidna. Slijedi

$$\varphi(b) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\phi(a_n)) = \lim_{n\to\infty} (\varphi \circ \phi)(a_n) = 0.$$

Budući da je $\varphi \in \Omega(B)$ bio prozivoljan, te kako je B poluprosta, slijedi $b = 0$. □

Korolar 2.3.13. *Neka je A poluprosta komutativna Banachova algebra. Svake dvije norme na A uz koje je A Banachova algebra su međusobno ekvivalentne.*

Dokaz. Neka su $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ dvije norme uz koje je A Banachova algebra. Prema Korolaru 2.3.12, identiteta id_A je neprekidna kao funkcija $(A, \|\cdot\|_1) \to (A, \|\cdot\|_2)$ i kao funkcija $(A, \|\cdot\|_2) \to (A, \|\cdot\|_1)$. Dakle, postoje konstante $0 \leq m \leq M$ takve da je

$$m\|a\|_1 \leq \|a\|_2 \leq M\|a\|_1 \quad \forall a \in A.$$

□

Na kraju ove točke istaknimo i jednu zgodnu primjenu Korolara 2.3.12. Najprije napomenimo da bismo slično kao u Zadatku 2.6.7 pokazali da je prostor $C^n([0,1])$ $(n \in \mathbb{N})$ svih n-puta neprekidno derivabilnih kompleksnih funkcija na segmentu $[0,1]$ komutativna Banachova algebra uz operacije po točkama i normu

$$\|f\| := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\|f^{(k)}\|_\infty.$$

Označimo s $C^\infty([0,1])$ algebru svih beskonačno puta derivabilnih kompleksnih funkcija na $[0,1]$. Prirodno je pitati se postoji li norma na algebri $C^\infty([0,1])$ uz koju ona postaje Banachova algebra. Odgovor na to pitanje je negativan:

Korolar 2.3.14. *Na algebri $C^\infty([0,1])$ ne postoji norma uz koju ona postaje Banachova algebra.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno i neka je $\|\cdot\|$ norma na $C^\infty([0,1])$ takva da je $(C^\infty([0,1]), \|\cdot\|)$ Banachova algebra. Prema Korolaru 2.3.12, identiteta $\mathrm{id} : (C^\infty([0,1]), \|\cdot\|) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ je neprekidna funkcija, pa postoji konstanta $C > 0$ takva da vrijedi

$$\|f\|_\infty \leq C\|f\| \quad \forall f \in C^\infty([0,1]). \tag{2.18}$$

Koristeći tu nejednakost, pokazat ćemo da je operator deriviranja $D : C^\infty([0,1]) \to C^\infty([0,1])$, $D : f \mapsto f'$ neprekidan, Zaista, neka je (f_n) niz u $C^\infty([0,1])$ takav da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\| = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n' - g\| = 0$$

za neku funkciju $g \in C^\infty([0,1])$. Tada je prema (2.18)

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n' - g\|_\infty = 0.$$

Fiksirajmo točke $x, y \in [0,1]$ takve da je $x < y$. Iz

$$\begin{aligned} \left|\int_x^y g(t)\,dt\right| &\leq |f_n(y) - f_n(x)| + \left|\int_x^y (f_n'(t) - g(t))\,dt\right| \\ &\leq 2\|f_n\|_\infty + |y - x|\|f_n' - g\|_\infty, \end{aligned}$$

slijedi $\int_x^y g(t) = 0$. Kako su točke x i y bile proizvoljne, zaključujemo da je $g = 0$. Neprekidnost od D sada slijedi iz teorema o zatvorenom grafu. Dakle, postoji konstanta $D > 0$ takva da vrijedi

$$\|f'\| \leq D\|f\| \quad \forall f \in C^\infty([0,1]). \tag{2.19}$$

Definirajmo funkciju $f(t) := e^{2Dt}$ $(t \in [0,1])$. Tada je prema (2.19)

$$2D\|f\| = \|f'\| \leq D\|f\|,$$

odakle slijedi $D = 0$; kontradikcija. □

2.4 Geljfandova teorija za komutativne Banachove algebre

U ovoj točki ćemo razviti osnovne elemente Geljfandove teorije koja reprezentira (poluproste) komutativne Banachove algebre kao algebre neprekidnih funkcija na LCH prostorima.

Neka je A komutativna Banachova algebra. Prema Korolaru 2.3.5 skup karaktera $\Omega(A)$ na A je sadržan u jediničnoj kugli $\mathrm{Ball}(A^\natural)$ duala $A^\natural$ od A. Relativna w^*-topologija na $\Omega(A)$ se zove **Geljfandova topologija**. Eksplicitno, bazu okolina karaktera $\varphi_0 \in \Omega(A)$ čine svi skupovi oblika

$$U_{\Omega(A)}(\varphi_0, a_1, \ldots, a_n, \varepsilon) = \{\varphi \in \Omega(A) : \ |\varphi(a_1) - \varphi_0(a_1)| < \varepsilon, \ldots, |\varphi(a_n) - \varphi_0(a_n)| < \varepsilon\},$$

gdje su $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in A$ i $\varepsilon > 0$.

Definicija 2.4.1. Skup $\Omega(A)$ snabdjeven s Geljfandovom topologijom zove se **Geljfandov spektar** od A.

Propozicija 2.4.2. *Neka je A komutativna Banachova algebra.*

(i) Ako je A unitalna, tada je $\Omega(A)$ kompaktan Hausdorffov prostor.

(ii) Ako A nije unitalna, tada je $\Omega(A)$ lokalno kompaktan Hausdorffov prostor. Štoviše, ako $\Omega(A)$ nije kompaktan, tada je $\Omega(\widetilde{A}) = \Omega(A) \cup \{\varphi_\infty\}$ Aleksandrovljeva kompaktifikacija od $\Omega(A)$.

Dokaz. (i). Prema Banach-Alaogluovom teoremu (Teorem 1.2.10) $\mathrm{Ball}(A^\natural)$ je w^*-kompaktna. Budući da je $\Omega(A) \subseteq \mathrm{Ball}(A^\natural)$, dovoljno je pokazati da je $\Omega(A)$ w^*-zatvoren podskup. Neka je $\varphi_0 \in \overline{\Omega(A)}^{w^*}$. Trebamo pokazati da je $\varphi_0 \in \Omega(A)$, odnosno da je

$$\varphi_0(ab) = \varphi_0(a)\varphi_0(b) \quad \forall a, b \in A \quad \& \quad \varphi_0(1) = 1.$$

Neka su $a, b \in A$ i $\varepsilon > 0$. Stavimo $\delta := (1 + \|a\| + |\varphi_0(b)|)^{-1}\varepsilon$ i definirajmo skup

$$\begin{aligned} V &:= U_{A^\natural}(\varphi_0, 1, \varepsilon) \cap U_{A^\natural}(\varphi_0, a, b, ab, \delta) \\ &= \{\varphi \in A^\natural : \ |\varphi(1) - \varphi_0(1)| < \varepsilon, \ |\varphi(a) - \varphi_0(a)| < \delta, \ |\varphi(b) - \varphi_0(b)| < \delta, \ |\varphi(ab) - \varphi_0(ab)| < \delta\}. \end{aligned}$$

Tada je V w^*-otvorena okolina točke φ_0 u $A^\natural$, pa je $V \cap \Omega(A) \neq \emptyset$. Neka je $\varphi \in V \cap \Omega(A)$. Tada je prije svega $\varphi(1) = 1$, pa slijedi

$$|1 - \varphi_0(1)| = |\varphi(1) - \varphi_0(1)| < \varepsilon.$$

Kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, slijedi $\varphi_0(1) = 1$. Nadalje, kako je φ karakter, vrijedi jednakost $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, pa imamo redom:

$$\begin{aligned} |\varphi_0(ab) - \varphi_0(a)\varphi_0(b)| &= |(\varphi_0(ab) - \varphi(ab)) + (\varphi(a)\varphi(b) - \varphi_0(a)\varphi_0(b))| \\ &= |(\varphi_0(ab) - \varphi(ab)) + \varphi(a)(\varphi(b) - \varphi_0(b)) + \varphi_0(b)(\varphi(a) - \varphi_0(b))| \\ &\leq |\varphi_0(ab) - \varphi(ab)| + |\varphi(a)||\varphi(b) - \varphi_0(b)| + |\varphi_0(b)||\varphi(a) - \varphi_0(a)| \\ &< (1 + \|a\| + |\varphi_0(b)|)\delta = \varepsilon. \end{aligned}$$

Kako su $a, b \in A$ i $\varepsilon > 0$ bili proizvoljni, zaključujemo da je φ_0 multiplikativan. Dakle, $\varphi_0 \in \Omega(A)$.

(ii). Pretpostavimo da A nije unitalna algebra. Koristeći identifikaciju $\Omega(\widetilde{A}) = \Omega(A) \cup \{\varphi_\infty\}$ iz Napomene 2.3.4, za $\varphi \in \Omega(A)$, $\varepsilon > 0$ i konačan podskup F od A imamo

$$U_{\Omega(\widetilde{A})}(\varphi, F, \varepsilon) = \begin{cases} U_{\Omega(A)}(\varphi, F, \varepsilon) \cup \{\varphi_\infty\} & : \ |\varphi(a)| < \varepsilon \ \forall a \in F \\ U_{\Omega(A)}(\varphi, F, \varepsilon) & : \ \text{inače.} \end{cases}$$

Odavde slijedi da se Geljfandova topologija na $\Omega(A)$ podudara s relativnom Geljfandovom topologijom na $\Omega(\widetilde{A})$. Budući da je jednočlan skup $\{\varphi_\infty\}$ zatvoren u $\Omega(\widetilde{A})$, slijedi da je $\Omega(A) = \Omega(\widetilde{A}) \setminus \{\varphi_\infty\}$ otvoren podskup kompaktnog prostora $\Omega(\widetilde{A})$, pa je kao takav lokalno kompaktan.

Nadalje, za $a \in A$ i $\varepsilon > 0$ imamo

$$\begin{aligned} U_{\Omega(\widetilde{A})}(\varphi_\infty, a, \varepsilon) &= \{\varphi_\infty\} \cup \{\varphi \in \Omega(A) : \ |\varphi(a)| < \varepsilon\} \\ &= \Omega(\widetilde{A}) \setminus \{\psi \in \Omega(\widetilde{A}) : \ |\psi(a)| \geq \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Budući da su skupovi $\{\psi \in \Omega(\widetilde{A}) : \ |\psi(a)| \geq \varepsilon\}$ $(a \in A)$ zatvoreni u $\Omega(\widetilde{A})$, oni su kompaktni. Nadalje, kako je komplement bazne okoline od φ_∞ konačna unija takvih kompaktnih skupova, zaključujemo da je $\Omega(\widetilde{A})$ Aleksandrovljeva kompaktifikacija od $\Omega(A)$, ako $\Omega(A)$ nije kompaktan. $\square$

Neka je A komutativna Banachova algebra. Za element $a \in A$ definiramo funkciju

$$\hat{a} : \Omega(A) \to \mathbb{C} \quad \text{s} \quad \hat{a}(\varphi) := \varphi(a).$$

Prema definiciji Geljfandove topologije na $\Omega(A)$, funkcija $\hat{a}$ je očigledno neprekidna.

Definicija 2.4.3. Preslikavanje $\Gamma_A : A \to C(\Omega(A))$ definirano s $\Gamma_A : a \mapsto \hat{a}$ zove se **Geljfandova transformacija** od A.

Osnovna svojstva Geljfandove transformacije dana su u sljedećem teoremu:

Teorem 2.4.4. *Neka je A komutativna Banachova algebra takva da je $\Omega(A) \neq \emptyset$ i neka je $\Gamma = \Gamma_A$ Geljfandova trasformacija od A.*

(i) Γ *je homomorfizam algebri. Ako je A unitalna algebra, tada je Γ unitalni homomorfizam.*

(ii) $\Gamma(A)$ *razdvaja točke od $\Omega(A)$ i vrijedi $\Gamma(A)(\varphi) \neq \{0\}$ za sve $\varphi \in \Omega(A)$.*

(iii) Ako je A unitalna algebra, tada je $\sigma(a) = \hat{a}(\Omega(A))$. Specijalno, za $a \in A$ vrijedi $a \in A^\times$ ako i samo ako $\hat{a} \in C(\Omega(A))^\times$. Ako A nije unitalna algebra, tada je $\sigma(a) = \hat{a}(\Omega(A)) \cup \{0\}$.

(iv) $\Gamma(A) \subseteq C_0(\Omega(A))$ *i za sve $a \in A$ vrijedi $\|\hat{a}\|_\infty = r(a)$. Specijalno, Γ je kontraktivni homomorfizam s A u $C_0(\Omega(A))$.*

(v) $\ker\Gamma = \operatorname{rad}(A)$. *Specijalno, Γ je injektivna ako i samo ako je A poluprosta.*

(vi) Γ *je izometrija ako i samo ako vrijedi $\|a^2\| = \|a\|^2$ za sve $a \in A$.*

Dokaz. (i). Neka su $a, b \in A$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Tada za svaki $\varphi \in \Omega(A)$ imamo

$$\begin{aligned} (\widehat{\alpha a + \beta b})(\varphi) &= \varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha\hat{a}(\varphi) + \beta\hat{b}(\varphi) \\ &= (\alpha\hat{a} + \beta\hat{b})(\varphi), \end{aligned}$$

$$\widehat{ab}(\varphi) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \hat{a}(\varphi)\hat{b}(\varphi),$$

odakle slijedi da je Γ homomorfizam algebri. Ako je A unitalna algebra, tada prema Napomeni 2.3.1 imamo $\hat{1}(\varphi) = \varphi(1) = 1$, odakle slijedi da je Γ unitalni homomorfizam.

(ii). Tvrdnja je trivijalna.

(iii). Najprije pretpostavimo da je A unitalna algebra. Tada je prema Teoremu 2.3.3, $\varphi(a) \in \sigma(a)$ za sve $\varphi \in \Omega(A)$, odakle slijedi $\hat{a}(\Omega(A)) \subseteq \sigma(a)$. Obratno, za $\lambda \in \sigma(a)$ element $\lambda 1 - a$ nije invertibilan, pa prema Korolaru 1.3.9 postoji $M \in \mathrm{Max}(A)$ takav da je $\lambda 1 - a \in M$. Nadalje, prema Teoremu 2.3.7 postoji (jedinstven) $\varphi \in \Omega(A)$ takav da je $M = \ker\varphi$, odakle slijedi $\lambda - \varphi(a) = \varphi(\lambda 1 - a) = 0$, odnosno $\lambda = \varphi(a)$. Dakle, $\hat{a}(\Omega(A)) = \sigma(a)$. Specijalno,

$$\hat{a} \in C(\Omega(A))^\times \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{a}(\varphi) \neq 0 \ \forall \varphi \in \Omega(A) \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \notin \sigma(a).$$

Ako algebra A nije unitalna, tada prema definiciji spektra, prvom dijelu dokaza i Napomeni 2.3.4 za element $a \in A$ imamo

$$\begin{aligned} \sigma_A(a) &= \sigma_{\widetilde{A}}(a) = \hat{a}(\Omega(\widetilde{A})) = \{\varphi(a) : \ \varphi \in \Omega(A)\} \cup \{\varphi_\infty(a)\} \\ &= \hat{a}(\Omega(A)) \cup \{0\}. \end{aligned}$$

(iv). Prema (iii), za $a \in A$ imamo

$$\|\hat{a}\|_\infty = \sup_{\varphi \in \Omega(A)} |\hat{a}(\varphi)| = \sup_{\varphi \in \Omega(A)} |\varphi(a)| = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda| = r(a),$$

pa je prema (2.9),

$$\|\Gamma(a)\|_\infty = \|\hat{a}\|_\infty = r(a) \leq \|a\|.$$

Ostaje još dokazati da je $\Gamma(A) \subseteq C_0(\Omega(A))$. Tu je tvrdnju naravno dovoljno dokazati ako $\Omega(A)$ nije kompaktan. U tom slučaju je prema Propoziciji 2.4.2 (ii), $\Omega(\widetilde{A})$ Aleksandrovljeva kompaktifikacija od $\Omega(A)$. Nadalje, za sve $a \in A$ je $\hat{a}(\varphi_\infty) = 0$, odnosno $\hat{a} \in C_0(\Omega(A))$.

(v). Tvrdnja slijedi direktno iz definicije Geljfandove trasnformacije i radikala.

(vi). Pretpostavimo da vrijedi $\|a^2\| = \|a\|^2$ za sve $a \in A$. Indukcijom dobivamo da je tada i $\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}$ za sve $n \in \mathbb{N}$, pa iz (iv) i Teorema 2.2.8 slijedi

$$\|\Gamma(a)\|_\infty = \|\hat{a}\|_\infty = r(a) = \lim_{n \to \infty} \|a^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \|a\|.$$

Obratno, ako je Γ izometrija, tada je

$$\|a^2\| = \|\widehat{a^2}\|_\infty = \|\hat{a}^2\|_\infty = \|\hat{a}\|_\infty^2 = \|a\|^2.$$

$\square$

Na kraju ove točke napomenimo da za komutativnu Banachovu algebru A općenito ne vrijedi ekvivalencija

$$A \text{ je unitalna} \quad \Longleftrightarrow \quad \Omega(A) \text{ je kompaktan.}$$

Na primjer, za svaku radikalnu algebru imamo $\Omega(A) = \emptyset$. S druge strane, ako je A poluprosta, tada zaista vrijedi gornja ekvivalencija. Taj rezultat je jednostavno posljedica sljedećeg interesantnog teorema kojeg navodimo bez dokaza :

Teorem 2.4.5 (Šilovljev teorem o idempotentu). *Neka je A komutativna Banachova algebra i neka je K kompaktan otvoren podskup od $\Omega(A)$. Tada postoji idempotent $a \in A$ takav da je $\hat{a}$ jednaka karakterističnoj funkciji skupa K.*

Korolar 2.4.6. *Neka je A poluprosta komutativna Banachova algebra. Ako je $\Omega(A)$ kompaktan, tada je A unitalna.*

Dokaz. Kako je $\Omega(A)$ kompaktan, prema Teoremu 2.4.5 postoji idempotent $e \in A$ takav da je $\hat{e} = 1$ na $\Omega(A)$. Tvrdimo da je e jedinica u A. Zaista, za $a \in A$ i $\varphi \in \Omega(A)$ imamo $\widehat{(ae - a)}(\varphi) = \hat{a}(\varphi)\hat{e}(\varphi) - \hat{a}(\varphi) = 0$, a budući da je A polu zaključujemo da je $ae - a = 0$, odnosno $ae = a$. $\square$

2.5 Primjeri i primjene

U ovoj točki ćemo opisati Geljfandovu transformaciju na nekim konkretnim primjerima, te ćemo dati i neke njene primjene. Za početak krećemo s jednom jednostavnom posljedicom Teorema 2.4.4, čiji direktni dokaz (tj. bez pozivanja na Geljfandovu transformaciju) ispada relativno "neuredan":

Propozicija 2.5.1. *Neka je A Banachova algebra i neka su a i b dva komutirajuća elementa iz A. Tada vrijedi*

$$r(a+b) \leq r(a) + r(b) \quad \text{i} \quad r(ab) \leq r(a)r(b).$$

Specijalno, komutativna Banachova algebra A je poluprosta ako i samo ako je $(A, r(\cdot))$ normirana algebra.

Napomena 2.5.2. Neka je A unitalna normirana algebra. Ako je $(B_i)_{i\in\mathbb{I}}$ familija zatvorenih unitalnih podalgebri od A, tada je $\bigcap_{i\in\mathbb{I}} B_i$ također zatvorena unitalna podalgebra od A. Dakle, za svaki podskup S od A postoji najmanja zatvorena unitalna podalgebra B od A koja sadrži S; to je presjek svih zatvorenih podalgebri koje sadrže skup $S \cup \{1\}$. Za tu algebru B kažemo da je **generirana skupom** S. Primijetimo da je B zatvarač skupa koji se sastoji od svih (konačnih) linearnih kombinacija (konačnih) produkata elemenata iz $S \cup \{1\}$. Kažemo da je A **konačno generirana** ako postoji konačni podskup od A koji generira A.

Dokaz Propozicije 2.5.1. Budući da spektralni radijus ne ovisi o ambijentalnoj algebri (Teorem 2.2.8), prelaskom na unitizaciju od A i zatim na unitalnu Banachovu podalgebru generiranu sa skupom $\{a, b\}$ možemo pretpostaviti da je A unitalna i komutativna. Tada je prema Teoremu 2.4.4,

$$r(a+b) = \|\hat{a} + \hat{b}\|_\infty \leq \|\hat{a}\|_\infty + \|\hat{b}\|_\infty = r(a) + r(b)$$

i

$$r(ab) = \|\hat{a}\hat{b}\|_\infty \leq \|\hat{a}\|_\infty \|\hat{b}\|_\infty = r(a)r(b).$$

Dakle, spektralni radijus $r(\cdot)$ definira submultiplikativnu polunormu na A. Nadalje, prema Teoremu 2.4.4, $r(\cdot)$ je norma na A ako i samo ako je A poluprosta. $\square$

Neka je A unitalna komutativna Banachova algebra i neka su $a_1, \ldots, a_n \in A$. **Zajednički spektar** od $a_1, \ldots, a_n$ je podskup od $\mathbb{C}^n$ definiran s

$$\sigma(a_1, \ldots, a_n) = \sigma_A(a_1, \ldots, a_n) := \{(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) \ : \ \varphi \in \Omega(A)\}.$$

Budući da je $\Omega(A)$ kompaktan te kako je preslikavanje

$$T : \Omega(A) \to \mathbb{C}^n, \qquad T : \varphi \mapsto (\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) \tag{2.20}$$

neprekidno, $\sigma(a_1, \ldots, a_n)$ je kompaktan podskup od $\mathbb{C}^n$. Primijetimo da iz Teorema 2.4.4 (iii) slijedi da se zajednički spektar jednog elementa a podudara s njegovim (običnim) spektrom $\sigma(a)$.

Propozicija 2.5.3. *Neka je A konačno generirana unitalna komutativna Banachova algebra. Ako su $a_1, \ldots, a_n$ njeni generatori, tada je preslikavanje T iz (2.20) homeomorfizam s $\Omega(A)$ na $\sigma(a_1, \ldots, a_n)$.*

Dokaz. Prema definiciji grupnog spektra, T je očito surjekcija. Neka su $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega(A)$ takvi da je $\varphi_1(a_i) = \varphi_2(a_i)$ za sve $1 \leq i \leq n$. Tada se φ_1 i φ_2 podudaraju i na skupu svih linearnih kombinacija produkata elemenata skupa $\{a_1, \ldots, a_n\} \cup \{1\}$. Budući da je taj skup gust u A i budući da su karakteri neprekidni (Korolar 2.3.5), zaključujemo da je $\varphi_1 = \varphi_2$. Time smo pokazali injektivnost od T. Sve zajedno, T je neprekidna bijekcija s CH prostora $\Omega(A)$ na CH prostor $\sigma(a_1, \ldots, a_n)$; dakle T je homeomorfizam. $\square$

Primjer 2.5.4. Neka je $A(\mathbb{D})$ algebra diska (Primjer 2.1.19). Za svako $z \in \mathbb{D}$ definirajmo funkciju $\varphi_z : A(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$ s $\varphi_z(f) := f(z)$ Tada je $\varphi_z \in \Omega(A(\mathbb{D}))$ i preslikavanje $F : z \mapsto \varphi_z$ definira homeomorfizam s $\mathbb{D}$ na $\Omega(A(\mathbb{D}))$.

Dokaz. Primijetimo da je $A(\mathbb{D})$ generirana s jednočlanim skupom $\{a\}$, gdje je $a(z) = z$ $(z \in \mathbb{D})$. Kako je $\sigma(a) = \mathbb{D}$, prema Propoziciji 2.5.3, preslikavanje $F : \Omega(A(\mathbb{D})) \to \mathbb{D}$ dano s $F : \varphi \mapsto \varphi(a)$ je homeomorfizam. Njegov inverz je očito preslikavanje F. □

Ukoliko identificiramo $\Omega(A(\mathbb{D}))$ s $\mathbb{D}$ preko homeomorfizma $T = F^{-1}$, Geljfandova transformacija od $A(\mathbb{D})$ postaje inkluzija $A(\mathbb{D}) \subseteq C(\mathbb{D})$.

Primjer 2.5.5. Neka je Ω LCH prostor. Za svaki podskup $E \subseteq \Omega$ stavimo

$$I(E) := \{f \in C_0(\Omega) : \ f(t) = 0 \text{ za sve } t \in \ E\}.$$

Tada je preslikavanje $E \mapsto I(E)$ bijekcija sa skupa svih nepraznih zatvorenih podskupova od Ω na skup svih pravih zatvorenih ideala u $C_0(\Omega)$. Pritom vrijedi:

(i) $I(E)$ je modularan ako i samo ako je E kompaktan.

(ii) $I(E) \in \mathrm{Max}(C_0(\Omega))$ ako i samo ako je E jednočlan.

Nadalje, ako za točku $t \in \Omega$ s φ_t označimo karakter na $C_0(\Omega)$ s jezgrom $I(\{t\})$, tj.

$$\varphi_t(f) := f(t) \qquad (f \in C_0(\Omega)),$$

tada je preslikavanje $F : t \mapsto \varphi_t$ homeomorfizam s Ω na $\Omega(C_0(\Omega))$.

Dokaz. Jasno je da je $I(E)$ zatvoren ideal u $C_0(\Omega)$. Budući da za svaku točku $t \in \Omega$ postoji funkcija $f \in C_0(\Omega)$ takva da je $f(t) \neq 0$, slijedi da je $I(E)$ pravi ideal u $C_0(\Omega)$ čim je $E \neq \emptyset$. Štoviše, ako je E zatvoren podskup od Ω i $t \in \Omega \setminus E$, tada prema Urisonovoj lemi postoji funkcija $f \in C_0(\Omega)$ takva da je $f|_E = 0$ i $f(t) \neq 0$. Odavde slijedi da je preslikavanje $E \mapsto I(E)$ injektivno.

Kako bismo pokazali surjektivnost tog preslikavanja, za pravi zatvoren ideal I u $C_0(\Omega)$ definirajmo skup

$$E := \{t \in \Omega : \ f(t) = 0 \text{ za sve } f \in \ I\}.$$

Tada je E zatvoren podskup od Ω i $I \subseteq I(E)$. Tvrdimo da je u stvari $I = I(E)$. Najprije pokažimo da I sadrži skup

$$J := \{g \in C_c(\Omega) : \ E \cap \operatorname{supp} g = \emptyset\},$$

gdje $C_c(\Omega)$, kao i inače, označava skup svih neprekidnih kompleksnih funkcija na Ω s kompaktnim nosačem. Neka je K kompaktan podskup od Ω takav da je $K \cap E = \emptyset$. Tada za svaku točku $t \in K$ postoji funkcija $h_t \in I$ takva da je $h_t(t) \neq 0$. Tada je $|h_t|^2 = h_t h_t^* \in I$ i $|h_t|^2(t) > 0$. Budući da je K kompaktan, postoji konačan podskup F od K takav da je funkcija h defininirana s

$$h(s) := \left(\sum_{t \in F} h_t \cdot h_t^*\right)(s) = \sum_{t \in F} |h_t(s)|^2 \qquad\qquad (s \in \Omega)$$

striktno pozitivna na K. Primijetimo da h leži u I.

Neka je $g \in J$ proizvoljna funkcija. Prema dokazanom, postoji funkcija $h \in I$ takva da je $h(s) > 0$ za sve $s \in \operatorname{supp} g$. Definirajmo funkciju f na Ω na sljedeći način:

$$f(t) := \begin{cases} 0 & : \ t \in \Omega \setminus \operatorname{supp} g \\ \frac{g(t)}{h(t)} & : \ t \in \operatorname{supp} g. \end{cases}$$

Tada se lako provjeri da je f neprekidna. Dakle, $f \in C_0(\Omega)$ i $g = fh \in I$, odakle slijedi $J \subseteq I$.

Nadalje, primijetimo da je J gust podskup od $I(E)$. Zaista, za $f \in I(E)$ i $\varepsilon > 0$ definirajmo skup $K := \{t \in \Omega : \ |f(t)| \geq \varepsilon\}$. Tada je K kompaktan i $K \cap E = \emptyset$. Prema Urisonovoj lemi postoji $h \in C_c(\Omega)$ takva da vrijedi $h(\Omega) \subseteq [0,1]$, $h|_K = 1$ i $\operatorname{supp} h \subseteq \Omega \setminus E$. Tada je $g = fh \in J$ i $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$.

Budući da je I zatvoren, slijedi

$$I(E) \subseteq \overline{J} \subseteq \overline{I} = I \subseteq I(E).$$

Dakle, $I = I(E)$. Također, $E \neq \emptyset$, jer bi inače bilo $C_c(\Omega) \subseteq I$, odnosno $I = C_0(\Omega)$.

Dokažimo sada tvrdnju (i), odakle će odmah slijediti i tvrdnja (ii). Neka je E kompaktan podskup od Ω. Tada postoji funkcija $e \in C_0(\Omega)$ takva da je $e|_E = 1$, odakle slijedi $(1-e)C_0(\Omega) \subseteq I(E)$. Obratno, ako je $I(E)$ modularan, tada postoji funkcija $e \in C_0(\Omega)$ takva da je $(1-e)C_0(\Omega) \subseteq I(E)$. Odavde slijedi $e|_E = 1$, pa je E kompaktan jer je $e \in C_0(\Omega)$.

Ostaje još dokazati da je preslikavanje $F : t \mapsto \varphi_t$ homeomorfizam s Ω na $\Omega(C_0(\Omega))$. Bijektivnost tog preslikavanje slijedi iz tvrdnje (ii) i Teorema 2.3.7. Nadalje, za mrežu (t_i) u Ω i točku $t_0 \in \Omega$ imamo

$$\begin{aligned} t_i \longrightarrow t_0 \ \ (\text{u } \Omega) \quad &\Longleftrightarrow \quad f(t_i) \longrightarrow f(t_0) \quad \text{za sve } f \in C_0(\Omega) \\ &\Longleftrightarrow \quad \varphi_{t_i}(f) \longrightarrow \varphi_{t_0}(f) \quad \text{za sve } f \in C_0(\Omega) \\ &\Longleftrightarrow \quad \varphi_{t_i} \longrightarrow \varphi_{t_0} \ \ (\text{u } \Omega(C_0(\Omega))), \end{aligned}$$

što pokazuje da je preslikavanje F homeomorfizam. □

Ukoliko identificiramo $\Omega(C_0(\Omega))$ s Ω preko homeomorfizma F^{-1}, Geljfandova trasformacija od $C_0(\Omega)$ postaje identiteta na $C_0(\Omega)$.

Napomena 2.5.6. Za LCH prostor Ω označimo s $P(\Omega)$ skup svih vjerojatnosnih mjera na Ω (tj. skup svih pozitivnih regularnih Borelovih mjera μ na Ω za koje je $\mu(\Omega) = 1$). Tada se može dokazati da se skup esktremnih točaka od $P(\Omega)$ podudara sa skupom Diracovih mjera na Ω. Dakle, ako s $\mathcal{S}(C_0(\Omega))$ označimo skup svih pozitivnih linearnih funkcionala φ na $C_0(\Omega)$ norme 1 (tzv. stanja na $C_0(\Omega)$), tada iz Teorema 1.4.6 slijedi da je $\Omega(C_0(\Omega)) = \operatorname{ext}(\mathcal{S}(C_0(\Omega)))$.

Neka je $\phi : A \to B$ algebarski izomorfizam komutativnih Banachovih algebri A i B. Definiramo **transponat** od ϕ kao preslikavanje $\phi^t : \Omega(B) \to \Omega(A)$ koje je dano s

$$\phi^t(\psi) := \psi \circ \phi \qquad (\psi \in \Omega(B)).$$

Primijetimo da je ϕ^t bijekcija (s inverzom $(\phi^t)^{-1}(\varphi) = \varphi \circ \phi^{-1}$, $\varphi \in \Omega(A)$). Štoviše, ϕ^t je homeomorfizam s $\Omega(B)$ na $\Omega(A)$. Zaista, za mrežu (ψ_i) u $\Omega(B)$ i karakter $\psi_0 \in \Omega(B)$ imamo

$$\begin{aligned} \psi_i \longrightarrow \psi_0 \ \ (\text{u } \Omega(B)) \quad &\Longleftrightarrow \quad \psi_i(b) \longrightarrow \psi_0(b) \quad \text{za sve } b \in B \\ &\Longleftrightarrow \quad \psi_i(\phi(a)) \longrightarrow \psi_0(\phi(a)) \quad \text{za sve } a \in A \\ &\Longleftrightarrow \quad \phi^t(\psi_i) \longrightarrow \phi^t(\psi_0) \ \ (\text{u } \Omega(A)). \end{aligned}$$

Propozicija 2.5.7. *Neka su A i B komutativne Banachove algebre. Ako su A i B algebarski izomorfne, tada su prostori $\Omega(A)$ i $\Omega(B)$ homeomorfni.*

Dokaz. Ako je $\phi : A \to B$ algebarski izomorfizam, tada prema prethodnom razmatranju ϕ^t definira homeomorfizam s $\Omega(B)$ na $\Omega(A)$. □

Neka je $F : \Omega_1 \to \Omega_2$ homeomorfizam između LCH prostora Ω_1 i Ω_2. Definiramo **transponat** od F kao preslikavanje $F^t : C_0(\Omega_2) \to C_0(\Omega_1)$ koje je dano s

$$F^t(g) := g \circ F \qquad (g \in C_0(\Omega_2)).$$

Primijetimo da je F^t izometrički izomorfizam Banachovih algebri $C_0(\Omega_2)$ i $C_0(\Omega_1)$. Zaista, F^t je očito algebarski izomorfizam (s inverzom $(F^t)^{-1}(f) := f \circ F^{-1}$, $f \in C_0(\Omega_1)$) i

$$\begin{aligned} \|F^t(g)\|_\infty &= \sup\{|g(F(t))| : \ t \in \Omega_1\} = \sup\{|g(s)| : \ s \in \Omega_2\} \\ &= \|g\|_\infty \end{aligned}$$

za sve $g \in C_0(\Omega_2)$.

Korolar 2.5.8. *Za LCH prostore Ω_1 i Ω_2 su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) Banachove algebre $C_0(\Omega_1)$ i $C_0(\Omega_2)$ su izometrički izomorfne.

(ii) Banachove algebre $C_0(\Omega_1)$ i $C_0(\Omega_2)$ su algebarski izomorfne.

(iii) Prostori Ω_1 i Ω_2 su homeomorfni.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) je trivijalno, a (ii) $\Rightarrow$ (iii) slijedi iz Propozicije 2.5.7 i Primjera 2.5.5. Nadalje, ako je $F : \Omega_1 \to \Omega_2$ homeomorfizam, tada prema prethodnom razmatranju F^t definira izometrički izomorfizam Banachovih algebri $C_0(\Omega_2)$ i $C_0(\Omega_1)$. Time smo pokazali i (iii) $\Rightarrow$ (i). □

U vezi s Korolarom 2.5.8 istaknimo i sljedeći interesantni rezultat kojeg navodimo bez dokaza:

Teorem 2.5.9 (Banach-Stone). *Neka su Ω_1 i Ω_2 LCH prostori. Tada su Banachovi prostori $C_0(\Omega_1)$ i $C_0(\Omega_2)$ izometrički izomorfni ako i samo ako su Ω_1 i Ω_2 homeomorfni. Štoviše, svaka linearna izometrija $T : C_0(\Omega_1) \to C_0(\Omega_2)$ je oblika*

$$T(f) = u \cdot (f \circ F) \qquad (f \in C_0(\Omega_1)),$$

gdje je $F : \Omega_2 \to \Omega_1$ homeomorfizam i $u : \Omega_2 \to \mathbb{T}$ neprekidna funkcija.

Primjer 2.5.10. Neka je $\ell^1(\mathbb{Z})$ grupovna algebra od $\mathbb{Z}$ (Primjer 2.1.20). Za $z \in \mathbb{T}$ definirajmo preslikavanje $\varphi_z : \ell^1(\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$ s

$$\varphi_z(f) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) z^n.$$

Tada je φ_z karakter na $\ell^1(\mathbb{Z})$ i preslikavanje $F : z \mapsto \varphi_z$ je homeomorfizam s $\mathbb{T}$ na $\Omega(\ell^1(\mathbb{Z}))$.

Dokaz. Za svaku točku $z \in \mathbb{T}$ funkcional φ_z je očito linearan i različit od 0. Nadalje, prema Fubinijevom teoremu, za $f, g \in \ell^1(\mathbb{Z})$ imamo

$$\begin{aligned} \varphi_z(f * g) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (f * g)(n) z^n \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} f(n-m) g(m) \right) z^n \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} g(m) \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n-m) z^n \right) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} g(m) \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) z^{m+n} \right) \\ &= \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) z^n \right) \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} g(m) z^m \right) \\ &= \varphi_z(f) \varphi_z(g). \end{aligned}$$

Dakle, $\varphi_z \in \Omega(\ell^1(\mathbb{Z}))$. Pokažimo da je preslikavanje $F : z \mapsto \varphi_z$ homeomorfizam s $\mathbb{T}$ na $\Omega(\ell^1(\mathbb{Z}))$. Za svako $n \in \mathbb{Z}$ označimo s χ_n karakterističnu funkciju skupa $\{n\}$. Tada je χ_0 očito jedinica u $\ell^1(\mathbb{Z})$. Također, za sve $m, n \in \mathbb{Z}$ imamo

$$\|\chi_n\|_1 = 1 \quad \text{i} \quad \chi_n * \chi_m = \chi_{m+n}.$$

Budući da vrijedi $F(z)(\chi_1) = \varphi_z(\chi_1) = z$ za sve $z \in \mathbb{T}$, slijedi da je F injektivno preslikavanje.

Dokažimo i surjektivnost od F. Fiksirajmo proizvoljni karakter $\varphi \in \Omega(\ell^1(\mathbb{Z}))$. Kako je $\chi_1 * \chi_{-1} = 1$, slijedi $\varphi(\chi_1)\varphi(\chi_{-1}) = 1$. Nadalje, kako je $\|\varphi\| \leq 1$ (Korolar 2.3.5), $\varphi(\chi_1)$ i $\varphi(\chi_{-1})$ leže u $\mathbb{D}$. Dakle, $z := \varphi(\chi_1) \in \mathbb{T}$. Tvrdimo da je $\varphi = \varphi_z$. Zaista, kako je φ multiplikativan, za sve $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\varphi(\chi_n) = \varphi(\chi_1 * \chi_1 * \cdots * \chi_1) = \varphi(\chi_1)^n = z^n.$$

Nadalje, iz jednakosti $\chi_n * \chi_{-n} = 1$ slijedi $\varphi(\chi_n) = z^n$ za sve $n \in \mathbb{Z}$. Budući da svaku funkciju $f \in \ell^1(\mathbb{Z})$ možemo reprezentirati u obliku

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)\chi_n,$$

iz linearnosti i neprekidnosti of φ slijedi

$$\begin{aligned} \varphi(f) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)\varphi(\chi_n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)z^n \\ &= \varphi_z(f). \end{aligned}$$

Time smo pokazali surjektivnost od F.

Dokažimo da je preslikavanje F neprekidno. Neka je $(z_i)_{i \in \mathbb{I}}$ mreža u $\mathbb{T}$ koja konvergira prema točki $z_0 \in \mathbb{T}$. Neka je $f \in \ell^1(\mathbb{Z})$, $f \neq 0$. Tada za sve $N \in \mathbb{Z}_+$ imamo

$$\begin{aligned} |\varphi_{z_i}(f) - \varphi_{z_0}(f)| &\leq \sum_{|n| \leq N} |f(n)||z_i^n - z_0^n| + \sum_{|n| > N} |f(n)||z_i^n - z_0^n| \\ &\leq \|f\|_1 \sup_{|n| \leq N} |z_i^n - z_0^n| + 2 \sum_{|n| > N} |f(n)|. \end{aligned}$$

Ako za dano $\varepsilon > 0$ izaberemo $N \in \mathbb{Z}_+$ i $i_0 \in \mathbb{I}$ tako da vrijedi

$$\sum_{|n| > N} |f(n)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{i} \quad \sup_{|n| \leq N} |z_i^n - z_0^n| < \frac{\varepsilon}{2\|f\|_1}$$

za sve $i \geq i_0$, tada dobivamo $|\varphi_{z_i}(f) - \varphi_{z_0}(f)| < \varepsilon$ za sve $i \geq i_0$. Dakle, $\varphi_{z_i} \longrightarrow \varphi_{z_0}$ u $\Omega(\ell^1(\mathbb{Z}))$. Sve zajedno, F je neprekidna bijekcija između CH prostora $\mathbb{T}$ i $\Omega(\ell^1(\mathbb{T}))$, dakle homeomorfizam. $\square$

Ukoliko $\Omega(\ell^1(\mathbb{Z}))$ identificiramo s $\mathbb{T}$ preko homeomorfizma F^{-1}, Geljfandova transformacija postaje homomorfizam algebri $\Gamma : \ell^1(\mathbb{Z}) \to C(\mathbb{T})$, koji je dan s

$$\Gamma(f)(z) = \hat{f}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)z^n \quad (f \in \ell^1(\mathbb{Z}),\ z \in \mathbb{T}).$$

Primijetimo da je $\ell^1(\mathbb{Z})$ poluprosta (odnosno, Γ je injektivna) budući da vrijednosti funkcije $f \in \ell^1(\mathbb{Z})$ možemo rekonstruirati iz Fourierovih koeficijenata od $\hat{f}$. Zaista, ako za funkciju $g \in C(\mathbb{T})$ s $c_n(g)$ označimo njen n-ti Fourierov koeficijent, tj.

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{it})e^{-int}\, dt \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

tada za $g = \hat{f}$ dobivamo

$$\begin{aligned} c_n(\hat{f}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \hat{f}(e^{it})e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m)e^{i(m-n)t}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m)\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t}\,dt = f(n), \end{aligned}$$

pri čemu suma i integral komutiraju zbog apsolutne konvergentnosti reda $\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m)e^{i(m-n)t}$.

Slika od Γ jednaka je skupu $AC(\mathbb{T})$ koji se sastoji od svih funkcija $g \in C(\mathbb{T})$ čiji Fourierov red apsolutno konvergira (tzv. **Wienerova algebra**). Budući da postoje funkcije $g \in C(\mathbb{T})$ čiji Fourierov red ne konvergira apsolutno, kao npr.

$$g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\ln n}}{n} z^n \quad (z \in \mathbb{T}),$$

Γ nije surjekcija. Također primijetimo da iz Teorema 2.4.4 (vi) slijedi da Γ nije izometrija jer za funkciju $f := \chi_1 - \chi_2 - \chi_3$ imamo $\|f\|_1^2 = 9$, ali $\|f^2\|_1 = 7$.

Kao direktnu posljedicu prethodnog razmatranja dobivamo sljedeći netrivijalni rezultat iz klasične Fourierove analize:

Korolar 2.5.11 (Wiener). *Ako je Fourierov red funkcije $g \in C(\mathbb{T})$ apsolutno konvergentan i ako je $g(z) \neq 0$ za sve $z \in \mathbb{T}$, tada je i Fourierov red funkcije $1/f$ apsolutno konvergentan.*

Dokaz. Pretpostavku možemo kratko zapisati u obliku $g \in AC(\mathbb{T})^\times = \Gamma(\ell^1(\mathbb{Z}))^\times$. Neka je $f \in \ell^1(\mathbb{Z})$ takva da je $g = \hat{f} = \Gamma(f)$. Tada iz Teorema 2.4.4 (iii) slijedi $f \in \ell^1(\mathbb{Z})^\times$. Ako je f^{-1} inverz od f u $\ell^1(\mathbb{Z})$, tada dobivamo $1/g = \Gamma(f^{-1})$. Dakle, $1/g \in \Gamma(\ell^1(\mathbb{Z})) = AC(\mathbb{T})$. □

U idućem primjeru ćemo opisati Geljfandovu transformaciju grupovne algebre $L^1(\mathbb{R})$ od $\mathbb{R}$. Za to će nam trebati sljedeći pomoćni rezultat:

Lema 2.5.12. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ neprekidna i ograničena funkcija koja zadovoljava funkcijsku jednakost $f(x+y) = f(x)f(y)$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Tada je ili $f = 0$ ili postoji jedistven $t \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x) = e^{itx}$ za sve $x \in \mathbb{R}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da $f \neq 0$. Tada je očito $f(0) = 1$. Nadalje, kako je f neprekidna, postoji $\delta > 0$ takav da je

$$c := \int_0^{\delta} f(y)\,d\lambda(y) \neq 0.$$

Tada za sve $x \in \mathbb{R}$ imamo

$$\begin{aligned} cf(x) &= \int_0^{\delta} f(x)f(y)\,d\lambda(y) = \int_0^{\delta} f(x+y)\,d\lambda(y) \\ &= \int_x^{x+\delta} f(y)\,d\lambda(y). \end{aligned}$$

Budući da je f neprekidna, funkcija $x \mapsto \int_x^{x+\delta} f(x+y)\,d\lambda(y)$ je neprekidno derivabilna. Dakle, kako je $c \neq 0$, zaključujemo da je i funkcija f neprekidno derivabilna. Ukoliko deriviramo jednakost $f(x+y) = f(x)f(y)$ po y i zatim uvrstimo $y = 0$, dobivamo $f'(x) = \alpha f(x)$, gdje je $\alpha := f'(0)$. Dakle, $f(x) = e^{\alpha x}$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Napokon, kako je f ograničena, slijedi da je α čisto imaginaran broj. □

Primjer 2.5.13. Za svako $t \in \mathbb{R}$ definirajmo linearni funkcional φ_t na $L^1(\mathbb{R})$ s

$$\varphi_t(f) := \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{itx}\, d\lambda(x).$$

Tada je φ_t karakter na $L^1(\mathbb{R})$ i preslikavanje $F : t \mapsto \varphi_t$ je homeomorfizam s $\mathbb{R}$ na $\Omega(L^1(\mathbb{R}))$.

Dokaz. Najprije primijetimo da je $\varphi_t \neq 0$ za sve $t \in \mathbb{R}$. Zaista, iz $\varphi_t(f) = 0$ za sve $f \in L^1(\mathbb{R})$ bi slijedilo da je funkcija $x \mapsto e^{itx}$ gotovo svuda jednaka 0, što je apsurdno.

Nadalje, koristeći Fubinijev teorem i translacionu invarijatnost Lebesgueove mjere λ, za $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ imamo

$$\begin{aligned}
\varphi_t(f * g) &= \int_{\mathbb{R}} (f * g)(x)e^{itx}\, d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\, d\lambda(y) \right) e^{itx}\, d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}} g(x-y)e^{itx}\, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{it(x+y)}\, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{ity}\, d\lambda(y) \cdot \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{itx}\, d\lambda(x) \\
&= \varphi_t(f)\varphi_t(g).
\end{aligned}$$

Dakle, $\varphi_t \in \Omega(L^1(\mathbb{R}))$ za sve $t \in \mathbb{R}$. Dokažimo da je preslikavanje $F : t \mapsto \varphi_t$ homeomorfizam s $\mathbb{R}$ na $\Omega(L^1(\mathbb{R}))$. Pretpostavimo da je $\varphi_t = \varphi_s$ za neke točke $t, s \in \mathbb{R}$. Tada je

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)(e^{itx} - e^{isx})\, d\lambda(x) = 0$$

za sve $f \in L^1(\mathbb{R})$ odakle slijedi $e^{itx} = e^{isx}$ za gotovo sve $x \in \mathbb{R}$, pa je nužno $t = s$. Time je dokazana injektivnost od F.

Dokažimo sada surjektivnost od F. Neka je $\varphi \in \Omega(L^1(\mathbb{R}))$. Kako je $\Omega(L^1(\mathbb{R})) \subseteq L^1(\mathbb{R})^\natural = L^\infty(\mathbb{R})$, postoji funkcija $h \in L^\infty(\mathbb{R})$ takva da je

$$\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)h(x)\, d\lambda(x) \qquad (f \in L^1(\mathbb{R})).$$

Ponovno koristeći Fubinijev teorem, za $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ imamo

$$\begin{aligned}
\varphi(f * g) &= \int_{\mathbb{R}} (f * g)(x)h(x)\, d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\, d\lambda(y) \right) h(x)\, d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x-y)h(x)\, d\lambda(x) \right) f(y)\, d\lambda(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \varphi(g_y)f(y)\, d\lambda(y),
\end{aligned}$$

gdje je $g_y(x) := g(x-y)$. S druge strane, iz multiplikativnosti od φ dobivamo

$$\varphi(f * g) = \varphi(f)\varphi(g) = \varphi(g) \int_{\mathbb{R}} f(y)h(y)\, d\lambda(y).$$

Kako je $f \in L^1(\mathbb{R})$ bila proizvoljna, zaključujemo da vrijedi

$$\varphi(g_y) = \varphi(g)h(y) \tag{2.21}$$

za sve $g \in L^1(\mathbb{R})$ i gotovo sve $y \in \mathbb{R}$. Fiksirajmo funkciju $g \in L^1(\mathbb{R})$ za koju je $\varphi(g) \neq 0$. Budući da je $y \mapsto g_y$ neprekidno preslikavanje s $\mathbb{R}$ u $L^1(\mathbb{R})$, funkcija $y \mapsto h(y) = \varphi(g_y)/\varphi(g)$ je neprekidna. Ako u jednakosti (2.21) y zamijenimo s $x + y$ dobivamo

$$\begin{aligned} \varphi(g)h(x+y) &= \varphi(g_{x+y}) = \varphi((g_x)_y) = \varphi(g_x)h(y) \\ &= \varphi(g)h(x)h(y), \end{aligned}$$

odakle slijedi $h(x + y) = h(x)h(y)$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Kako je h ograničena i neprekidna, iz Leme 2.5.12 slijedi da postoji jedinstven $t \in \mathbb{R}$ takav da je $h(x) = e^{itx}$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Dakle, $\varphi = \varphi_t$. Time smo pokazali surjektivnost od F.

Neprekidnost preslikavanja F bismo slično pokazali kao u Primjeru 2.5.10. Također, ako je (t_i) mreža u $\mathbb{R}$ i t_0 točka u $\mathbb{R}$ takva da vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)(e^{it_i x} - e^{itx})\, d\lambda(x) \longrightarrow 0$$

za sve $f \in L^1(\mathbb{R})$, tada posmatrajući funkciju

$$f(x) = \begin{cases} e^{-itx} & : 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & : \text{inače}, \end{cases}$$

se može pokazati da $t_i \longrightarrow t_0$ u $\mathbb{R}$ (Zadatak 2.6.28). Odavde slijedi da je F homeomorfizam. $\square$

Ukoliko $\Omega(L^1(\mathbb{R}))$ identificiramo s $\mathbb{R}$ preko homeomorfizma F^{-1}, Geljfandova transformacija od $L^1(\mathbb{R})$ postaje homomorfizam algebri $\Gamma : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$, koji je dan s

$$\Gamma(f)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{itx}\, d\lambda(x) \quad (f \in L^1(\mathbb{R}),\ t \in \mathbb{R}).$$

S druge strane, Fourierova transformacija funkcije $f \in L^1(\mathbb{R})$ je definirana s

$$\mathcal{F}(f)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi itx}\, d\lambda(x)$$

Dakle, Γ se esencijalno podudara s $\mathcal{F}$. Odavde slijedi da je Γ injektivna (jer je $\mathcal{F}$ injektivna prema teoremu o Fourierovoj inverziji). Dakle, $L^1(\mathbb{R})$ je poluprosta Banachova algebra. Također istaknimo da Γ nije niti izometrija (što se lako vidi koristeći Teorem 2.4.4 (vi)) niti surjekcija (jer $\mathcal{F}$ nije surjekcija). Za razliku od algebre $\ell^1(\mathbb{Z})$, sliku algebre $L^1(\mathbb{R})$ po Γ nije jednostavno opisati.

U Primjerima 2.5.10 i 2.5.13 smo opisali Geljfandovu trasformaciju grupovne algebre $L^1(G)$ za slučajeve $G = \mathbb{Z}$ i $G = \mathbb{R}$. Sada ćemo ukratko opisati Geljfandovu transformaciju od $L^1(G)$ za općenitu LCA (lokalno kompaktnu (Hausdorffovu) Abelovu) grupu G. Kako bismo to napravili, najprije fiksirajmo Haarovu mjeru μ na G (koja je jedinstvena do na pozitivnu konstantu).

- **Karakter** na G je svaki neprekidni homomorfizam χ s G u multiplikativnu grupu $\mathbb{T}$. Skup svih karaktera na G označavamo s $\hat{G}$. Na $\hat{G}$ uvodimo operaciju množenja po točkama i s obzirom na nju $\hat{G}$ postaje Abelova grupa, koja se zove **dualna grupa** od G.

- $\hat{G}$ opskrbljujemo s relativnom kompaktno-otvorenom topologijom, naslijeđenom od $C(G)$. Prisjetimo se, kompaktno-otvorena topologija na $C(G)$ je topologija generirana sa skupovima oblika
$$L(U,K) := \{f \in C(G) : \ f(K) \subseteq U\},$$
gdje K prolazi po svim kompaktnim podskupovima od G, a U po svim otvorenim podskupovima od $\mathbb{C}$. Lako se provjeri da je s obzirom na tu topologiju $\hat{G}$ Hausdorffova topološka grupa.

- Za funkciju $f \in L^1(G)$ definiramo njenu **Fourierovu transformaciju** kao funkciju $\hat{f} : \hat{G} \to \mathbb{C}$ definiranu s
$$\hat{f}(\chi) := \int_G f(x)\overline{\chi(x)}\, d\mu(x).$$

Tada vrijedi sljedeći bitan rezultat:

Teorem 2.5.14. *Preslikavanje $F : \hat{G} \to \Omega(L^1(G))$ definirano s*
$$F : \chi \mapsto d_\chi \qquad \text{gdje je} \qquad d_\chi(f) := \hat{f}(\chi) \qquad (\chi \in \hat{G},\ f \in L^1(G))$$
je homeomorfizam. Specijalno:

(i) $\hat{G}$ je LCA grupa.

(ii) Za svaku funkciju $f \in L^1(G)$ je $\hat{f} \in C_0(\hat{G})$.

Dakle, ako identificiramo $\Omega(L^1(G))$ s $\hat{G}$ preko preslikavanja F^{-1}, Geljfandova transformacija prevodi funkciju $f \in L^1(G)$ u njen Fourierov transformat $\hat{f}$. Može se pokazati da je Γ injektivna (dakle, $L^1(G)$ je poluprosta) i da je Γ surjektivna ako i samo ako je G konačna grupa.

Na kraju ove točke istaknimo još dva bitna rezultata iz ove tematike. Kao što smo vidjeli u prethodnim primjerima, $\hat{\mathbb{Z}} = \mathbb{T}$ i $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, a slično bismo pokazali i da je $\hat{\mathbb{T}} = \mathbb{Z}$. Specijalno, $\hat{\hat{\mathbb{Z}}} = \mathbb{Z}$, $\hat{\hat{\mathbb{T}}} = \mathbb{T}$ i $\hat{\hat{\mathbb{R}}} = \mathbb{R}$. Da to baš i nije slučajno, govori sljedeći duboki rezultat iz teorije LCA grupa:

Teorem 2.5.15 (Pontryaginova dualnost). *Za svaku LCA grupu G su grupe G i $\hat{\hat{G}}$ kanonski izomorfne.*

Prirodni izomorfizam s G na $\hat{\hat{G}}$ iz prethodnog teorema je dan s $x \mapsto \hat{x}$, gdje je $\hat{x}(\chi) := \chi(x)$, $(x \in G,\ \chi \in \hat{G})$.

Teorem 2.5.16 (Fourierova inverzija). *Ako je G LCA grupa i μ Haarova mjera na G, tada postoji jedinstvena Haarova mjera $\hat{\mu}$ na $\hat{G}$ takva da za sve funkcije $f \in L^1(G)$ za koje je $\hat{f} \in L^1(\hat{G})$ vrijedi*
$$f(x) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\chi)\chi(x)\, d\hat{\mu}(\chi)$$
za $\hat{\mu}$-gotovo sve $x \in G$.

2.6 Zadaci

Zadatak 2.6.1. Nađite primjer komutativne Banachove algebre koja ima nemodularni maksimalni ideal.

Zadatak 2.6.2. Neka je A komutativna algebra i neka je $\|\cdot\|$ norma na A sa svojstvom $\|a^2\| = \|a\|^2$ za sve $a \in A$.

(i) Dokažite da iz jednakosti $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$ slijedi $2\|ab\| \leq (\|a\|+\|b\|)^2$ za sve $a, b \in A$.

(ii) Dokažite da vrijedi $\|ab\| \leq 2\|a\|\|b\|$ za sve $a, b \in A$.

(iii) Zaključite da je norma $\|\cdot\|$ submultiplikativna, tj. $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ za sve $a, b \in A$.

Zadatak 2.6.3. Neka je A normirana algebra i neka su $a, b \in A$ dva komutirajuća idempotenta, tj. $a^2 = a$, $b^2 = b$ i $ab = ba$. Dokažite da je tada ili $a = b$ ili $\|a - b\| \geq 1$. Vrijedi li isti zaključak ako a i b ne komutiraju?

Zadatak 2.6.4. Neka je A neunitalna C^*-algebra. Dokažite da $\widetilde{A}$ (sa strukturom $*$-algebre) uz normu $\|a + \lambda 1\| = \|a\| + |\lambda|$ ($a \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$) nije C^*-algebra.

Zadatak 2.6.5. Dokažite da $f^\dagger(z) := \overline{f(\overline{z})}$ definira involuciju na algebri diska $A(\mathbb{D})$ (Primjer 2.1.19) s obzirom na koju je $A(\mathbb{D})$ Banachova $*$-algebra.

Zadatak 2.6.6. Neka je A Banachova algebra i neka su $A^\natural$ i $A^{\natural\natural}$ redom dual i bidual od A. Za $a, b \in A$, $\varphi \in A^\natural$ i $m, n \in A^{\natural\natural}$ definirajmo redom elemente $\varphi \cdot a$, $m \cdot \varphi \in A^\natural$ i $mn \in A^{\natural\natural}$ s

$$(\varphi \cdot a)(b) := \varphi(ab), \quad (m \cdot \varphi)(a) := m(\varphi \cdot a) \quad \text{i} \quad mn(\varphi) := m(n \cdot \varphi).$$

Tako definirani produkt $(m, n) \mapsto mn$ na $A^{\natural\natural}$ zove se **prvi Arensov produkt**. Dokažite da $A^{\natural\natural}$ snabdjeven s prvim Arensovim produktom postaje Banachova algebra i da kanonsko ulaganje $\iota : A \to A^{\natural\natural}$ definira izometrički izomorfizam Banchovih algebri A i $\iota(A)$.

Zadatak 2.6.7. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a < b$. Neka je $C^1([a, b])$ prostor koji se sastoji od svih neprekidno derivabilnih funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. Dokažite da je uz operacije po točkama i normu

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \qquad (f \in C^1([a, b])),$$

$C^1([a, b])$ komutativna unitalna Banachova algebra.

Zadatak 2.6.8. Neka je $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ jedinična kružnica u $\mathbb{C}$. Za $f \in C(\mathbb{T})$ i $n \in \mathbb{Z}$, **n-ti Fourierov koeficijent** $c_n(f)$ od f je definiran s

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int}\, dt.$$

Označimo s $AC(\mathbb{T})$ prostor svih funkcija $f \in C(\mathbb{T})$ čiji je Fourierov red $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{-int}$ apsolutno konvergentan (tj. $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$). Dokažite da je $AC(\mathbb{T})$ uz operacije po točkama i normu

$$\|f\| := \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| \qquad (f \in AC(\mathbb{T})),$$

unitalna komutativna Banachova algebra koja je izometrički izomorfna Banachovoj algebri $\ell^1(\mathbb{Z})$.

Zadatak 2.6.9. Za $0 < \alpha \leq 1$ neka je $\mathrm{Lip}_\alpha([0, 1])$ prostor svih neprekidnih funkcija $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ koje zadovoljavaju **Lipschitzovo svojstvo reda** α, tj. $f \in C([0, 1])$ leži u $\mathrm{Lip}_\alpha([0, 1])$ ako i samo ako vrijedi

$$\|f\|_\alpha := \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| + \sup_{0 \leq s < t \leq 1} \frac{|f(s) - f(t)|}{|s - t|^\alpha} < \infty.$$

Dokažite da je $\mathrm{Lip}_\alpha([0,1])$ uz operacije po točkama i normu $\|\cdot\|_\alpha$ komutativna unitalna Banachova algebra.

Zadatak 2.6.10. Neka je $A = L^\infty(\Omega,\mu)$ kao u Primjeru 2.1.18. Dokažite da je $\sigma_A(f) = \mathcal{R}(f)$ za sve $f \in A$.

Zadatak 2.6.11. Dokažite da algebra $L^1(\mathbb{R})$ iz Primjera 2.1.21 nije unitalna.

Zadatak 2.6.12. Neka je $A = \ell^1(\mathbb{Z})$ kao u Primjeru 2.1.20 i neka je B zatvorena podalgebra od A koja se sastoji od svih funkcija $f \in \ell^1(\mathbb{Z})$ za koje je $f(n) = 0$ za sve $n < 0$. Ako s χ_1 označimo karakterističnu funkciju skupa $\{1\}$, dokažite da je $\sigma_A(\chi_1) \neq \sigma_B(\chi_1)$.

Zadatak 2.6.13. Neka je $K := \{z \in \mathbb{C} : \ 1 \le |z| \le 2\}$ i neka je $f \in C(K)$ definirana s $f(z) := z$ $(z \in K)$. Neka je A najmanja zatvorena podalgebra od $C(K)$ koja sadrži funkcije 1 i f te neka je B najmanja zatvorena podalgebra od $C(K)$ koja sadrži funkcije f i $1/f$. Odredite spektre $\sigma_A(f)$ i $\sigma_B(f)$. Nadalje, odredite te spektre ako je $K = \mathbb{T}$ jedinična kružnica u $\mathbb{C}$.

Zadatak 2.6.14. Neka je A unitalna Banachova algebra i neka je $a \in A$ idempotent (tj. $a^2 = a$). Dokažite da je $\sigma(a) \subseteq \{0,1\}$ i eksplicitno odredite rezolventu od a.

Zadatak 2.6.15. Neka je A unitalna Banachova algebra i neka je (a_n) niz invertibilnih elemenata u A koji konvergira prema neinvertibilnom elementu. Dokažite da je tada $\lim_{n\to\infty} \|a_n^{-1}\| = \infty$.

Zadatak 2.6.16. Neka je A unitalna Banachova algebra. Pretpostavimo da su a i b elementi u A za koje postoji $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da je $ab - ba = \lambda 1$. Dokažite da tada a i b komutiraju.

Zadatak 2.6.17. **Derivacija** na algebri A je linearno preslikavanje $\delta : A \to A$ koje zadovoljava Leibnizovo svojstvo

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b) \qquad \text{za sve } a, b \in A.$$

Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $\delta^n := \delta \circ \cdots \circ \delta$ (n-puta) i stavimo $\delta^0 := \mathrm{id}_A$. Dokažite da vrijedi

$$\delta^n(ab) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta^k(a)\delta^{n-k}(b) \qquad \text{za sve } a, b \in A \text{ i } n \in \mathbb{N}.$$

Zadatak 2.6.18. Neka je δ ograničena derivacija na unitalnoj Banachovoj algebri A. Pretpostavimo da je $a \in A$ element za kojeg postoji skalar $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ takav da je $\delta(a) = \lambda a$. Dokažite da je a nilpotentan, tj. da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $a^n = 0$.

Zadatak 2.6.19. Neka je δ ograničena derivacija na unitalnoj Banachovoj algebri A. Pretpostavimo da je $a \in A$ element takav da je $\delta^2(a) = 0$. Dokažite da je $r(\delta(a)) = 0$.

Zadatak 2.6.20. Neka je A unitalna Banachova algebra. Za element $a \in A$ stavimo

$$\exp a := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

Dokažite:

(i) $\exp a$ je dobro definiran invertibilni element u A.

(ii) Ako elementi $a, b \in A$ komutiraju, tada vrijedi $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.

(iii) Ako je δ ograničena derivacija na A, tada je $\exp \delta$ ograničeni automorfizam od A.

Zadatak 2.6.21. Nađite primjer (nekomutativne) unitalne Banachove algebre A koja u kojoj postoje elementi $a, b \in A$ takvi da je

$$r(a+b) > r(a) + r(b) \quad \text{i} \quad r(ab) > r(a)r(b).$$

Zadatak 2.6.22. Neka je A unitalna Banachova algebra.

(i) Pretpostavimo da je B maksimalna komutativna Banachova podalgebra od A. Dokažite da je B zatvorena i da B sadrži jedinicu od A. Nadalje, dokažite da vrijedi $\sigma_A(b) = \sigma_B(b)$ za sve $b \in B$.

(ii) Dokažite da za svaki par komutirajućih elemenata $a, b \in A$ vrijedi

$$\sigma_A(ab) \subseteq \sigma_A(a)\sigma_A(b) \quad \text{i} \quad \sigma_A(a+b) \subseteq \sigma_A(a) + \sigma_A(b).$$

Zadatak 2.6.23. Neka je $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ operator definiran s

$$(Tf)(t) := \int_0^t f(s)\,ds \qquad (f \in C([0,1]),\ t \in [0,1]).$$

Dokažite da je T ograničen operator, tj. $T \in \mathbb{B}(C([0,1]))$. Označimo s A zatvarač skupa

$$\{p(T) :\ p \in \mathbb{C}[z],\ p(0) = 0\}$$

u $\mathbb{B}(C([0,1]))$. Dokažite da je A radikalna komutativna Banachova algebra.

Zadatak 2.6.24. Neka je $C_{\mathbb{R}}([0,1])$ Banachova algebra realnih neprekidnih funkcija na $[0,1]$ sa sup-normom. Definirajmo funkcional $\varphi : C_{\mathbb{R}}([0,1]) \to \mathbb{R}$

$$\varphi(f) := \int_0^1 f(t)\,dt \qquad (f \in C_{\mathbb{R}}([0,1])).$$

Dokažite da je $\varphi(f) \neq 0$ za svaku invertibilnu funkciju $f \in C_{\mathbb{R}}([0,1])$, ali da φ nije multiplikativan. Dakle, Gleason-Kahane-Zelazkov teorem (Teorem 2.3.3) ne vrijedi za realne Banachove algebre.

Zadatak 2.6.25. Nađite primjer realne komutativne unitalne Banachove algebre koja ne dozvoljava (realni) multiplikativni linearni funkcional različit od 0.

Zadatak 2.6.26. Neka je A neunitalna komutativna Banachova algebra i neka je M maksimalni ideal u A. Dokažite da je M modularan ako i samo ako je M kodimenzije 1 i $A^2 \not\subseteq M$.

Zadatak 2.6.27. Neka je A algebra cijelih (analitičkih) funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ opskrbljena s normom

$$\|f\| := \sup\{|f(z)| :\ z \in \mathbb{T}\}.$$

Dokažite da je A komutativna normirana algebra koja nije potpuna. Nadalje, dokažite da A sadrži maksimalni ideal beskonačne kodimenzije.

Zadatak 2.6.28. Dokažite da je preslikavanje $F : t \mapsto \varphi_t$ iz Primjera 2.5.13 homeomorfizam s $\mathbb{R}$ na $\Omega(L^1(\mathbb{R}))$.

Zadatak 2.6.29. Neka je $A := C^1([0,1])$ (Zadatak 2.6.7). Dokažite da je $\Omega(A)$ homeomorfan s $[0,1]$ i da uz identifikaciju $\Omega(A) = [0,1]$, Geljfandova transformacija $\Gamma_A : A \to C([0,1])$ postaje ulaganje $A \hookrightarrow C([0,1])$. Zaključite da Γ_A nije niti izometrična niti surjektivna.

Zadatak 2.6.30. Neka je $A = C^1([0,1])$ kao u prethodnom zadatku i stavimo

$$I := \{f \in A : \; f(0) = f'(0) = 0\}.$$

Dokažite da je I zatvoren ideal u A. Nadalje, dokažite da je A/I dvodimenzionalna algebra s jednodimenzionalnim radikalom. Dakle, A je primjer poluproste Banachove algebre koja dopušta nepoluprosti kvocijent.

Zadatak 2.6.31. Neka je $A := \mathrm{Lip}_\alpha([0,1])$ (Zadatak 2.6.9). Odredite $\Omega(A)$.

Zadatak 2.6.32. Vrijede li Korolari 2.3.12 i 2.3.13 i bez pretpostavke da je A poluprosta? U slučaju negativnog odgovora, nađite kontraprimjere.

Zadatak 2.6.33. Neka je A komutativna Banachova algebra i neka je $\Gamma : A \to C_0(\Omega(A))$ njena Geljfandova transformacija. Dokažite da je Γ topološki monomorfizam ako i samo ako postoji konstanta $c > 0$ takva da vrijedi $\|a^2\| \geq c\|a\|^2$ za sve $a \in A$.

Zadatak 2.6.34. Neka je A poluprosta komutativna Banachova algebra s normom $\|\cdot\|$ i neka je B podalgebra od A koja je Banachova algebra s obzirom na neku normu $|\cdot|$. Dokažite da postoji konstanta $c > 0$ takva da vrijedi $\|b\| \leq c|b|$ za sve $b \in B$.

Zadatak 2.6.35. Neka je A unitalna komutativna Banachova algebra i neka su I_1 i I_2 netrivijalni zatvoreni ideali u A takvi da je $A = I_1 \oplus I_2$. Dokažite da je $\Omega(A)$ nepovezan prostor.

Zadatak 2.6.36. Neka su Ω_1 i Ω_2 CH prostori i neka je $\phi : C(\Omega_1) \to C(\Omega_2)$ unitalni homomorfizam algebri. Neka je $\phi^t : \Omega(C(\Omega_2)) \to \Omega(C(\Omega_1))$ njegov trasponat, tj. $\phi^t : \psi \mapsto \psi \circ \phi$. Dokažite:

(i) ϕ^t je injektivan ako i samo ako je ϕ surjektivan.

(i) ϕ^t je surjektivan ako i samo ako je ϕ injektivan.

Zadatak 2.6.37. Neka su A i B poluproste unitalne komutativne Banachove algebre i neka je $\phi : A \to B$ linearno preslikavanje. Dokažite da je ϕ izomorfizam algebri ako i samo ako vrijedi $\sigma_B(\phi(a)) = \sigma_A(a)$ za sve $a \in A$.

Zadatak 2.6.38. Neka je A unitalna komutativna Banachova algebra takva da je spektar svakog elementa konačan. Dokažite da je tada $\Omega(A)$ konačan.

Poglavlje 3

C^*-algebre

3.1 Osnovna svojstva C^*-algebri

Teorem 3.1.1. *Neka je A C^*-algebra. Tada za svaki normalni element $a \in A$ vrijedi $\|a\| = r(a)$.*

Dokaz. Najprije pretpostavimo da je a hermitski. Tada je $\|a^2\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$. Indukcijom dobivamo da vrijedi $\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Koristeći formulu za spektralni radijus (Teorem 2.2.8), dobivamo

$$r(a) = \lim_n \|a^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \|a\|.$$

Sada pretpostavimo da je a samo normalan. Budući da je a^*a hermitski, iz dokazanog, Propozicije 2.5.1 i Propozicije 1.3.13 dobivamo

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| = r(a^*a) \le r(a^*)r(a) = r(a)^2 \le \|a\|^2.$$

Dakle, $r(a) = \|a\|$. □

Definicija 3.1.2. Neka je A $*$-algebra. **C^*-norma** na A je norma na A s obzirom na koju je A C^*-algebra.

Kao jednostavnu posljedicu prethodnog teorema dobivamo sljedeću bitnu činjenicu:

Korolar 3.1.3. *Na $*$-algebri A postoji najviše jedna C^*-norma.*

Dokaz. Ako je $\|\cdot\|$ C^*-norma na A, tada iz Teorema 3.1.1 slijedi

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| = r(a^*a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a^*a)\}$$

za sve $a \in A$. Dakle, norma $\|\cdot\|$ je u potpunosti određena $*$-algebarskom strukturom od A. □

Teorem 3.1.4. *Neka su A i B C^*-algebre i neka je $\phi : A \to B$ $*$-homomorfizam. Tada je ϕ kontraktivan.*

Dokaz. Najprije pretpostavimo da su obje C^*-algebre A i B unitalne i da je homomorfizam ϕ unitalan. Tada prema Propoziciji 1.3.5 vrijedi $\sigma_B(\phi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$ za sve $a \in A$, pa iz Teorema 3.1.1 slijedi

$$\|\phi(a)\|^2 = \|\phi(a^*a)\| = r(\phi(a^*a)) \le r(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2 \tag{3.1}$$

za sve $a \in A$. Dakle, ϕ je je uz navedene pretpostavke kontrakcija.

Sada pretpostavimo da je samo algebra A unitalna. Tada je $\phi(1_A)$ jedinica u $*$-algebri $\phi(A)$. Označimo s C zatvarač slike $\phi(A)$ u B i primijetimo da je C C^*-algebra. Budući da je množenje neprekidno i budući da je $\phi(A)$ gusta u C, zaključujemo da je $\phi(1_A)$ jedinica i u C. Kako spektralni radijus elementa ne ovisi o ambijentalnoj C^*-algebri koja ga sadrži, isti račun kao u (3.1) pokazuje da je ϕ kontrakcija i u tom slučaju.

Pretpostavimo napokon da algebra A nije unitalna i neka je $\widetilde{A}$ njena unitizacija. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je algebra B unitalna. Naime, u protivnom bismo algebru B zamijenili s njenom unitizacijom $\widetilde{B}$. Definirajmo preslikavanje $\widetilde{\phi} : \widetilde{A} \to B$ na sljedeći način:

$$\widetilde{\phi}(a + \lambda 1) := \phi(a) + \lambda 1_B \qquad (a \in A,\ \lambda \in \mathbb{C}).$$

Lako se provjeri da je $\widetilde{\phi}$ unitalan $*$-homomorfizam koji proširuje ϕ. Iz dokazanog slijedi da je $\widetilde{\phi}$ kontrakcija. Naravno, tada je i restrikcija $\phi = \widetilde{\phi}|_A$ kontrakcija. Time je tvrdnja u potpunosti dokazana. □

Korolar 3.1.5. *Ako je $\phi : A \to B$ $*$-izomorfizam između C^*-algebri A i B, tada je ϕ izometričan.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi direktno iz Teorema 3.1.4 i činjenice da je ϕ^{-1} također $*$-homomorfizam. □

Kasnije ćemo pokazati (Teorem 3.2.13) i da je svaki injektivni $*$-homomorfizam između C^*-algebri izometričan.

Propozicija 3.1.6. *Neka je A C^*-algebra i neka je $a \in A$.*

(i) Ako je a hermitski, tada je $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

(ii) Ako je A unitalna i a unitaran, tada je $\sigma(a) \subseteq \mathbb{T}$.

Dokaz. (i). Prelaskom na $\widetilde{A}$, ako je potrebno, možemo pretpostaviti da je A unitalna. Neka je $\lambda \in \sigma(a)$. Stavimo $\alpha := \operatorname{Re}\lambda$ i $\beta := \operatorname{Im}\lambda$. Promotrimo niz elemenata (a_n) u A čiji je opći član oblika

$$a_n := a - \alpha 1 + in\beta 1 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Tada je očito $i(n+1)\beta \in \sigma(a_n)$ za sve $n \in \mathbb{N}$, odakle slijedi

$$\begin{aligned}(n^2 + 2n + 1)\beta^2 &= |i(n+1)\beta|^2 \le r(a_n)^2 \le \|a_n\|^2 \\ &= \|a_n^* a_n\| = \|(a - \alpha 1)^2 + n^2\beta^2 1\| \\ &\le \|a - \alpha 1\|^2 + n^2\beta^2.\end{aligned}$$

Dakle,

$$(2n+1)\beta^2 \le \|a - \alpha 1\|^2 \quad \text{za sve } n \in \mathbb{N}.$$

To je jedino moguće za $\beta = 0$, pa zaključujemo da je $\lambda = \alpha \in \mathbb{R}$.

(ii). Budući da je a unitaran, imamo $\|a\| = 1$, pa je $\sigma(a) \subseteq \mathbb{D}$. Također, budući da je i $a^{-1} = a^*$ unitaran, dobivamo $\sigma(a)^{-1} = \sigma(a^{-1}) \subseteq \mathbb{D}$ (prva jednakost slijedi iz Propozicije 1.3.3 (ii)). Dakle, da za $\lambda \in \sigma(a)$ vrijedi i $|\lambda| \le 1$ i $1/|\lambda| \le 1$, odnosno $|\lambda| = 1$. □

3.2 Komutativne C^*-algebre i neprekidni funkcionalni račun

Geljfandova transformacija komutativne Banachove algebre A općenito ne mora davati dovoljno informacija o samoj algebri. To se najbolje vidi na primjeru radikalnih algebri. S druge strane, ako je A komutativna C^*-algebra, tada njena Geljfandova transformacija ima najbolja svojstva koja ona općenito može imati:

Teorem 3.2.1 (**Komutativni Geljfand-Naimarkov teorem**). *Ako je A komutativna C^*-algebra, tada je njena Geljfandova transformacija*

$$\Gamma : A \to C_0(\Omega(A)), \qquad \Gamma : a \mapsto \hat{a}$$

(izometrički) $*$-izomorfizam. Nadalje, ako je A unitalna, tada je Γ unitalni (izometrički) $*$-izomorfizam s A na $C(\Omega(A))$.

U dokazu Teorema 3.2.1 koristit ćemo sljedeću jednostavnu činjenicu:

Propozicija 3.2.2. *Neka je A C^*-algebra. Svaki karatker φ na A je hermitski funkcional.*

Dokaz. Prema Teoremu 2.4.4 (iii) i Propoziciji 3.1.6 za svaki hermitski element $a \in A$ imamo $\varphi(a) \in \sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$, pa tvrdnja slijedi iz Propozicije 1.3.19. □

Dokaz Teorema 3.2.1. Kao što znamo, $\Gamma : A \to C_0(\Omega(A))$ je kontraktivni homomorfizam i $\|\Gamma(a)\|_\infty = r(a)$ za sve $a \in A$. Također, prema Propoziciji 3.2.2, za $\varphi \in \Omega(A)$ i $a \in A$ imamo

$$\Gamma(a^*)(\varphi) = \varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)} = \overline{\Gamma(a)(\varphi)} = \Gamma(a)^*(\varphi),$$

odakle slijedi da je Γ $*$-homomorfizam. Nadalje, koristeći Teorem 2.4.4 dobivamo

$$\begin{aligned} \|a\|^2 &= \|a^*a\| = r(a^*a) = \|\Gamma(a^*a)\|_\infty = \|\Gamma(a)^*\Gamma(a)\|_\infty \\ &= \|\Gamma(a)\|_\infty^2, \end{aligned}$$

odakle slijedi da je Γ izometrija, pa specijalno i injekcija. Kako bismo dokazali surjektivnost od Γ, dovoljno je primijetiti da $\Gamma(A)$ zadovoljava uvjete Korolara 1.4.8. Zaista, prema dokazanom je $\Gamma(A)$ zatvorena samoadjungirana podalgebra od $C_0(\Omega(A))$, a iz Teorema 2.4.4 znamo da $\Gamma(A)$ razdvaja točke od $\Omega(A)$ i da za svaku točku $\varphi \in \Omega(A)$ postoji element $a \in A$ takav da je $\Gamma(a)(\varphi) \neq 0$.

Štoviše, ako je algebra A unitalna, tada je $\Omega(A)$ kompaktan (Propozicija 2.4.2) i Γ je unitalni homomomorfizam (Teorem 2.4.4 (i)). □

Korolar 3.2.3. *Svaka komutativna C^*-algebra je poluprosta (kao komutativna Banachova algebra).*

Neka je $F : \Omega_1 \to \Omega_2$ homeomorfizam LCH prostora Ω_1 i Ω_2. Kao što znamo, njegov transponat $F^t : g \mapsto g \circ F$ ($g \in C_0(\Omega_2)$) definira izometrički izomorfizam s $C_0(\Omega_2)$ na $C_0(\Omega_1)$. Štoviše, primijetimo da je F^t zapravo $*$-izomorfizam, jer za $g \in C_0(\Omega_2)$ i $t \in \Omega_1$ imamo

$$\begin{aligned} F^t(g^*)(t) &= (g^* \circ F)(t) = g^*(F(t)) = \overline{g(F(t))} = (g \circ F)^*(t) \\ &= (F^t(g))^*(t). \end{aligned}$$

Koristeći tu činjenicu, zajedno s Teoremom 3.2.1 i Korolarom 2.5.8, dobivamo sljedeći rezultat:

Korolar 3.2.4. *Za komutativne C^*-algebre A i B su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) *A i B su $*$-izomorfne.*

(ii) *A i B su algebarski izomorfne.*

(iii) *$\Omega(A)$ i $\Omega(B)$ su homeomorfni.*

Ako je B unitalna Banachova podalgebra unitalne Banachove algebre A, tada znamo da za svaki element $b \in B$ vrijedi inkluzija spektara $\sigma_A(b) \subseteq \sigma_B(b)$ (Propozicija 2.2.9 (ii)) i da općenito ta inkluzija može biti striktna (Primjer 2.2.10). Ipak, ako su A i B C^*-algebre, to se ne može desiti:

Teorem 3.2.5. *Neka je B unitalna C^*-podalgebra unitalne C^*-algebre A. Tada je $\sigma_B(b) = \sigma_A(b)$ za sve elemente $b \in B$.*

Dokaz. Dovoljno je dokazati da vrijedi $B^\times = B \cap A^\times$. Najprije pretpostavimo da je b hermitski element u B koji je invertibilan u A. U tom slučaju je prema Propoziciji 3.1.6, $\sigma_A(b) \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Specijalno, $\sigma_A(b)$ nema rupa (kao podskup od $\mathbb{C}$), pa iz Propozicije 2.2.9 (iii) zaključujemo da je $\sigma_A(b) = \sigma_B(b)$. Posebno $0 \notin \sigma_B(b)$, odnosno $b \in B^\times$.

Sada pretpostavimo da je $b \in B \cap A^\times$ proizvoljni element i neka je $a \in A$ njegov inverz (u A). Adjungiranjem jednakosti $ab = ba = 1$ dobivamo $a^*b^* = b^*a^* = 1$, odakle slijedi $bb^*a^*a = 1$. Dakle, hermitski element bb^* je invertibilan u A, pa je prema dokazanom on invertibilan i u B. Neka je $c \in B$ njegov inverz (u B). Iz $bb^*c = 1$ i $ba = 1$ zaključujemo da je $a = b^*c \in B$. □

Napomena 3.2.6. Ako je A unitalna C^*-algebra i $a \in A$, tada Teorem 3.2.5 ujedno opravdava i kratku oznaku $\sigma(a)$, budući da spektar od a ne ovisi o ambijentalnoj unitalnoj C^*-podalgebri u kojoj ga računamo.

Lema 3.2.7. *Neka je B podalgebra unitalne algebre A takva da je $B + \mathbb{C}1 = A$. Tada je $\sigma_B(b) \cup \{0\} = \sigma_A(b) \cup \{0\}$ za sve $b \in B$.*

Dokaz. Ako B nije unitalna, tada je preslikavanje $\widetilde{B} \to A$, $(b, \lambda) \mapsto b + \lambda 1$ (unitalni) izomorfizam algebri, pa je $\sigma_B(b) = \sigma_{\widetilde{B}}(b) = \sigma_A(b)$ za sve $b \in B$. Sada pretpostavimo da je B unitalna i neka je e njena jedinica. Ako je $e = 1$, tada je $B = A$, pa u tom slučaju nemamo ništa za dokazati. Ako je pak $e \neq 1$, tada tvrdimo da je $\sigma_A(b) = \sigma_B(b) \cup \{0\}$. Zaista, u tom slučaju je očito $0 \in \sigma_A(b)$ za sve $b \in B$. Ako su $b \in B$ i $\lambda \in \mathbb{C}$ takvi da je $\lambda 1 - b$ invertibilan u A, tada je očito $\lambda e - b$ invertibilan u B, odakle slijedi inkluzija $\sigma_B(b) \subseteq \sigma_A(b)$. Obratno, neka je $\lambda \neq 0$ takav da je $\lambda e - b$ invertibilan u B. Ako je b' inverz od $\lambda e - b$ u B, tada je $b' + \lambda^{-1}(1 - e)$ inverz od $\lambda 1 - b$ u A, odakle slijedi $\sigma_A(b) \setminus \{0\} \subseteq \sigma_B(b)$. □

Korolar 3.2.8. *Ako je B C^*-podalgebra C^*-algebre A, tada je $\sigma_B(b) \cup \{0\} = \sigma_A(b) \cup \{0\}$ za sve $b \in B$.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi direktno iz Leme 3.2.7 i Teorema 3.2.5. □

Neka je A unitalna C^*-algebra. Očito je presjek bilo koje familije unitalnih C^*-podalgebri od A ponovno unitalna C^*-podalgebra od A. Odatle slijedi da za bilo koji podskup $S \subseteq A$ postoji najmanja unitalna C^*-podalgebra od A koja sadrži skup S. Tu C^*-algebru označavamo s $C^*(S)$ i za nju kažemo da je **generirana skupom** S. Očito se $C^*(S)$ podudara s unitalnom Banachovom algebrom generiranom sa skupom $S \cup S^*$; dakle $C^*(S)$ je zatvarač skupa svih linearnih kombinacija produkata elemenata iz skupa $S \cup S^* \cup \{1\}$. Ako je $S = \{a\}$ jednočlan, tada pišemo $C^*(a)$ umjesto $C^*(\{a\})$. Primijetimo da je element $a \in A$ normalan ako i samo ako je $C^*(a)$ komutativna C^*-algebra koja je jednaka zatvaraču skupa

$$\{p(a, a^*) : \ p \in \mathbb{C}[z, w]\},$$

gdje $\mathbb{C}[z, w]$ označava algebru kompleksnih polinoma u dvije varijable z i w.

Propozicija 3.2.9. *Neka je A unitalna C^*-algebra i neka je $a \in A$ normalan element. Geljfandova transformacija $\hat{a}$ od a je homeomorfizam s $\Omega(C^*(a))$ na $\sigma(a)$.*

Dokaz. Prema Propoziciji 2.5.3, preslikavanje $T : \varphi \mapsto (\varphi(a), \varphi(a^*))$ je homeomorfizam s $\Omega(C^*(a))$ na zajednički spektar $\sigma(a, a^*)$ elemenata a i a^*. Kako je $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$ (Propozicija 3.2.2), projekcija π_1 na prvu koordinatu uspostavlja homeomorfizam s $\sigma(a, a^*)$ na $\sigma(a)$. Odavde slijedi da je $\hat{a} = \pi_1 \circ T$ homeomorfizam. □

Teorem 3.2.10. *Neka je a normalan element unitalne C^*-algebre A. Postoji jedinstven unitalni $*$-izomorfizam $\phi_a : C(\sigma(a)) \to C^*(a)$ takav da vrijedi $\phi_a(\mathrm{id}) = a$, gdje je $\mathrm{id}(\lambda) = \lambda$ za sve $\lambda \in \sigma(a)$.*

Dokaz. Prema Teoremu 3.2.1, Geljfandova transformacija $\Gamma = \Gamma_{C^*(a)}$ uspostavlja unitalni $*$-izomorfizam s $C^*(a)$ na $C(\Omega(C^*(a)))$. S druge strane, budući da je $\hat{a}$ je homeomrfizam s $\Omega(C^*(a))$ na $\sigma(a)$ (Propozicija 3.2.9), njegov transponat $\hat{a}^t$ je unitalni $*$-izomorfizam s $C(\sigma(a))$ na $C(\Omega(C^*(a)))$. Tada je i $\phi_a := \Gamma^{-1} \circ \hat{a}^t$ unitalni $*$-izomorfizam s $C(\sigma(a))$ na $C^*(a)$ te vrijedi

$$\phi_a(\mathrm{id}) = \Gamma^{-1}(\hat{a}^t(\mathrm{id})) = \Gamma^{-1}(\hat{a}) = a.$$

Nadalje, prema Stone-Weierstrassovom teoremu (Teorem 1.4.7) imamo $C(\sigma(a)) = C^*(\mathrm{id})$, odakle slijedi da je ϕ_a jedinstven unitalni $*$-izomorfizam s $C(\sigma(a))$ na $C^*(a)$ sa svojstvom $\phi_a(\mathrm{id}) = a$. □

Koristeći notaciju iz Teorema 3.2.10, za svaku funkciju $f \in C(\sigma(a))$ postoji jedinstven element $f(a) \in C^*(a) \subseteq A$ takav da je $f(a) = \phi_a(f)$. Oznaka $f(a)$ opravdana je činjenicom da za polinom $p \in \mathbb{C}[z, w]$ i funkciju $f \in C(\sigma(a))$ definiranu s $f(\lambda) := p(\lambda, \overline{\lambda})$ imamo $f(a) = p(a, a^*)$. Pridruživanje $f \mapsto f(a)$ zove se **neprekidni funkcionalni račun** normalnog elementa a.

Korolar 3.2.11. *Neka je A unitalna C^*-algebra i neka je $a \in A$ normalan element. Neprekidni funkcionalni račun od a ima sljedeća svojstva:*

(i) Ako je $f(\lambda) = p(\lambda, \overline{\lambda})$ ($\lambda \in \sigma(a)$), gdje je $p \in \mathbb{C}[z, w]$, tada je $f(a) = p(a, a^*)$.

(ii) Ako je (f_n) niz u $C(\sigma(a))$ i $f \in C(\sigma(a))$ takva da $f_n \longrightarrow f$ uniformno na $\sigma(a)$, tada $f_n(a) \longrightarrow f(a)$ u A.

(iii) $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$ za sve $f \in C(\sigma(a))$.

(iv) Ako je $f \in C(\sigma(a))$ i $g \in C(f(\sigma(a)) = C(\sigma(f(a)))$, tako da je $g \circ f \in C(\sigma(a))$, tada je $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

(v) Ako je (a_n) niz normalnih elemenata takav da $a_n \longrightarrow a$, K kompaktna okolina od $\sigma(a)$ i $f \in C(K)$, tada je $\sigma(a_n) \subseteq K$ za gotovo sve n i $f(a_n) \longrightarrow f(a)$.

(vi) Ako je ϕ unitalni $*$-homomorfizam s A u unitalnu C^*-algebru B, tada je $\phi(f(a)) = f(\phi(a))$ za sve $f \in C(\sigma(a))$.

Dokaz. Tvrdnje (i) i (ii) su direktne posljedice Teorema 3.2.10 (i Korolara 3.1.5).

(iii). Budući da je $\phi_a : a \mapsto f(a)$ unitalni $*$-izomorfizam s $C(\sigma(a))$ na $C^*(a)$ imamo

$$\sigma_A(f(a)) = \sigma_{C^*(a)}(f(a)) = \sigma_{C(\sigma(a))}(f) = f(\sigma(a)).$$

(iv). Prema (i), jednakost $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ vrijedi za sve funkcije g oblika $g(\lambda) = p(\lambda, \overline{\lambda})$, gdje je $p \in \mathbb{C}[z, w]$. Budući da su takve funkcije guste u $C(\sigma(f(a))$ i budući da je $\phi_{f(a)}$ neprekidan, zaključujemo da vrijedi $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ za sve $g \in C(\sigma(f(a)))$.

(v). Najprije dokažimo da za svaki otvoreni podskup $O \subseteq \mathbb{C}$ koji sadrži $\sigma(a)$ postoji $\delta > 0$ takav da je $\sigma(b) \subseteq O$ za sve $b \in A$ za koje je $\|a - b\| < \delta$. Zaista, neka je D zatvoreni disk u $\mathbb{C}$ s centrom u 0 radijusa $1 + \|a\|$. Prema Propoziciji 2.2.1 za svaki $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ postoji $r_\lambda > 0$ takav da je otvorena kugla U_λ u A s centrom u $\lambda 1 - a$ radijusa $2r_\lambda$ sadržana u $A^\times$. Neka je O_λ otvoreni disk u $\mathbb{C}$ s centrom u λ radijusa r_λ. Kako je $\sigma(a) \subseteq D$, slijedi da je $\{O_\lambda : \lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(a)\}$ otvoreni pokrivač od $D \setminus O$. Budući da je $D \setminus O$ kompaktan, postoji konačno mnogo $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ tako da $\{O_{\lambda_1}, \ldots, O_{\lambda_n}\}$ pokriva $D \setminus O$. Stavimo $\delta := \min\{r_{\lambda_1}, \ldots, r_{\lambda_n}, 1\}$. Ako je $\|a - b\| < \delta$ i $\lambda \in D \setminus O$, tada je $\lambda \in O_{\lambda_j}$ za neko j i

$$\|(\lambda_j 1 - a) - (\lambda 1 - b)\| \leq |\lambda_j - \lambda| + \|a - b\| < \delta + r_{\lambda_j} < 2r_{\lambda_j}.$$

Dakle, $\lambda 1 - b \in U_{\lambda_j}$, pa je $\lambda 1 - b \in A^\times$. Slijedi da je $D \setminus O \subseteq D \setminus \sigma(b)$. Također, $\sigma(b) \subseteq D$, jer je $\|a - b\| < 1$, odakle slijedi $\|b\| < 1 + \|a\|$. Ako je $\lambda' \in \sigma(b)$, tada $\lambda' \notin D \setminus \sigma(b)$, tako da $\lambda' \in D \setminus O$. No $\lambda' \in D$, tako da $\lambda' \in O$, odakle zaključujemo $\sigma(b) \subseteq O$.

Neka je sada $O = K$ kao u iskazu. Prema dokazanom zaključujemo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $\sigma(a_n) \subseteq K$ za sve $n \geq n_0$. Stavimo $C := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|a_n\|$ i neka je $\varepsilon > 0$. Prema Stone-Weierstrassovom teoremu postoji polinom $p \in \mathbb{C}[z, w]$ takav da je $\sup_{\lambda \in K} |f(\lambda) - p(\lambda, \overline{\lambda})| < \varepsilon$. Tada imamo

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \|f(a_n) - f(a)\| &\leq 2 \sup_{\lambda \in K} |f(\lambda) - p(\lambda, \overline{\lambda})| + \limsup_{n\to\infty} \|p(a_n, a_n^*) - p(a, a^*)\| \\ &< 2C\varepsilon. \end{aligned}$$

Budući da je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, zaključujemo da $f(a_n) \longrightarrow f(a)$.

(vi). Kako je $\sigma_B(\phi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$ (Propozicija 1.3.5), element $f(\phi(a))$ je dobro definiran za svaku funkciju $f \in C(\sigma_A(a))$. Fiksirajmo $f \in C(\sigma_A(a))$ i neka je $\varepsilon > 0$. Prema Stone-Weierstrassovom teoremu postoji polinom $p \in \mathbb{C}[z, w]$ takav da je $\sup_{\lambda \in \sigma(a)} \|f(\lambda) - p(\lambda, \overline{\lambda})\| < \varepsilon/2$ na $\sigma_A(a)$. Tada iz (i) slijedi $\|f(\phi(a)) - p(\phi(a), \phi(a)^*)\| < \varepsilon/2$. Kako je ϕ kontraktivan (Teorem 3.1.4), imamo

$$\begin{aligned} \|\phi(f(a)) - f(\phi(a))\| &\leq \|\phi(f(a)) - \phi(p(a, a^*))\| + \|\phi(p(a, a^*)) - f(\phi(a))\| \\ &\leq \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |f(\lambda) - p(\lambda, \overline{\lambda})| + \|p(\phi(a), \phi(a)^*) - f(\phi(a)))\| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Iz proizvoljnosti $\varepsilon > 0$ zaključujemo $\phi(f(a)) = f(\phi(a))$.

□

Svojstvo (iii) iz Korolara 3.2.11 često se zove **Teorem o preslikavanju spektra**.

Neka je sada A općenita (ne nužno unitalna) C^*-algebra. Definirajmo C^*-algebru $\dot{A}$ na sljedeći način: $\dot{A} = A$ ako je A unitalna, odnosno $\dot{A} = \widetilde{A}$ ako A nije unitalna. Ako je $a \in A$ normalan element, tada neprekidni funkcionalni račun od a možemo naravno provesti u algebri $\dot{A}$. Preciznije, ako je $C^*(a)$ unitalna C^*-podalgebra od $\dot{A}$ generirana elementom a, tada je preslikavanje $\phi_a : f \mapsto f(a)$ $*$-izomorfizam s $C(\sigma(a))$ na $C^*(a)$. Stavimo

$$C(\sigma(a))_0 := \{f \in C(\sigma(a)) : \ f(0) = 0\}$$

i neka je $C^*_0(a)$ najmanja C^*-podalgebra od A koja sadrži element a. Primijetimo da je $C^*_0(a)$ jednaka zatvaraču podalgebre

$$\{p(a, a^*) : \ p \in \mathbb{C}[z, w], \ p(0, 0) = 0\}. \tag{3.2}$$

Pretpostavimo da je $0 \in \sigma(a)$ (što je uvijek slučaj kada A nije unitalna). Prema Zadatku 1.5.16, svaka funkcija $f \in C(\sigma(a))_0$ je uniformni limes funkcija oblika $\lambda \mapsto p(\lambda, \overline{\lambda})$ $(\lambda \in \sigma(a))$, gdje je $p \in \mathbb{C}[z, w]$ takav da je $p(0, 0) = 0$. Odatle slijedi da je $f(a)$ limes niza elemenata iz skupa (3.2).

Odavde slijedi da je $f(a) \in C_0^*(a) \subseteq A$. Dakle, ukoliko se ograničimo na funkcije iz $C(\sigma(a))_0$, neprekidni funkcionalni račun u tom slučaju možemo u potpunosti provesti unutar algebre A, bez ikakvog pozivanja na jedinicu 1 od $\dot{A}$. To se zove **neunitalni neprekidni funkcionalni račun** od a. S druge strane, ako je A unitalna i $0 \notin \sigma(a)$, tada je $C(\sigma(a))_0 = C(\sigma(a))$ i $C_0^*(a) = C^*(a)$, odakle slijedi da se u tom slučaju neunitalni neprekidni funkcionalni račun podudara sa standardim neprekidnim funkcionalnim računom. Time smo pokazali sljedeći korolar:

Korolar 3.2.12. *Neka je A C^*-algebra. Neunitalni neprekidni funkcionalni račun $\phi_a : f \mapsto f(a)$ normalnog elementa $a \in A$ je $*$-izomorfizam s $C(\sigma(a))_0$ na $C_0^*(a)$.*

Na kraju ove točke istaknimo neke bitne posljedice neprekidnog funkcionalnog računa.

Teorem 3.2.13. *Neka su A i B C^*-algebre i neka je $\phi : A \to B$ $*$-homomorfizam.*

(i) Slika $\phi(A)$ je zatvorena, tj. $\phi(A)$ je C^*-podalgebra od B.

(ii) Ako je ϕ injekcija, tada je ϕ izometrija.

Dokaz. (i). Neka je $b \in B$ takav da $\phi(a_n) \longrightarrow b$ za neki niz (a_n) u A. Trebamo pokazati da je $b = \phi(a)$ za neko $a \in A$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su svi elementi a_n i b hermitski. Naime, u protivnom bismo dokaz proveli nad njihovim realnim i imaginarnim dijelovima. Nadalje, prelaskom na podniz u slučaju potrebe, možemo pretpostaviti da vrijedi

$$\|\phi(a_{n+1}) - \phi(a_n)\| < \frac{1}{2^n} \qquad \text{za sve } n \in \mathbb{N}.$$

Definirajmo niz funkcija $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na sljedeći način:

$$f_n(t) := \begin{cases} \frac{1}{2^n} & : t \geq \frac{1}{2^n} \\ t & : -\frac{1}{2^n} < t < \frac{1}{2^n} \\ -\frac{1}{2^n} & : t \leq -\frac{1}{2^n}. \end{cases}$$

Kako je $f_n(0) = 0$, znamo da je $f_n(x) \in A$ za sve $x \in A_h$ i $n \in \mathbb{N}$ (Korolar 3.2.12). Budući da je svaki element $\phi(a_{n+1}) - \phi(a_n)$ hermitski s normom manjom od 2^{-n}, zaključujemo da je f_n identiteta na $\sigma(\phi(a_{n+1}) - \phi(a_n))$. Koristeći neprekidni funkcionalni račun, imamo:

$$\begin{aligned} \phi(a_{n+1}) - \phi(a_n) &= f_n(\phi(a_{n+1}) - \phi(a_n)) = f_n(\phi(a_{n+1} - a_n)) \\ &= \phi(f_n(a_{n+1} - a_n)) \end{aligned}$$

i

$$\|f_n(a_{n+1} - a_n)\| = \sup\{|f(t)| : \ t \in \sigma(a_{n+1} - a_n)\} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Stavimo

$$a := a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a_{n+1} - a_n).$$

Tada je $a \in A$ i

$$\begin{aligned} \phi(a) &= \phi(a_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \phi(f_n(a_{n+1} - a_n)) \\ &= \phi(a_1) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\phi(a_{n+1} - a_n)) \\ &= \phi(a_1) + \sum_{n=1}^{\infty} (\phi(a_{n+1}) - \phi(a_n)) \\ &= \lim_{n \to \infty} \phi(a_n) = b. \end{aligned}$$

(ii). Postupajući slično kao u dokazu Teorema 3.1.4 možemo pretpostaviti da su A i B unitalne te da je $*$-homomorfizam ϕ unitalan. U tom slučaju ćemo dokazati da vrijedi

$$\sigma_B(\phi(a)) = \sigma_A(a) \qquad \text{za sve } a \in A_h. \tag{3.3}$$

Fiksirajmo $a \in A_h$. Kao što znamo, uvijek vrijedi $\sigma_B(\phi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$ (Propozicija 1.3.5). Pretpostavimo da ti spektri nisu jednaki. Tada postoji funkcija $f \in C(\sigma_A(a))$ takva da je $f \neq 0$, ali $f|_{\sigma_B(\phi(a))} = 0$. Prema Korolaru 3.2.11 (vi) imamo $\phi(f(a)) = f(\phi(a)) = 0$. Budući da je ϕ injektivan, zaključujemo da je $f(a) = 0$. No to je kontradikcija s činjenicom da je $f \neq 0$ na $\sigma_A(a)$. Time smo pokazali jednakost (3.3).

Budući da je norma svakog normalnog elementa jednaka njegovom spektralnom radijusu (Teorem 3.1.1), iz (3.3) zaključujemo

$$\|\phi(a)\|^2 = \|\phi(a^*a)\| = r(\phi(a^*a)) = r(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2$$

za sve $a \in A$. Dakle, ϕ je izometrija. □

Propozicija 3.2.14. *Neka je A C^*-algebra i neka je $a \in A$ normalan element.*

(i) a je hermitski ako i samo ako je $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

(ii) a je projektor ako i samo ako je $\sigma(a) \subseteq \{0, 1\}$.

(iii) Ako je A unitalna, tada je a unitaran ako i samo ako je $\sigma(a) \subseteq \mathbb{T}$.

Dokaz. (i). Ako je a hermitski, tada je prema Propoziciji 1.3.19 (i) $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$. Obratno, ako je $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$, tada je $\overline{\lambda} = \lambda$ na $\sigma(a)$, pa je $a^* = a$.

(ii). Pretpostavimo da je a idempotent i stavimo $p(\lambda) := \lambda^2 - \lambda$. Tada je $p(a) = 0$ i za $\lambda \in \sigma(a)$ imamo $\lambda^2 - \lambda = p(\lambda) \in \sigma(p(a)) = \{0\}$; dakle $\lambda \in \{0, 1\}$. Obratno, ako je $\sigma(a) \subseteq \{0, 1\}$, tada je $\lambda^2 = \lambda$ na $\sigma(a)$, pa je $a^2 = a$.

(iii). Ako je a unitaran, tada je prema Propoziciji 3.1.6 (ii) $\sigma(a) \subseteq \mathbb{T}$. Obratno, ako je $\sigma(a) \subseteq \mathbb{T}$, tada je $\overline{\lambda}\lambda = \lambda\overline{\lambda} = 1$ na $\sigma(a)$, pa je $a^*a = aa^* = 1$. □

Propozicija 3.2.15. *Svaki element unitalne C^*-algebre A se može prikazati kao linearna kombinacija četiri unitarna elementa.*

Dokaz. Najprije pretpostavimo da je $a \in A$ hermitski element s $\|a\| \leq 1$. Tada je $\sigma(a) \subseteq [-1, 1]$, pa funkcija

$$f(\lambda) := \lambda + i\sqrt{1 - \lambda^2}$$

pripada C^*-algebri $C(\sigma(a))$. Stavimo $u := f(a)$. Budući da za sve $\lambda \in [-1, 1]$ vrijedi

$$f^*(\lambda)f(\lambda) = 1 \quad \text{i} \quad \lambda = \frac{f(\lambda) + f^*(\lambda)}{2},$$

iz neprekidnog funkcionalnog računa slijedi da je u unitaran i da je $a = (u + u^*)/2$.

U općem slučaju za svaki $a \in A$, $a \neq 0$ imamo rastav

$$a = \|a\| \left(\frac{1}{\|a\|} \operatorname{Re} a \right) + i\|a\| \left(\frac{1}{\|a\|} \operatorname{Im} a \right).$$

Prema dokazanom, elementi $\|a\|^{-1} \operatorname{Re} a$ i $\|a\|^{-1} \operatorname{Im} a$ se mogu prikazati kao linearne kombinacije dva unitarna elementa. Dakle, a se može prikazati kao linearna kombinacija četiri unitarna elementa. □

3.3 Uređaj u C^*-algebrama

U ovoj točki ćemo uvesti uređaj na hermitskom dijelu A_h C^*-algebre A. Kao motivaciju, promotrimo sljedeći (komutativni) primjer.

Primjer 3.3.1. Neka je $A = C_0(\Omega)$, gdje je Ω LCH prostor. Tada je A_h skup svih realnih funkcija iz A. Na A_h imamo prirodan parcijalni uređaj koji je dan s

$$f \leq g \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(s) \leq g(s) \quad \text{za sve } s \in \Omega.$$

Funkcija $f \in A$ je pozitivna, tj. $f \geq 0$ ako i samo ako je oblika $f = g^*g$ za neku funkciju $g \in A$. U tom slučaju f ima jedinstven pozitivni drugi korijen u A koji je dan s $s \mapsto \sqrt{f(s)}$. Primijetimo da pozitivnost realnih funkcija možemo iskazati u terminu norme: Ako je $f \in A_h$, tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(i) $f \geq 0$.

(ii) Za neki $t \geq \|f\|_\infty$ vrijedi $\|t1 - f\|_\infty \leq t$.

(iii) Za svaki $t \geq \|f\|_\infty$ vrijedi $\|t1 - f\|_\infty \leq t$

Neka je A C^*-algebra. Za element $a \in A$ kažemo da je **pozitivan** i pišemo $a \geq 0$ ako je a hermitski i ako vrijedi $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$. Skup svih pozitivnih elemenata u A označavamo s A_+.

Napomena 3.3.2. Primijetimo da je $A_+ \cap (-A_+) = \{0\}$. Zaista, ako je $a \in A_+ \cap (-A_+)$, tada je $\sigma(a) = \{0\}$, pa iz Teorema 3.1.1 slijedi $\|a\| = r(a) = 0$, odnosno $a = 0$. Također primijetimo da iz Korolara 3.2.8 slijedi da za svaku C^*-podalgebru B od A imamo $B_+ = B \cap A_+$.

Propozicija 3.3.3. *Neka je A C^*-algebra i neka je $n \in \mathbb{N}$. Za svaki pozitivni element $a \in A_+$ postoji jedinstven pozitivni element $b \in A_+$ takav da je $b^n = a$.*

Dokaz. Definirajmo neprekidnu funkciju $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ s $f(t) := \sqrt[n]{t}$. Kako je $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$ i $f(0) = 0$, imamo $b := f(a) \in C_0^*(a) \subseteq A$ (Korolar 3.2.12). Nadalje, iz Teorema o preslikavanju spektra (Korolar 3.2.11 (iii)) zaključujemo da je $\sigma(b) \subseteq \mathbb{R}_+$; dakle $b \in A_+$. Nadalje, kako je $f(t)^n = t$ za sve $t \in \mathbb{R}_+$, slijedi $b^n = a$. Ostaje dokazati jedinstvenost takvog elementa b. Pretpostavimo da je $c \in A_+$ neki drugi element takav da je $c^n = a$. Tada je $ca = cc^n = c^n c = ac$, tj. c i a komutiraju. Nadalje, kako je $b \in C_0^*(a)$, elementi b i c također komutiraju. Neka je B C^*-podalgebra od A generirana s b i c. Tada je B komutativna i $a \in B$. Budući da Geljfandovi transformati od a, b i c zadovoljavaju $\hat{c}^n = \hat{a} = \hat{b}^n$, mora biti $\hat{b} = \hat{c}$, jer su $\hat{b}$ i $\hat{c}$ pozitivne funkcije. Iz Teorema 3.2.1 zaključujemo da je $b = c$. $\square$

Element b iz Propozicije 3.3.3 označavamo s $a^{\frac{1}{n}}$ i zovemo ga **pozitivni n-ti korijen** od a.

Propozicija 3.3.4. *Neka je A C^*-algebra. Za svaki hermitski element $a \in A_h$ postoje jedinstveni pozitivni elementi $a_+, a_- \in A_+$ takvi da vrijedi*

$$a = a_+ - a_- \qquad \text{i} \qquad a_+a_- = a_-a_+ = 0.$$

Pri tome vrijedi $\|a\| = \max\{\|a_+\|, \|a_-\|\}$.

Dokaz. Definirajmo funkcije $f_+, f_- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s

$$f_+(t) := \begin{cases} t & : t \geq 0 \\ 0 & : t \leq 0, \end{cases} \qquad f_-(t) := \begin{cases} 0 & : t \geq 0 \\ -t & : t \leq 0. \end{cases}$$

Stavimo $a_+ := f_+(a)$ i $a_- := f_-(a)$. Budući da je $f_+(0) = f_-(0) = 0$, zaključujemo da su a_+ i a_- elementi u $C_0^*(a) \subseteq A$ (Korolar 3.2.12). Također, elementi a_+ i a_- su hermitski, jer su f_+ i f_- realne funkcije. Nadalje, iz Teorema o preslikavanju spektra (Korolar 3.2.11 (iii)) zaključujemo da su elementi a_+ i a_- pozitivni, jer je $f_+(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}_+$ i $f_-(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}_+$. Kako je

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}} = f_+ - f_- \quad \text{i} \quad f_+f_- = f_-f_+ = 0,$$

iz neprekidnog funkcionalnog računa dobivamo

$$a = a_+ - a_- \quad \text{i} \quad a_+a_- = a_-a_+ = 0.$$

Također,

$$\begin{aligned} \|a\| &= \sup\{|t| : \ t \in \sigma(a)\} = \max\{\sup\{f_+(t) : \ t \in \sigma(a)\}, \sup\{f_-(t) : \ t \in \sigma(a)\}\} \\ &= \max\{\|a_+\|, \|a_-\|\}. \end{aligned}$$

Kako bismo dokazali jedinstvenost elemenata a_+ i a_-, pretpostavimo da su a_1 i a_2 neki drugi elementi u A_+ takvi da je $a = a_1 - a_2$ i $a_1a_2 = a_2a_1 = 0$. Tada je $a^n = a_1^n + (-a_2)^n$ za sve $n \in \mathbb{N}$, odakle slijedi jednakost

$$p(a) = p(a_1) + p(-a_2)$$

za sve polinome $p \in \mathbb{R}[x]$ za koje je $p(0) = 0$. Kako je $f_+(0) = 0$, prema Stone-Weierstrassovom teoremu postoji niz takvih polinoma (p_n) koji uniformno konvergira prema f_+ na $\sigma(a) \cup \sigma(a_1) \cup \sigma(-a_2)$. Tada je

$$f_+(a) = \lim_{n\to\infty} p_n(a) = \lim_{n\to\infty} [p_n(a_1) + p_n(-a_2)] = f_+(a_1) + f_+(-a_2). \tag{3.4}$$

Kako je $f_+(t) = t$ za sve $t \in \sigma(a_1)$ i $f_+(t) = 0$ za sve $t \in \sigma(-a_2)$, imamo $f_+(a_1) = a_1$ i $f_+(-a_2) = 0$. Iz (3.4) zaključujemo da je $a_1 = f_+(a) = a_+$, pa je onda i $a_2 = a_1 - a = a_-$. □

Korolar 3.3.5. *Neka je A C^*-algebra. Svaki element $a \in A$ se može prikazati kao linearna kombinacija četiri pozitivna elementa*

Dokaz. Koristeći Propoziciju 3.3.4, za $a \in A$ imamo

$$a = \mathrm{Re}\, a + i\, \mathrm{Im}\, a = (\mathrm{Re}\, a)_+ - (\mathrm{Re}\, a)_- + i[(\mathrm{Im}\, a)_+ - (\mathrm{Im}\, a)_-],$$

pri čemu su $(\mathrm{Re}\, a)_+, (\mathrm{Re}\, a)_-, (\mathrm{Im}\, a)_+, (\mathrm{Im}\, a)_- \in A_+$. □

Lema 3.3.6. *Neka je A unitalna C^*-algebra. Za hermitski element $a \in A_h$ su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) $a \in A_+$.

(ii) Za neki $t \geq \|a\|$ vrijedi $\|t1 - a\| \leq t$.

(iii) Za svaki $t \geq \|a\|$ vrijedi $\|t1 - a\| \leq t$.

Dokaz. Možemo pretpostaviti da je $A = C^*(a)$. Tada je prema Teoremu 3.2.10 A (izometrički) $*$-izomorfna C^*-algebri $C(\sigma(a))$. Tvrdnja sada slijedi iz Primjera 3.3.1. □

Propozicija 3.3.7. *Neka je A C^*-algebra. Skup svih pozitivnih elemenata A_+ je zatvoren konus u A, tj. A_+ je zatvoren podskup od A i vrijedi:*

(i) Ako su $a \in A_+$ i $t \in \mathbb{R}_+$, tada je i $ta \in A_+$.

(ii) Ako su $a, b \in A_+$ tada je i $a + b \in A_+$.

Dokaz. Budući da za neunitalnu algebru A imamo $A_+ = \widetilde{A}_+ \cap A$, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je A unitalna.

Najprije dokažimo da je A_+ zatvoren podskup od A. Prema Lemi 3.3.6 imamo

$$A_+ = A_h \cap \{a \in A : \ \| \|a\|1 - a\| \le \|a\|\}.$$

Budući da je involucija na A izometrija, skup A_h je zatvoren u A. Drugi skup u gornjem presjeku je također zatvoren zbog neprekidnosti norme. Dakle, A_+ je zatvoren podskup kao presjek dva zatvorena podskupa.

(i). Ako su $a \in A_+$ i $t \in \mathbb{R}_+$, tada je očito $ta \in A_h$. Nadalje, kako je $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$, imamo $\sigma(ta) = \{t\lambda : \ \lambda \in \sigma(a)\} \subseteq \mathbb{R}_+$. Dakle, $ta \in A_+$.

(ii). Neka su $a, b \in A_+$. Prema Lemi 3.3.6 imamo $\| \|a\|1 - a\| \le \|a\|$ i $\| \|b\|1 - b\| \le \|b\|$, pa je

$$\begin{aligned} \|(\|a\| + \|b\|)1 - (a + b)\| &= \|(\|a\|1 - a) + (\|b\|1 - b)\| \le \| \|a\|1 - a\| + \| \|b\|1 - b\| \\ &\le \|a\| + \|b\|. \end{aligned}$$

Pozivajući se ponovno na Lemu 3.3.6, zaključujemo $a + b \in A_+$. $\square$

Propozicija 3.3.8. *Neka je A C^*-algebra. Svaki element oblika a^*a $(a \in A)$ je pozitivan.*

Dokaz. Najprije dokažimo da iz $-a^*a \in A_+$ $(a \in A)$ slijedi $a = 0$. Zaista, prema Propoziciji 1.3.4 imamo $\sigma(-aa^*) \setminus \{0\} = \sigma(-a^*a) \setminus \{0\}$. Odatle slijedi da je i $-aa^* \in A_+$. Kako je $a^*a + aa^* = 2(\operatorname{Re} a)^2 + 2(\operatorname{Im} a)^2$, zaključujemo

$$a^*a = 2(\operatorname{Re} a)^2 + 2(\operatorname{Im} a)^2 - aa^* \in A_+.$$

Dakle, $\sigma(a^*a) = \mathbb{R}_+ \cap (-\mathbb{R}_+) = \{0\}$, pa je $\|a\|^2 = \|a^*a\| = r(a^*a) = 0$, odnosno $a = 0$.

Sada pretpostavimo da je $a \in A$ proizvoljan element i stavimo $b := a^*a$. Tada je $b \in A_h$, pa imamo rastav $b = b_+ - b_-$, gdje su $b_+, b_- \in A_+$ kao u Propoziciji 3.3.4. Ako je $c := ab_-$, tada je

$$-c^*c = -b_-a^*ab_- = -b_-(b_+ - b_-)b_- = b_-^3 \in A_+.$$

Prema prvom dijelu dokaza zaključujemo da je $c = 0$. Dakle, $b_- = 0$, odakle slijedi da je $a^*a = b_+ \in A$. $\square$

Pomoću pojma pozitivnog elementa možemo definirati uređaj na realnom vektorskom prostoru A_h: Za $a, b \in A_h$ stavljamo $a \le b$ ako je $b - a \in A_+$. Tada pišemo i $b \ge a$. Primijetimo da je $\le$ relacija parcijalnog uređaja na A_h:

- Refleksivnost: očito je $a \le a$ za sve $a \in A_h$.

- Antisimetričnost: ako su $a, b \in A_h$ takvi da je $a \le b$ i $b \le a$, tada je $b - a \in A_+ \cap (-A_+) = \{0\}$ (Napomena 3.3.2), odnosno $b = a$.

- Tranzitivnost: ako su $a, b, c \in A_h$ takvi da je $a \le b$ i $b \le c$, tada su $b - a \in A_+$ i $c - b \in A_+$. Iz Propozicije 3.3.7 slijedi $c - a = (c - b) + (b - a) \in A_+$, odnosno $a \le c$.

Nadalje, taj uređaj poštuje strukturu realnog vektorskog prostora na A_h :

- Ako su $a, b, c \in A_h$ i ako je $a \le b$, onda je $(b + c) - (a + c) = b - a \in A_+$, odnosno $a + c \le b + c$.

- Ako su $a, b \in A_h$ takvi da je $a \leq b$ i ako je $t \in \mathbb{R}_+$, tada je $b - a \in A_+$, pa iz Propozicije 3.3.7 dobivamo $tb - ta = t(b-a) \in A_+$, odnosno $ta \leq tb$. Također, $a \leq b$ ako i samo ako je $-b \leq -a$.

Neka je A C^*-algebra. Za prozivoljan element $a \in A$ definiramo njegovu **apsolutnu vrijednost** $|a| := (a^*a)^{\frac{1}{2}}$. Primijetimo da je prema Propozicijama 3.3.8 i 3.3.3 $|a|$ dobro definiran element u A_+. Iz C^*-svojstva dobivamo $\||a|\| = \|a\|$. Također primijetimo da za svaki $a \in A_h$ imamo

$$a_+ = \frac{1}{2}(|a| + a) \quad \text{i} \quad a_- = \frac{1}{2}(|a| - a)$$

i da je a pozitivan ako i samo ako je $a = |a|$.

U sljedećem rezultatu istaknuta su osnovna svojstva od A_+:

Teorem 3.3.9. *Neka je A C^*-algebra.*

(i) $A_+ = \{a^2 : \ a \in A_h\} = \{a^*a : \ a \in A\}$.

(ii) Ako su $a, b \in A_h$ takvi da je $a \leq b$, tada vrijedi $c^*ac \leq c^*bc$ za sve $c \in A$.

(iii) Ako su $a, b \in A_+$ takvi da je $a \leq b$, tada je $\|a\| \leq \|b\|$.

(iv) Ako je algebra A unitalna i ako su a i b pozitivni invertibilni elementi u A, tada iz $a \leq b$ slijedi $0 \leq b^{-1} \leq a^{-1}$.

Dokaz. (i). Tvrdnja slijedi diretkno iz Propozicija 3.3.8 i 3.3.3.

(ii). Budući da je $b - a \geq 0$, koristeći Propozicije 3.3.8 i 3.3.3 imamo:

$$\begin{aligned} c^*bc - c^*ac &= c^*(b-a)c = c^*(b-a)^{\frac{1}{2}}(b-a)^{\frac{1}{2}}c \\ &= ((b-a)^{\frac{1}{2}}c)^*((b-a)^{\frac{1}{2}}c) \geq 0, \end{aligned}$$

odakle slijedi $c^*ac \leq c^*bc$.

(iii). Možemo pretpostaviti da je algebra A unitalna (u protivnom dokaz provodimo u $\widetilde{A}$). Tada je očito $b \leq \|b\|1$, pa je i $a \leq \|b\|1$. Kako je $a \in A_+$, imamo $\|a\| \in \sigma(a)$, odakle slijedi

$$\|b\| - \|a\| \in \sigma(\|b\|1 - a) \subseteq \mathbb{R}_+.$$

Dakle, $\|b\| \geq \|a\|$.

(iv). Najprije primijetimo da iz $c \geq 1$ ($c \in A_h$) slijedi $c^{-1} \leq 1$. Zaista, to je očito točno u funkcijskim C^*-algebrama $C(K)$ (K je CH prostor), dok općenita tvrdnja slijedi iz Teorema 3.2.10 primijenjenog na C^*-algebru $C^*(c)$. Sada, ako su $a, b \in A_+$ takvi da je $a \leq b$, tada prema (ii) imamo

$$1 = a^{-\frac{1}{2}}aa^{-\frac{1}{2}} \leq a^{-\frac{1}{2}}ba^{-\frac{1}{2}},$$

pa je $a^{\frac{1}{2}}b^{-1}a^{\frac{1}{2}} = (a^{-\frac{1}{2}}ba^{-\frac{1}{2}})^{-1} \leq 1$. Ponovno koristeći (ii) dobivamo

$$b^{-1} = a^{-\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}b^{-1}a^{\frac{1}{2}})a^{-\frac{1}{2}} \leq a^{-\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}} = a^{-1}.$$

$\square$

Propozicija 3.3.10. *Neka je A C^*-algebra i neka su $a, b \in A_+$ takvi da je $a \leq b$. Tada je i $a^{\frac{1}{2}} \leq b^{\frac{1}{2}}$.*

Dokaz. Dokazat ćemo da za $a, b \in A_+$ iz $a^2 \leq b^2$ slijedi $a \leq b$, što je naravno ekvivalentno s originalnom tvrdnjom. Kao i inače, možemo pretpostaviti da je A unitalna. Fiksirajmo $\varepsilon > 0$ i označimo redom s c i d realni i imaginarni dio elementa $(\varepsilon 1 + b + a)(\varepsilon 1 + b - a)$. Tada je

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2}[(\varepsilon 1 + b + a)(\varepsilon 1 + b - a) + (\varepsilon 1 + b - a)(\varepsilon 1 + b + a)] \\ &= \varepsilon^2 1 + 2\varepsilon b + b^2 - a^2 \\ &\geq \varepsilon^2 1, \end{aligned}$$

odakle slijedi da je $c \in A_+ \cap A^\times$. Kako je

$$c^{-\frac{1}{2}}(c + id)c^{-\frac{1}{2}} = 1 + ic^{-\frac{1}{2}}dc^{-\frac{1}{2}} \in A^\times,$$

zaključujemo da je $(\varepsilon 1 + b + a)(\varepsilon 1 + b - a) = c + id \in A^\times$. Specijalno, element $\varepsilon 1 + b - a$ je invertibilan slijeva. Kako je $\varepsilon 1 + b - a \in A_h$, iz Propozicije 1.3.17 (ii) slijedi $\varepsilon 1 + b - a \in A^\times$. Posljedično, $-\varepsilon \notin \sigma(b - a)$ za sve $\varepsilon > 0$. To je jedino moguće ako je $\sigma(b - a) \subseteq \mathbb{R}_+$. Dakle, $b - a \in A_+$, odnosno $a \leq b$. $\square$

Sljedeći primjer pokazuje da iz $0 \leq a \leq b$ općenito ne slijedi $a^2 \leq b^2$:

Primjer 3.3.11. Neka je $A = M_2(\mathbb{C})$. Stavimo

$$p := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad q := \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tada su p i q projektori u A i $p \leq p + q$. S druge strane imamo $p^2 = p \not\leq (p+q)^2 = p + q + pq + qp$, budući da matrica

$$q + pq + qp = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ima negativnu svojstvenu vrijednost.

Štoviše, može se dokazati da u svakoj nekomutativnoj C^*-algebri A postoje pozitivni elementi $a, b \in A$ takvi da je $a \leq b$, ali $a^2 \not\leq b^2$ (Zadatak 3.6.15).

Neka je $\phi : A \to B$ $*$-homomorfizam između C^*-algebri A i B. Kao što znamo, $\phi(A)$ je C^*-algebra (Teorem 3.2.13), pa je $\phi(A)_+ = \phi(A) \cap B_+$. Primijetimo da vrijedi $\phi(A_+) \subseteq \phi(A)_+$. Zaista, prema Teoremu 3.3.9 (i), svaki $a \in A_+$ možemo prikazati u obliku $a = x^*x$ za neko $x \in A$. Odatle slijedi $\phi(a) = \phi(x)^*\phi(x) \in \phi(A)_+$. Štoviše, svaki element iz $\phi(A)_+$ pogođen je nekim elementom iz A_+. Preciznije, vrijedi:

Propozicija 3.3.12. *Ako je $\phi : A \to B$ $*$-homomorfizam između C^*-algebri A i B, tada je $\phi(A_+) = \phi(A)_+$.*

Dokaz. Prema prethodnom razmatranju dovoljno je dokazati inkluziju $\phi(A)_+ \subseteq \phi(A_+)$. Neka je $b \in \phi(A)_+$ i neka je $a \in A$ takav da je $b = \phi(a)$. Tada je $\phi(a^*) = \phi(a)^* = b^* = b$, pa je $\phi(a^*a) = b^2$. Kako je $a^*a \in A_+$, prema Propoziciji 3.3.3 postoji $x \in A_+$ takav da je $a^*a = x^2$. Imamo

$$b^2 = \phi(a^*a) = \phi(x^2) = \phi(x)^2. \tag{3.5}$$

Kako su b i $\phi(x)$ pozitivni elementi u B te kako je kvadriranje injektivna funkcija na B_+ (Propozicija 3.3.3), iz (3.5) dobivamo $b = \phi(x) \in \phi(A_+)$. $\square$

3.4 Aproksimativne jedinice, zatvoreni ideali i kvocijenti

Pri radu s neunitalnom C^*-algebrom A često prelazimo na njenu unitizaciju $\widetilde{A}$. Kao što ćemo vidjeti, u nekim situacijama to neće biti dovoljno (npr. pri dokazivanju da je svaki zatvoren ideal u C^*-algebri automatski samoadjungiran). U takvim sitaucijama se pokazuje prednost koncepta aproksimativne jedinice. Prije nego li definiramo taj pojam, najprije napomenimo da ćemo u cijeloj ovoj točki s $\dot{A}$ označavati C^*-algebru A ako je A unitalna, odnosno C^*-algebru $\widetilde{A}$ ako A nije unitalna.

Neka je A C^*-algebra. **Aproksimativna jedinica** u A je rastuća mreža $(e_i)_{i\in\mathbb{I}}$ u $\mathrm{Ball}(A_+)$ takva da za svaki element $a \in A$ mreže $(ae_i)_{i\in\mathbb{I}}$ i $(e_ia)_{i\in\mathbb{I}}$ konvergiraju prema a, tj.

$$\lim_{i\in\mathbb{I}} \|ae_i - a\| = \lim_{i\in\mathbb{I}} \|ae_i - a\| = 0.$$

Budući da je involucija na A izometrija i kako je $A = A_h \oplus iA_h$, očito vrijedi $a = \lim_{i\in\mathbb{I}} ae_i$ za sve $a \in A$ ako i samo ako vrijedi $a = \lim_{i\in\mathbb{I}} e_ia$ za sve $a \in A$. Također primijetimo da je koncept aproksimativne jedinice interesantan jedino u neunitalnim C^*-algebrama, jer u svakoj unitalnoj C^*-algebri A uvijek možemo staviti $e_i = 1$ za sve $i \in \mathbb{I}$. Štoviše, u tom slučaju svaka aproksimativna jedinica u A konvergira prema 1.

Neka je sada A proizvoljna C^*-algebra i označimo s $\mathbb{I}$ skup svih pozitivnih elemenata $a \in A_+$ za koje je $\|a\| < 1$. Tada je $\mathbb{I}$ parcijalno uređen skup (s uređajem naslijeđenim od A_h). Štoviše, $\mathbb{I}$ je usmjeren skup, tj. za svaka dva elementa $a, b \in \mathbb{I}$ postoji $c \in \mathbb{I}$ takav da je $a, b \le c$. Kako bismo to pokazali, najprije primijetimo da je za svaki $a \in A_+$, element $1 + a$ invertibilan u $\dot{A}$ i $a(1 + a)^{-1} = 1 - (1 + a)^{-1}$. Tvrdimo:

$$0 \le a \le b \quad \Longrightarrow \quad a(1 + a)^{-1} \le b(1 + b)^{-1}. \tag{3.6}$$

Zaista, ako je $0 \le a \le b$, tada je $1+a \le 1+b$, pa iz Teorema 3.3.9 (iv) slijedi $(1+b)^{-1} \le (1+a)^{-1}$. Odavde dobivamo $1 - (1 + a)^{-1} \le 1 - (1 + b)^{-1}$, što je prema prethodnoj napomeni ekvivalentno s $a(1 + a)^{-1} \le b(1 + b)^{-1}$. Time smo pokazali tvrdnju (3.6). Nadalje, primijetimo da za svaki $a \in A_+$, element $a(1 + a)^{-1}$ leži u $\mathbb{I}$. Zaista, to je jasno ako je A funkcijska C^*-algebra $C(K)$, dok općenita tvrdnja slijedi iz Korolara 3.2.12 primijenjenog na C^*-algebru $C^*(a) \subseteq \dot{A}$. Sada pretpostavimo da su a i b proizvoljni elementi u $\mathbb{I}$. Stavimo

$$a' := a(1 - a)^{-1}, \quad b' := b(1 - b)^{-1} \quad \text{i} \quad c := (a' + b')(1 + a' + b')^{-1}.$$

Tada je $c \in \mathbb{I}$, a kako je $a' \le a' + b'$ iz (3.6) dobivamo $a = a'(1 + a')^{-1} \le c$. Analogno bismo pokazali da je i $b \le c$.

Time smo pripremili teren sa sljedeći bitan rezultat:

Teorem 3.4.1. *Svaka C^*-algebra A dopušta aproksimativnu jedinicu.*

Dokaz. Dovoljno je dokazati tvrdnju u slučaju kada algebra A nije unitalna. Tada je $0 \in \sigma(a)$ za sve $a \in A$. Neka je $\mathbb{I}$ skup svih pozitivnih elemenata $a \in A_+$ za koje je $\|a\| < 1$. Kao što smo pokazali, $\mathbb{I}$ je usmjeren skup. Za svako $i \in \mathbb{I}$ definirajmo $e_i := i$. Tada je očito $(e_i)_{i\in\mathbb{I}}$ rastuća mreža u $\mathrm{Ball}(A_+)$. Jedino što nam preostaje pokazati je $a = \lim_{i\in\mathbb{I}} e_ia$ za sve $a \in A$. Prema Korolaru 3.3.5, tu jednakost je dovoljno dokazati za elemente $a \in \mathbb{I}$.

Fiksirajmo stoga element $a \in \mathbb{I}$ i neka je $0 < \varepsilon < 1$. Tada je $\sigma(a) \subseteq [0, 1\rangle$ i stavimo $K := [\varepsilon, 1\rangle \cap \sigma(a)$. Neka je $g : \sigma(a) \to [0, 1]$ neprekidna funkcija takva da je $g(0) = 0$ i $g|_K = 1$. Izaberimo $0 < \delta < 1$ takav da je $1 - \delta < \varepsilon$ i stavimo $i_0 = e_{i_0} := \delta g(a)$. Pozivajući se na Korolar 3.2.12 zaključujemo da je $i_0 \in \mathbb{I}$, a kako je $\sup_{t\in\sigma(a)} |t - \delta g(t)t| < \varepsilon$, imamo $\|a - e_{i_0}a\| < \varepsilon$. Neka je $i \in \mathbb{I}$ takav da je $i \geq i_0$. Tada u $\widetilde{A}$ imamo $1 - e_i \leq 1 - e_{i_0}$, odakle primjenom Teorema 3.3.9 dobivamo $a(1-e_i)a \leq a(1-e_{i_0})a$. Sada imamo

$$\begin{aligned} \|a - e_i a\|^2 &= \|(1-e_i)^{\frac{1}{2}}(1-e_i)^{\frac{1}{2}}a\|^2 \leq \|(1-e_i)^{\frac{1}{2}}a\|^2 \\ &= \|a(1-e_i)a\| \leq \|a(1-e_{i_0})a\| \leq \|(1-e_{i_0})a\| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Odavde slijedi da je $a = \lim_{i\in\mathbb{I}} e_i a$. □

Korolar 3.4.2. *Svaka separabilna C^*-algebra A dopušta aproksimativnu jedinicu koja je indeksirana s prirodnim brojevima, tj. koja je niz u A.*

Dokaz. Neka je (F_n) rastuć niz konačnih podskupova od A takav da je $F := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ gust u A i neka je $(e_i)_{i\in\mathbb{I}}$ proizvoljna aproksimativna jedinica u A. Budući da je svaki skup F_n konačan, za svako $\varepsilon > 0$ postoji $i_\varepsilon \in \mathbb{I}$ takav da je $\|a - e_i a\| < \varepsilon$ za sve $a \in F_n$ i $i \geq i_\varepsilon$. Posebno, ako je $n \in \mathbb{N}$ i $\varepsilon = 1/n$, tada postoji $i_n = i_\varepsilon \in \mathbb{I}$ takav da je $\|a - ae_{i_n}\| < 1/n$ za sve $a \in F_n$. Možemo postići da je $i_n \leq i_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Tada je $\lim_{n\to\infty} \|a - ae_{i_n}\| = 0$ za sve $a \in F$, jer je niz skupova (F_n) rastuć. Budući da je F gust u A, to naravno vrijedi i za sve $a \in A$. Dakle, $(e_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ je aproksimativna jedinica u A. □

Korolar 3.4.3. *Neka je I zatvoren lijevi ideal u C^*-algebri A. Tada postoji rastuća mreža $(e_i)_{i\in\mathbb{I}}$ pozitivnih elemenata u $\mathrm{Ball}(I)$ takva da je $a = \lim_{i\in\mathbb{I}} ae_i$ za sve $a \in I$ (tzv. desna aproksimativna jedinica).*

Dokaz. Stavimo $B := I \cap I^* = \{a \in I \ : a^* \in I\}$ i primijetimo da je B C^*-podalgebra od A. Prema Teoremu 3.4.1 B dopušta aproksimativnu jedinicu $(e_i)_{i\in\mathbb{I}}$. Ako je $a \in I$, tada je $a^*a \in B$, pa je $\lim_{i\in\mathbb{I}} \|a^*a - a^*ae_i\| = 0$. Računajući u $\dot{A}$, imamo

$$\begin{aligned} \lim_{i\in\mathbb{I}} \|a - ae_i\|^2 &= \lim_{i\in\mathbb{I}} \|(1-e_i)a^*a(1-e_i)\| \leq \lim_{i\in\mathbb{I}} \|a^*a(1-e_i)\| \\ &= \lim_{i\in\mathbb{I}} \|a^*a - a^*ae_i\| = 0. \end{aligned}$$

Dakle, $a = \lim_{i\in\mathbb{I}} ae_i$. □

Teorem 3.4.4. *Neka je A C^*-algebra i neka je I zatvoren (obostrani) ideal u A. Tada je I samoadjungiran, dakle C^*-podalgebra od A. Nadalje, ako je $(e_i)_{i\in\mathbb{I}}$ aproksimativna jedinica u I, tada za kvocijentnu normu na A/I vrijedi*

$$\|a + I\| = \lim_{i\in\mathbb{I}} \|a - e_i a\| = \lim_{i\in\mathbb{I}} \|a - ae_i\| \qquad (a \in A).$$

Dokaz. Najprije dokažimo da je $I^* = I$. Prema Korolaru 3.4.3 I dopušta rastuću mrežu $(e_i)_{i\in\mathbb{I}}$ pozitivnih elemenata u $\mathrm{Ball}(I)$ takvu da je $a = \lim_{i\in\mathbb{I}} ae_i$ za sve $a \in I$. Budući da je involucija izometrična, tada je i $a^* = \lim_{i\in\mathbb{I}} e_i a^*$. Kako je I ideal u A imamo $e_i a^* \in I$ za sve $i \in \mathbb{I}$, a kako je I zatvoren, slijedi da je i $a^* \in I$.

Neka je sada $(e_i)_{i\in I}$ proizvoljna aproksimativna jedinica u I. Po definiciji kvocijentne norme na A/I, za $a \in A$ i $\varepsilon > 0$ možemo naći element $b \in I$ takav da je $\|a + b\| < \|a + I\| + \varepsilon/2$. Kako je $b = \lim_{i\in\mathbb{I}} e_i b$, postoji $i_0 \in \mathbb{I}$ takav da je $\|b - e_i b\| < \varepsilon/2$ za sve $i \geq i_0$. Računajući u $\dot{A}$, imamo

$$\begin{aligned} \|a - e_i a\| &\leq \|(1-e_i)(a+b)\| + \|b - e_i b\| \\ &\leq \|a + b\| + \|b - e_i b\| \\ &< \|a + I\| + \varepsilon \end{aligned}$$

za sve $i \geq i_0$. Time smo pokazali jednakost $\|a+I\| = \lim_{i\in\mathbb{I}} \|a - e_i a\|$. Odavde također slijedi i

$$\|a+I\| = \|a^*+I\| = \lim_{i\in\mathbb{I}} \|a^* - e_i a^*\| = \lim_{i\in\mathbb{I}} \|a - a e_i\|.$$

□

Korolar 3.4.5. *Neka je A C^*-algebra i neka je I zatvoren ideal u A. Tada je A/I C^*-algebra.*

Dokaz. Neka je $(e_i)_{i\in\mathbb{I}}$ aproksimativna jedinica u I. Koristeći Teorem 3.4.4, za $a \in A$ i $b \in I$ imamo

$$\begin{aligned}
\|a+I\|^2 &= \lim_{i\in\mathbb{I}} \|a - a e_i\|^2 = \lim_{i\in\mathbb{I}} \|(1-e_i)a^*a(1-e_i)\| \\
&\leq \sup_{i\in\mathbb{I}} \|(1-e_i)(a^*a+b)(1-e_i)\| + \lim_{i\in\mathbb{I}} \|(1-e_i)b(1-e_i)\| \\
&\leq \|a^*a+b\| + \lim_{i\in\mathbb{I}} \|b - b e_i\| \\
&= \|a^*a+b\|,
\end{aligned}$$

odakle slijedi $\|a+I\|^2 \leq \|a^*a+I\|$ (gdje smo, kao i inače, prethodni račun proveli u $\dot{A}$). Iz Propozicije 2.1.9 slijedi da je A/I C^*-algebra. □

Napomena 3.4.6. Koristeći Korolar 3.4.5 i Teorem 3.2.13 (ii) možemo dati alternativno dokaz činjenice da je slika $*$-homomorfizma $\phi : A \to B$ između C^*-algebri A i B C^*-podalgebra od B (Teorem 3.2.13 (i)). Zaista, inducirano preslikavanje

$$\dot{\phi} : A/\ker\phi \to B, \qquad \dot{\phi}(a+\ker\phi) = \phi(a) \quad (a \in I)$$

definira $*$-monomorfizam između C^*-algebri $A/\ker\phi$ i B, pa je stoga $\dot{\phi}$ izometričan. Budući da je slika od $\dot{\phi}$ jednaka $\phi(A)$, zaključujemo da je $\phi(A)$ potpuna, dakle C^*-podalgebra od B.

Na kraju ove točke istaknimo i sljedeće dvije jednostavne posljedice dobivenih rezultata:

Propozicija 3.4.7. *Neka je A C^*-algebra. Ako je I zatvoren ideal u A i J zatvoren ideal u I, tada je J ideal i u A.*

Dokaz. Budući da je J samoadjungiran, dovoljno je dokazati da za sve $a \in A$ i $b \in J$ vrijedi $ab \in J$. Nadalje, kako je J C^*-algebra, prema Korolaru 3.3.5 tu je tvrdnju dovoljno dokazati kada je $b \in J_+ = A_+ \cap J$. U tom slučaju, neka je $(e_i)_{i\in\mathbb{I}}$ aproksimativna jedinica u I, tada je $b^{\frac{1}{2}} = \lim_{i\in\mathbb{I}} e_i b^{\frac{1}{2}}$, jer je $b^{\frac{1}{2}} \in I$. Odavde slijedi da je $ab = \lim_{i\in\mathbb{I}} a e_i b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$. Kako je $b^{\frac{1}{2}} \in J$, $a e_i b^{\frac{1}{2}} \in I$ i kako je J ideal u I, zaključujemo da je $ab \in J$. □

Propozicija 3.4.8. *Neka je A C^*-algebra te neka je B C^*-podalgebra od A i I zatvoren ideal u A. Tada je $B+I$ C^*-podalgebra od A.*

Dokaz. Mi ćemo samo pokazati da je $B+I$ zatvoren podskup od A, jer je ostalo trivijalno. Budući da je I zatvoren (dakle Banachov prostor), dovoljno je pokazati da je i kvocijent $(B+I)/I$ Banachov prostor. Kako je $B\cap I$ zatvoren ideal u B, prema Korolaru 3.4.5 $B/(B\cap I)$ je C^*-algebra. Nadalje, preslikavanje

$$\phi : B/(B\cap I) \to A/I, \qquad \phi(b + B\cap I) := b + I \quad (b \in B) \tag{3.7}$$

je dobro definirani $*$-homomorfizam između C^*-algebri $B/(B\cap I)$ i A/I. Njegova slika je $(B+I)/I$, pa iz Teorema 3.2.13 (i) slijedi da je $(B+I)/I$ C^*-algebra. Specijalno, $(B+I)/I$ je Banachov prostor. □

Napomena 3.4.9. Preslikavanje ϕ iz (3.7) uspostavlja $*$-izomorfizam između C^*-algebri $B/(B\cap I)$ i $(B+I)/I$, pa se često te dvije C^*-algebre identificiraju.

3.5 Hereditarne C^*-podalgebre

U ovoj točki proučavat ćemo istaknutu klasu C^*-podalgebri, tzv. hereditarne C^*-podalgebre, koje se dosta dobro ponašaju sa stanovišta teorije reprezentacija.

Definicija 3.5.1. Za C^*-podalgebru B C^*-alegbre A kažemo da je **hereditarna** ako B sadržava sve pozitivne elemente iz A koji su manji ili jednaki od nekog pozitivnog elementa od A, tj. ako su $a \in A_+$ i $b \in B_+$ takvi da je $a \le b$, onda je nužno $a \in B$.

Očito su 0 i A hereditarne C^*-podalgebre od A te je presjek proizvoljne familije hereditarnih C^*-podalgebri od A također hereditarna C^*-podalgebra od A. Zbog toga ima smisla definirati hereditarnu C^*-podalgebru **generiranu** s podskupom S od A kao najmanju hereditarnu C^*-podalgebru od A koja sadrži S.

Primjer 3.5.2. Ako je p projektor u C^*-algebri A onda je C^*-podalgbra pAp hereditarna. Zaista, najprije primijetimo da je pAp uistinu C^*-podalgebra od A. Nadalje, ako je $b \in A_+$ takav da je $b \le pap$ za neko $a \in A_+$ onda je $0 \le (1-p)b(1-p) \le (1-p)pap(1-p) = 0$, odakle slijedi $(1-p)b(1-p) = 0$. Koristeći C^*-svojstvo dobivamo $\|b^{\frac{1}{2}}(1-p)\|^2 = \|(1-p)b(1-p)\| = 0$, pa je $b(1-p) = 0$. Budući da su b i p hermitski, mora biti i $(1-p)b = 0$. Dakle, $b = pbp \in pAp$.

U narednom korisnom teoremu uspostavljamo korespodenciju između hereditarnih C^*-podalgebri i zatvorenih lijevih ideala.

Teorem 3.5.3. *Neka je A C^*-algebra. Ako je L zatvoren lijevi ideal u A onda je $L \cap L^*$ hereditarna C^*-podalgebra od A. Nadalje, preslikavanje $\Phi : L \mapsto L \cap L^*$ definira, s obzirom na skupovnu inkluziju, uređajni izomorfizam sa skupa svih zatvorenih lijevih ideala u A na skup svih hereditarnih C^*-podalgebri od A. Ako je B hereditarna C^*-podalgebra od A tada je $\Phi^{-1}(B) = L(B)$, gdje je*

$$L(B) := \{a \in A : \ a^*a \in B\}. \tag{3.8}$$

Dokaz. Ako je L zatvoren lijevi ideal u A tada je $B := L \cap L^*$ očito C^*-podalgebra od A. Pretpostavimo da su $a \in A_+$ i $b \in B_+$ takvi da je $a \le b$. Prema Korolaru 3.4.3 postoji rastuća mreža $(e_i)_{i\in\mathbb{I}}$ pozitivnih elemenata u $\mathrm{Ball}(L)$ takva da je $b = \lim_{i\in\mathbb{I}} be_i$. Kako je za sve $i \in \mathbb{I}$

$$0 \le (1-e_i)a(1-e_i) \le (1-e_i)b(1-e_i),$$

slijedi

$$\|a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}e_i\|^2 = \|(1-e_i)a(1-e_i)\| \le \|(1-e_i)b(1-e_i)\| \le \|b - be_i\|.$$

Kako je $\lim_{i\in\mathbb{I}} \|b - be_i\| = 0$, slijedi $a^{\frac{1}{2}} = \lim_{i\in\mathbb{I}} a^{\frac{1}{2}}e_i$. Budući da je $e_i \in L$ za sve $i \in \mathbb{I}$, zaključujemo da je $a^{\frac{1}{2}} \in L$. Dakle, $a \in B$ pa je B zaista hereditarna C^*-podalgebra od A.

Neka je sada B hereditarna C^*-podalgebra od A i stavimo $L = L(B)$, gdje je $L(B)$ kao u (3.8). Ako su $a, b \in L$ onda je i $a + b \in L$ budući da je

$$(a+b)^*(a+b) \le (a+b)^*(a+b) + (a-b)^*(a-b) = 2(a^*a + b^*b) \in B.$$

Nadalje, ako su $a \in A$ i $b \in L$ onda je $ab \in L$ budući da je

$$(ab)^*(ab) = b^*a^*ab \le \|a^2\|b^*b \in B.$$

Lako se vidi i da je L zatvoren s obzirom na množenje skalarom. Dakle, L je lijevi ideal koji je očito zatvoren budući da je B zatvorena. Ako je $b \in B$ onda je $b^*b \in B$ pa je $b \in L$. Dakle, $B \subseteq L \cap L^*$. Obratno, ako je $b \in (L \cap L^*)_+$ tada je $b^2 \in B$, pa je i $b \in B$. Dakle, $B = L \cap L^*$. Time smo pokazali da je funkcija $\Phi : L \mapsto L \cap L^*$ bijekcija te da je $\Phi^{-1}(B) = L(B)$.

Ostaje dokazati da je Φ uređajni izomorfizam s obzirom na skupovnu inkluziju. Pretpostavimo stoga da su L_1 i L_2 zatvoreni lijevi ideali u A. Očito iz $L_1 \subseteq L_2$ slijedi $L_1 \cap L_1^* \subseteq L_2 \cap L_2^*$. Pretpostavimo sada da je $L_1 \cap L_1^* \subseteq L_2 \cap L_2^*$ i neka je $(e_i)_{i\in\mathbb{I}}$ aproksimativna jedinica za $L_1 \cap L_1^*$. Tada za $a \in L_1$ imamo

$$\lim_{i\in\mathbb{I}} \|a - ae_i\|^2 = \lim_{i\in\mathbb{I}} \|(1-e_i)a^*a(1-e_i)\| \leq \lim_{i\in\mathbb{I}} \|a^*a(1-e_i)\| = 0,$$

jer je $a^*a \in L_1 \cap L_1^*$. Slijedi da je $a = \lim_{i\in\mathbb{I}} ae_i \in L_2$, budući da je $e_i \in L_1 \cap L_1^* \subseteq L_2$ za sve $i \in \mathbb{I}$. Time smo pokazali da je $L_1 \subseteq L_2$ pa je dokaz teorema u potpunosti završen.

□

Imamo sljdedeću očitu posljedicu Teorema 3.5.3:

Korolar 3.5.4. *Svaki zatvoren (obostran) ideal u C^*-algebri A je hereditarna C^*-algebra.*

Sljedeći teorem nam daje korisnu karakterizaciju hereditarnosti:

Teorem 3.5.5. *Neka je B C^*-podalgebra C^*-algebre A. Tada je B hereditarna ako i samo ako je $bab' \in B$ za sve $b, b' \in B$ i $a \in A$.*

Dokaz. Ako je B hereditarna onda je prema Teoremu 3.5.3 $B = L \cap L^*$ za neki zatvoren lijevi ideal L od A. Tada za $b, b' \in B$ i $a \in A$ imamo $b(ab') \in L$ i $b'^*(a^*b^*) \in L$ pa je $bab' \in L \cap L^* = B$.

Obratno, pretpostavimo da B zadovoljava svojstvo da je $bab' \in B$ za sve $b, b' \in B$ i $a \in A$. Neka je $(e_i)_{i\in\mathbb{I}}$ aproksimativna jedinica za B. Ako su $a \in A_+$ i B_+ takvi da je $a \leq b$, onda za sve $i \in \mathbb{I}$ imamo $0 \leq (1-e_i)a(1-e_i) \leq (1-e_i)b(1-e_i)$, pa je stoga $\|a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}e_i\| \leq \|a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}e_i\|$. Kako je $b^{\frac{1}{2}} = \lim_{i\in\mathbb{I}} b^{\frac{1}{2}}e_i$, slijedi $a^{\frac{1}{2}} = \lim_{i\in\mathbb{I}} a^{\frac{1}{2}}e_i$, pa je $a = \lim_{i\in\mathbb{I}} e_iae_i \in B$. Dakle, B je hereditarna. □

Imamo sljedeću očitu posljedicu:

Korolar 3.5.6. *Svaki zatvoren ideal C^*-algebre je hereditarna C^*-podalgebra.*

Korolar 3.5.7. *Ako je A C^*-algebra i $a \in A_+$, tada je hereditarna C^*-podalgebra generirana s a jednaka zatvaraču $\overline{aAa}$.*

Dokaz. Jedino što tu trebamo provjeriti je da je $a \in \overline{aAa}$; ostatak je rutina. Ako je $(e_i)_{i\in\mathbb{I}}$ aproksimativna jedinica za A, tada je $a^2 = \lim_{i\in\mathbb{I}} ae_ia$, pa je $a^2 \in \overline{aAa}$. Kako je $\overline{aAa}$ C^*-algebra, to je i $a = \sqrt{a^2} \in \overline{aAa}$. □

Štoviše, svaka separabilna hereditarna C^*-podalgebra ima oblik kao u iskazu Korolara 3.5.7:

Teorem 3.5.8. *Pretpostavimo da je B separabilna hereditarna C^*-podalgebra C^*-algebre A. Tada postoji element $a \in B$ takav da je $B = \overline{aAa}$.*

Dokaz. Budući da je B separabilna, prema Korolaru 3.4.2 B dopušta aproksimativnu jedinicu koja je indeksirana prirodnim brojevima; označimo ju s $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Definirajmo $a := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}e_n$. Tada je $a \in B_+$, pa B sadrži $\overline{aAa}$. Kako je $2^{-n}e_n \leq a$ te kako je $\overline{aAa}$ hereditarna C^*-podalgebra (Korolar 3.5.7), zaključujemo $e_n \in \overline{aAa}$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Budući da za svaki $b \in B$ vrijedi $b = \lim_{n\to\infty} e_nbe_n$, mora biti $b \in \overline{aAa}$ jer je $e_n \in \overline{aAa}$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Time smo pokazali da je $B = \overline{aAa}$. □

Sljedeći primjer nam pokazuje da Teorem 3.5.8 općenito ne vrijedi bez pretpostavke separabilnosti:

Primjer 3.5.9. Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Budući da je algebra kompaktnih operatora $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ ideal u $\mathbb{B}(\mathcal{H})$, ona je svakako hereditarna C^*-podalgebra od $\mathbb{B}(\mathcal{H})$. Pretpostavimo da je $\mathbb{K}(\mathcal{H}) = \overline{u\mathbb{B}(\mathcal{H})u}$ za neki $u \in \mathbb{B}(\mathcal{H})_+$. Ako je $x \in \mathcal{H}$ onda je $x \otimes x = \lim_{n\to\infty} uv_nu$ za neki niz (v_n) u $\mathbb{B}(\mathcal{H})$, pa se stoga x nalazi u zatvaraču slike od u. To pokazuje da je $H = \overline{\operatorname{ran} u}$. Posebno, $\mathcal{H}$ mora biti separabilan (Napomena 4.4.5). Dakle, ako $\mathcal{H}$ nije separabilan, tada ideal $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ od $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ ne može biti oblika $\overline{u\mathbb{B}(\mathcal{H})u}$ za neki $u \in \mathbb{B}(\mathcal{H})_+$.

Propozicija 3.5.10. *Pretpostavimo da je B hereditarna C^*-podalgebra unitalne C^*-algebre A i neka je $a \in A_+$. Ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $b \in B_+$ takav da je $a \leq b + \varepsilon 1$, onda je $a \in B$.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Prema pretpostavci postoji $b_\varepsilon \in B_+$ takav da je $a \leq b_\varepsilon^2 + \varepsilon^2 1$, tako da je $a \leq (b_\varepsilon + \varepsilon 1)^2$. Stoga je:

$$(b_\varepsilon 1 + \varepsilon)^{-1} a (b_\varepsilon + \varepsilon 1)^{-1} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \|(b_\varepsilon + \varepsilon 1)^{-1} a (b_\varepsilon + \varepsilon 1)^{-1}\| \leq 1.$$

Koristeći činjenicu da je $1 - b_\varepsilon(b_\varepsilon + \varepsilon 1)^{-1} = \varepsilon(b_\varepsilon + \varepsilon 1)^{-1}$ dobivamo:

$$\begin{aligned} \|a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}} b_\varepsilon (b_\varepsilon + \varepsilon 1)^{-1}\|^2 &= \varepsilon^2 \|a^{\frac{1}{2}} (b_\varepsilon + \varepsilon 1)^{-1}\|^2 \\ &= \varepsilon^2 \|(b_\varepsilon + \varepsilon 1)^{-1} a (b_\varepsilon + \varepsilon 1)^{-1}\| \\ &\leq \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Stoga,

$$a^{\frac{1}{2}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} a^{\frac{1}{2}} b_\varepsilon (b_\varepsilon + \varepsilon 1)^{-1}.$$

Uzimajući adjungate u gornjoj jednakosti dobivamo i

$$a^{\frac{1}{2}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} (b_\varepsilon + \varepsilon 1)^{-1} b_\varepsilon a^{\frac{1}{2}}.$$

Dakle,

$$a = \lim_{\varepsilon \to 0^+} (b_\varepsilon + \varepsilon 1)^{-1} b_\varepsilon a b_\varepsilon (b_\varepsilon + \varepsilon 1)^{-1}. \tag{3.9}$$

Kako je $b_\varepsilon(b_\varepsilon + \varepsilon 1)^{-1} \in B$, slijedi da je $(b_\varepsilon + \varepsilon 1)^{-1} b_\varepsilon a b_\varepsilon (b_\varepsilon + \varepsilon 1)^{-1} \in B$ budući da je B hereditarna C^*-podalgebra od A. Iz (3.9) zaključujemo da je i $a \in B$.

□

Struktura ideala hereditarnih C^*-podalgebri je na lijep način povezana sa strukturom ideala matične algebre:

Teorem 3.5.11. *Neka je B hereditarna C^*-podalgebra C^*-algebre A te neka je J zatvoren ideal u B. Tada postoji zatvoren ideal I u A takav da je $J = B \cap I$.*

Dokaz. Stavimo $I := AJA$. Tada je I zatvoren ideal u A. Kako je J C^*-algebra imamo $J = J^3$, a kako je B hereditarna u A imamo $B \cap I = BIB$ (obje te jednakosti lako slijedi iz egzistencije aproksimativne jedinice). Stoga:

$$B \cap I = BIB = B(AJA)B = BAJ^3AB \subseteq BJB, \tag{3.10}$$

jer su BAJ i JAB sadržane u B (Teorem 3.5.5). Kako je J ideal u B, vrijedi $BJB = B$, pa iz (3.10) slijedi $B \cap I \subseteq J$. Budući da je obratna inkluzija očigledna, zaključujemo da je $B \cap I = J$. □

Korolar 3.5.12. *Svaka hereditarna C^*-podalgebra proste C^*-algebre je i sama prosta.*

Dokaz. Neka je B hereditarna C^*-podalgebra proste C^*-algebre A. Ako je J zatvoren ideal u B, tada je prema Teoremu 3.5.11 $J = B \cap I$ za neki zatvoren ideal I u A. Budući da je A prosta, mora biti $I = \{0\}$ ili $I = A$, pa je posljedično $J = 0$ ili $J = B$. $\square$

Napomena 3.5.13. Korolar 3.5.12 općenito ne vrijedi bez pretpostavke hereditarnosti. Npr., neka je $\mathcal{H}$ separabilan beskonačnodimenzionalan Hilbertov prostor te neka su p i q dva projektora konačnog ranga na $\mathcal{H}$ takva da je $pq = 0$. Tada je $A = \mathbb{C}p + \mathbb{C}q$ C^*-podalgebra od (proste C^*-algebre) $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ koja nije prosta. Naime, $Ap = \mathbb{C}p$ i $Aq = \mathbb{C}q$ su sva netrivijalna ideala u A.

3.6 Zadaci

Zadatak 3.6.1. Neka je A unitalna C^*-algebra. Dokažite da je normalan element $a \in A$ invertibilan ako i samo ako postoji $\varepsilon > 0$ takav da vrijedi $\varepsilon 1 \leq a^*a \leq \varepsilon^{-1}1$.

Zadatak 3.6.2. Neka je A unitalna C^*-algebra i neka je $a \in A$. Dokažite da je skup $\{1, a, a^*\}$ linearno zavisan ako i samo ako je a normalan i $\sigma(a)$ leži na nekom pravcu u $\mathbb{C}$.

Zadatak 3.6.3. Neka je A C^*-algebra i neka su $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$ takvi da je $0 \leq a_1 \leq b_1$ i $0 \leq a_2 \leq b_2$. Dokažite da za sve $a \in A$ vrijedi

$$\|a_1^{\frac{1}{2}}a\| \leq \|b_1^{\frac{1}{2}}a\| \qquad \text{i} \qquad \|a_1^{\frac{1}{2}}aa_2^{\frac{1}{2}}\| \leq \|b_1^{\frac{1}{2}}ab_2^{\frac{1}{2}}\|.$$

Zadatak 3.6.4. Neka je A C^*-algebra, neka je $a \in A_+$ pozitivan element te neka su $p, q \in A$ projektori takvi da je $pq = 0$. Ako je $pap = 0$, dokažite da je $paq = 0$.

Zadatak 3.6.5. Neka je A unitalna C^*-algebra i neka je $a \in A$ invertibilan element. Dokažite da postoje jedinstveni elementi $u, p \in A$, pri čemu je u unitaran, a p pozitivan, takvi da je $a = up$.

Zadatak 3.6.6. Neka su A i B C^*-algebre te neka je $\phi : A \to B$ $*$-epimorfizam. Ako su $b_1, b_2 \in B_+$ takvi da je $b_1b_2 = 0$, tada posmatrajući element $b_1 - b_2$ dokažite da postoje elementi $a_1, a_2 \in A_+$ takvi da je $a_1a_2 = 0$ te $\phi(a_1) = b_1$ i $\phi(a_2) = b_2$.

Zadatak 3.6.7. Neka su A i B C^*-algebre. Za linearno preslikavanje $\phi : A \to B$ kažemo da je **pozitivno** ako je $\phi(A_+) \subseteq B_+$. Dokažite da je svako pozitivno linearno preslikavanje između C^*-algebri ograničeno.

Zadatak 3.6.8. Neka su A i B C^*-algebre i neka je $\phi : A \to B$ kontraktivni homomorfizam algebri. Dokažite da je ϕ $*$-homomorfizam.

Zadatak 3.6.9. Neka je

$$K := \left\{ e^{it} : \ t \in \mathbb{R}, \ \frac{\pi}{4} \leq |t| \leq \frac{3\pi}{4} \right\} \subseteq \mathbb{T}.$$

Neka su $\phi : C(\mathbb{D}) \to C(\mathbb{T})$ i $\Psi : C(\mathbb{T}) \to C(K)$ $*$-epimorfizmi definirani restrikcijom, tj.

$$\phi(f) = f|_{\mathbb{T}} \qquad \text{i} \qquad \Psi(g) = g|_K \qquad (f \in C(\mathbb{D}), g \in C(\mathbb{T})).$$

(i) Nađite primjer unitarnog elementa $u \in C(\mathbb{T})$ takvog da je $u \neq \phi(f)$ za svaku invertibilnu funkciju $f \in C(\mathbb{D})$.

(ii) Nađite primjer projektora $q \in C(K)$ takvog da je $\Psi(p) \neq q$ za svaki projektor $p \in C(\mathbb{T})$.

Zadatak 3.6.10. Dokažite ili opovrginite sljedeću tvrdnju: Ako su A i B unitalne komutativne C^*-algebre i ako je $\phi : A \to B$ $*$-epimorfizam, tada za svaki invertibilni hermitski element $b \in B$ postoji invertibilni hermitski element $a \in A$ takav da je $\phi(a) = b$.

Ako je A unitalna C^*-algebra, tada u daljnjem s $\mathcal{U}(A)$ označavamo (multiplikativnu) grupu svih unitarnih elemenata u A, koja je opskrbljena s relativnom topologijom induciranom iz norme.

Zadatak 3.6.11. Neka je A unitalna C^*-algebra.

(i) Ako je $h \in A_h$, dokažite da je $\exp(ih) \in \mathcal{U}(A)$.

(ii) Nađite primjer unitalne komutativne C^*-algebre A u kojoj postoji $u \in \mathcal{U}(A)$ koji nije oblika $\exp(ih)$ za neko $h \in A_h$.

Zadatak 3.6.12. Neka je A unitalna C^*-algebra.

(i) Ako je $u \in \mathcal{U}(A)$ takav da je $\|1-u\| < 2$, dokažite da postoji $h \in A_h$ takav da je $u = \exp(ih)$.

(ii) Ako su $v, w \in \mathcal{U}(A)$ takvi da je $\|v - w\| < 2$, dokažite da postoji $h \in A_h$ takav da je $v = w \exp(ih)$.

Zadatak 3.6.13. Neka je A unitalna C^*-algebra. Za elemente $u, v \in \mathcal{U}(A)$ kažemo da su **homotopni** ako postoji neprekidna funkcija $f : [0,1] \to \mathcal{U}(A)$ takva da je $f(0) = u$ i $f(1) = v$. Označimo s $\mathcal{U}_0(A)$ skup svih elemenata u $u \in \mathcal{U}(A)$ koji su homotopni s jedinicom 1 od A. Dokažite:

(i) $\exp(A_h) = \{\exp(ih) : \ h \in A_h\} \subseteq \mathcal{U}_0(A)$.

(ii) Ako je $u \in \mathcal{U}(A)$ čiji spektar nije cijela kružnica $\mathbb{T}$, tada je $u \in \mathcal{U}_0(A)$.

(iii) $\mathcal{U}_0(A)$ je normalna podgrupa od $\mathcal{U}(A)$ koja je i otvorena i zatvorena u relativnoj topologiji od $\mathcal{U}(A)$.

(iv) Unitarni element $u \in \mathcal{U}(A)$ se nalazi u u $\mathcal{U}_0(A)$ ako i samo ako postoji konačno mnogo hermitskih elemenata $h_1, \dots, h_n \in A_h$ takvi da je $u = \exp(ih_1) \cdots \exp(ih_n)$.

Zadatak 3.6.14. Za topološki prostor K kažemo da je **kontraktibilan** ako postoji točka $s_0 \in K$ i neprekidna funkcija $F : K \times [0,1] \to K$ takva da je $f(s,0) = s$ i $f(s,1) = s_0$ za sve $s \in K$. Ako je K kontraktibilan CH prostor, dokažite da je svaki unitarni element $u \in C(K)$ oblika $u = \exp(ih)$ za neki hermitski element $h \in C(K)$.

Zadatak 3.6.15. Dokažite da je C^*-algebra A komutativna ako i samo ako za sve $a, b \in A_+$ iz $a \leq b$ slijedi $a^2 \leq b^2$.

Zadatak 3.6.16. Neka je A unitalna C^*-algebra. Dokažite da je presjek svih maksimalnih lijevih ideala u A jednak $\{0\}$.

Zadatak 3.6.17. Neka je A unitalna C^*-algebra takva da je svaki zatvoren lijevi ideal u A obostran ideal u A. Dokažite:

(i) Svaki maksimalni lijevi ideal u A je također maksimalni desni ideal u A.

(ii) Ako je I maksimalni lijevi ideal u A (pa onda i obostrani ideal u A), tada je svaki nenul element od A/I invertibilan.

(iii) Svaki maksimalni lijevi ideal u A je jezgra nekog karaktera na A.

(iv) Ako je $a \in A$ i $\lambda \in \sigma(a)$, tada postoji karakter φ na A takav da je $\lambda = \varphi(a)$.

Zaključite da je A komutativna.

Zadatak 3.6.18. Neka je A unitalna C^*-algebra sa sljedećim svojstvom: Ako je $a \in A$ takav da je $a^2 = 0$, tada je $a = 0$.

(i) Za svako $n \in \mathbb{N}$ neka je $f_n : \mathbb{R} \to [0,1]$ neprekidna funkcija takva da je $f_n(t) = 0$ za $|t| \leq 1/2n$ i $f_n(t) = 1$ za $|t| \leq 1/n$. Dokažite da vrijedi

$$f_n(a^*a) = f_{2n}(a^*a)f_n(a^*a), \quad \|a - af_n(a^*a)\| \leq n^{-\frac{1}{2}} \quad \text{i} \quad f_n(a^*a)b = f_n(a^*a)bf_{2n}(a^*a)$$

za sve $a, b \in A$.

(ii) Koristeći Zadatak 3.6.16 dokažite da je A komutativna.

Zadatak 3.6.19. Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor dimenzije veće od 1. Za $\xi \in \mathcal{H}$, $\|\xi\| = 1$ stavimo

$$L := \{T \in \mathbb{B}(\mathcal{H}) : \ T\xi = 0\}.$$

Dokažite da je L lijevi zatvoreni ideal u $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ koji ne dopušta lijevu aproksimativnu jedinicu.

Zadatak 3.6.20. (i) U C^*-algebri $C(\mathbb{D})$ nađite primjer ideala koji nije samoadjungiran.

(ii) Neka je $A := C([0,1])$ i neka je $f(t) = t$ $(t \in [0,1])$. Stavimo $I := fA$ (I je očito ideal u A). Nađite primjer ideala u I koji nije ideal u A.

Poglavlje 4

Operatori na Hilbertovim prostorima

U ovom poglavlju ćemo se kocentrirati na C^*-algebru $\mathbb{B}(\mathcal{H})$, gdje je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Jedinicu (odnosno jedinični operator) u $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ standardno označavamo s I. Sliku operatora $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ ćemo označavati s $\operatorname{ran} T$.

4.1 Osnovna svojstva operatora na Hilbertovim prostorima

U ovoj točki ćemo dati pregled nekih osnovnih činjenica o operatorima na Hilbertovim prostorima. Većina njih je već poznata iz standardnih kurseva iz funkcionalne analize.

Propozicija 4.1.1. *Neka je $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$. Tada vrijedi*

$$\|T\| = \sup\{|\langle T\xi, \eta\rangle| : \ \xi, \eta \in \operatorname{Ball}(\mathcal{H})\}. \tag{4.1}$$

Štoviše, ako je T hermitski tada je

$$\|T\| = \sup\{|\langle T\xi, \xi\rangle| : \ \xi \in \operatorname{Ball}(\mathcal{H})\}. \tag{4.2}$$

Dokaz. Za $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ stavimo $M := \sup\{|\langle T\xi, \eta\rangle| : \ \xi, \eta \in \operatorname{Ball}(\mathcal{H})\}$. Tada je očito $|\langle T\xi, \eta\rangle| \leq \|T\xi\|\|\eta\| \leq \|T\|$ za sve $\xi, \eta \in \operatorname{Ball}(\mathcal{H})$. Obratno, neka je $\xi \in \operatorname{Ball}(\mathcal{H})$ takav da je $T\xi \neq 0$ (ako je $T = 0$ tvrdnja je trivijalna) i stavimo $\eta_\xi := \|T\xi\|^{-1}T\xi$. Tada je $\|\eta_\xi\| = 1$ i $\langle T\xi, \eta_\xi\rangle = \|T\xi\|$. Odavde dobivamo

$$\|T\| = \sup\{\|T\xi\| : \ \xi \in \operatorname{Ball}(\mathcal{H})\} = \sup\{\langle T\xi, \eta_\xi\rangle : \ \xi \in \operatorname{Ball}(\mathcal{H})\} \leq M.$$

Time smo dokazali jednakost (4.1)

Sada pretpostavimo da je $T^* = T$ i stavimo $N := \sup\{|\langle T\xi, \xi\rangle| : \ \xi \in \operatorname{Ball}(\mathcal{H})\}$. Prema (4.1) je očito $N \leq \|T\|$. Kako bismo pokazali obratnu nejednakost, primijetimo da za sve $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ imamo

$$\langle T(\xi + \eta), \xi + \eta\rangle - \langle T(\xi - \eta), \xi - \eta\rangle = 4 \operatorname{Re}\langle T\xi, \eta\rangle.$$

Koristeći tu činjenicu zajedno s relacijom paralelograma, za $\xi, \eta \in \operatorname{Ball}(\mathcal{H})$ imamo

$$\begin{aligned} 4|\operatorname{Re}\langle T\xi, \eta\rangle| &\leq |\langle T(\xi + \eta), \xi + \eta\rangle| + |\langle T(\xi - \eta), \xi - \eta\rangle| \\ &\leq N\|\xi + \eta\|^2 + N\|\xi - \eta\|^2 = 2N(\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2) \\ &= 4N, \end{aligned}$$

iz čega slijedi $|\operatorname{Re}\langle T\xi,\eta\rangle| \leq N$. Izaberimo skalar $\lambda \in \mathbb{T}$ takav da vrijedi $\langle T\xi,\eta\rangle = \lambda|\langle T\xi,\eta\rangle|$. Tada je

$$|\langle T\xi,\eta\rangle| = \langle T(\overline{\lambda}\xi),\eta\rangle = |\operatorname{Re}\langle T(\overline{\lambda}\xi),\eta\rangle| \leq N.$$

Prema (4.1) zaključujemo da je $\|T\| \leq N$. □

Iz jednakosti (4.2) specijalno dobivamo:

Korolar 4.1.2. *Neka je $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ takav da je $\langle T\xi,\xi\rangle = 0$ za sve $\xi \in \mathcal{H}$. Ako je T hermitski, tada je $T = 0$.*

Napomena 4.1.3. Nije teško vidjeti da tvrdnja iz Korolara 4.1.2 vrijedi i za sve (ne nužno hermitske) operatore $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ (bitno je da je $\mathcal{H}$ kompleksan Hilbertov prostor).

Korolar 4.1.4. *Operator $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ je normalan ako i samo ako vrijedi $\|T\xi\| = \|T^*\xi\|$ za sve $\xi \in \mathcal{H}$. Specijalno,* $\ker T^* = \ker T$.

Dokaz. Za $\xi \in \mathcal{H}$ imamo

$$\|T\xi\|^2 - \|T^*\xi\|^2 = \langle T\xi, T\xi\rangle - \langle T\xi, T\xi\rangle = \langle (T^*T - TT^*)\xi,\xi\rangle.$$

Budući da je $T^*T - TT^*$ hermitski, tvrdnja slijedi direktno iz Korolara 4.1.2. □

Propozicija 4.1.5. *Operator $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ je hermitski ako i samo ako vrijedi $\langle T\xi,\xi\rangle \in \mathbb{R}$ za sve $\xi \in \mathcal{H}$.*

Dokaz. Ako je $T = T^*$, tada je $\langle T\xi,\xi\rangle = \langle \xi, T\xi\rangle = \overline{\langle T\xi,\xi\rangle}$, odakle slijedi $\langle T\xi,\xi\rangle \in \mathbb{R}$.

Obratno, pretpostavimo da je $\langle T\xi,\xi\rangle \in \mathbb{R}$ za sve $\xi \in \mathcal{H}$. Budući da za $\alpha \in \mathbb{C}$ i $\xi,\eta \in \mathcal{H}$ imamo

$$\langle T\xi,\xi\rangle + \overline{\alpha}\langle T\xi,\eta\rangle + \alpha\langle T\eta,\xi\rangle + |\alpha|^2\langle T\eta,\eta\rangle = \langle T(\xi+\alpha\eta),\xi+\alpha\eta\rangle \in \mathbb{R},$$

taj izraz je jednak svom kompleksnom konjugatu. Kako je $\langle T\xi,\xi\rangle \in \mathbb{R}$ i $\langle T\eta,\eta\rangle \in \mathbb{R}$, dobivamo

$$\begin{aligned}\alpha\langle T\eta,\xi\rangle + \overline{\alpha}\langle T\xi,\eta\rangle &= \overline{\alpha}\langle \xi, T\eta\rangle + \alpha\langle \eta, T\xi\rangle \\ &= \overline{\alpha}\langle T^*\xi,\eta\rangle + \alpha\langle T^*\eta,\xi\rangle.\end{aligned}$$

Stavljajući u gornji izraz $\alpha = 1$ i $\alpha = i$ redom dobivamo

$$\langle T\eta,\xi\rangle + \langle T\xi,\eta\rangle = \langle T^*\xi,\eta\rangle + \langle T^*\eta,\xi\rangle,$$

$$i\langle T\eta,\xi\rangle - i\langle T\xi,\eta\rangle = -i\langle T^*\xi,\eta\rangle + i\langle T^*\eta,\xi\rangle.$$

Uz malo aritmetike dobivamo $\langle T\eta,\xi\rangle = \langle T^*\eta,\xi\rangle$; dakle $T = T^*$. □

Propozicija 4.1.6. *Za svaki operator $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ imamo*

$$\ker T = (\operatorname{ran} T^*)^\perp \qquad \text{i} \qquad \overline{\operatorname{ran} T} = (\ker T^*)^\perp.$$

Dokaz. Najprije primijetimo da su gornje dvije jednakosti ekvivalentne jer je $\mathcal{K}^{\perp\perp} = \overline{\mathcal{K}}$ za svaki potprostor $\mathcal{K}$ od $\mathcal{H}$. Neka su $\xi \in \ker T$ i $\eta \in \mathcal{H}$. Tada je $\langle \xi, T^*\eta\rangle = \langle T\xi,\eta\rangle = 0$, odakle slijedi inkluzija $\ker T \subseteq (\operatorname{ran} T^*)^\perp$. Obratno, ako je $\xi \in (\operatorname{ran} T^*)^\perp$ i $\eta \in \mathcal{H}$, tada je $\langle T\xi,\eta\rangle = \langle \xi, T^*\eta\rangle = 0$, odakle slijedi i $(\operatorname{ran} T^*)^\perp \subseteq \ker T$. □

Napomena 4.1.7. Iz Propozicije 4.1.6 slijedi da za svaki $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ imamo dekompozicije

$$\mathcal{H} = \ker T \oplus \overline{\operatorname{ran} T^*} \qquad \text{i} \qquad \mathcal{H} = \ker T^* \oplus \overline{\operatorname{ran} T}.$$

Posebno, ako je T normalan, imamo $\ker T^* = \ker T$ (Korolar 4.1.4), pa je $\mathcal{H} = \ker T \oplus \overline{\operatorname{ran} T}$.

Za operator $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ kažemo da je **ograničen odozdo** ako postoji $\varepsilon > 0$ takav da vrijedi $\|T\xi\| \geq \varepsilon\|\xi\|$ za sve $\xi \in \mathcal{H}$.

Propozicija 4.1.8. *Operator $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ je invertibilan ako i samo ako je T ograničen odozdo i ima gustu sliku.*

Dokaz. Ako je T invertibilan u $\mathbb{B}(\mathcal{H})$, tada je $\operatorname{ran} T = \mathcal{H}$ i $\|T\xi\| \geq \|T^{-1}\|\|\xi\|$ za sve $\xi \in \mathcal{H}$.

Obratno, ako je $\varepsilon > 0$ takav da je $\|T\xi\| \geq \varepsilon\|\xi\|$ za sve $\xi \in \mathcal{H}$, tada je T očito injektivan, pa je dovoljno pokazati da je slika od T zatvorena u $\mathcal{H}$. Zaista, neka je (ξ_n) niz u $\mathcal{H}$ i $\eta \in \mathcal{H}$ takav da $T\xi_n \longrightarrow \eta$. Iz nejednakosti

$$\|\xi_n - \xi_m\| \leq \frac{1}{\varepsilon}\|T\xi_n - T\xi_m\| \qquad (m, n \in \mathbb{N})$$

slijedi da je (ξ_n) Cauchyjev niz. Kako je $\mathcal{H}$ potpun, postoji $\xi_0 \in \mathcal{H}$ takav da $\xi_n \longrightarrow \xi_0$. Budući da je T neprekidan, imamo $\eta = \lim_n T\xi_n = T\xi_0$; dakle $\eta \in \operatorname{ran} T$. $\square$

Kao direktnu posljedicu Propozicija 4.1.6 i 4.1.8 dobivamo:

Korolar 4.1.9. *Operator $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ je invertibilan ako i samo ako su T i T^* ograničeni odozdo.*

Kao što smo vidjeli, operator $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ je hermitski ako i samo ako je $\langle T\xi, \xi\rangle \in \mathbb{R}$ za sve $\xi \in \mathcal{H}$. Ako je T pozitivan (kao element C^*-algebre $\mathbb{B}(\mathcal{H})$), tada je prema Teoremu 3.3.9 (i), $T = S^*S$ za neki $S \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$. Odatle slijedi $\langle T\xi, \xi\rangle = \|S\xi\|^2 \geq 0$ za sve $\xi \in \mathcal{H}$. Vrijedi i obrat:

Propozicija 4.1.10. *Operator $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ je pozitivan ako i samo ako je $\langle T\xi, \xi\rangle \geq 0$ za sve $\xi \in \mathcal{H}$.*

Dokaz. Već smo pokazali da iz $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})_+$ slijedi $\langle T\xi, \xi\rangle \geq 0$ za sve $\xi \in \mathcal{H}$.

Obratno, pretpostavimo da vrijedi $\langle T\xi, \xi\rangle \geq 0$ za sve $\xi \in \mathcal{H}$. Budući da je T hermitski, imamo $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ (Propozicija 3.1.6 (i)). Nadalje, za svaki $\lambda < 0$ i $\xi \in \mathcal{H}$ imamo

$$\|(\lambda I - T)\xi\|^2 = \|T\xi\|^2 - 2\lambda\langle T\xi, \xi\rangle + \lambda^2\|\xi\|^2 \geq \lambda^2\|\xi\|^2.$$

Kako je i $\lambda I - T$ hermitski, iz Korolara 4.1.9 slijedi da je $\lambda I - T$ invertibilan. Dakle, $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}_+$, pa je T pozitivan. $\square$

Prisjetimo se da za element p C^*-algebre A kažemo da je projektor ako je $p^2 = p^* = p$. Ako je A unitalna, tada je očito i $1 - p$ projektor. U C^*-algebri $A = \mathbb{B}(\mathcal{H})$ projektore dobivamo na sljedeći način: Neka je $\mathcal{K}$ zatvoren potprostor $\mathcal{H}$ i definirajamo operator $P_\mathcal{K} \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ s

$$P_\mathcal{K}\xi := \begin{cases} \xi & : \xi \in \mathcal{K} \\ 0 & : \xi \in \mathcal{K}^\perp. \end{cases}$$

Za $P_\mathcal{K}$ kažemo da je **ortogonalni projektor** na $\mathcal{K}$. Očito je $P^2 = P^* = P$, tj. P je projektor u C^*-algebri $\mathbb{B}(\mathcal{H})$. Štoviše, svaki projektor u $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ dobivamo na taj način.

Propozicija 4.1.11. *Preslikavanje $\mathcal{K} \mapsto P_\mathcal{K}$ je bijekcija sa skupa svih zatvorenih potprostora od $\mathcal{H}$ na skup svih projektora u $\mathbb{B}(\mathcal{H})$.*

Dokaz. Jedino što ćemo pokazati je surjektivnost tog preslikavanja, jer je ostalo trivijalno. Neka je $P \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ takav da je $P^2 = P^* = P$. Stavimo $\mathcal{K} := \operatorname{ran} P$. Budući da je $P^* = P$, iz Propozicije **??** dobivamo $\ker P \oplus \overline{\operatorname{ran} P} = \mathcal{H}$. Nadalje, primijetimo da vrijedi $\operatorname{ran} P = \ker(I - P)$ odakle specijalno slijedi da je $\operatorname{ran} P$ zatvorena. Zaista, $(I - P)\xi = 0$ $(\xi \in \mathcal{H})$ ako i samo ako je $P\xi = \xi$, odakle slijedi $\ker(I - P) \subseteq \operatorname{ran} P$. Obratno, neka je je $\xi \in \operatorname{ran} P$ i neka je $\eta \in \mathcal{H}$ takav da je $\xi = P\eta$. Tada je $P\xi = P^2\eta = P\eta = \xi$, pa je i $\operatorname{ran} P \subseteq \ker(I - P)$. Neka je sada $\xi \in \mathcal{H}$. Prema dokazanom postoje jedinstveni vektori $\xi_1 \in \ker P$ i $\xi_2 \in \operatorname{ran} P$ takvi da je $\xi = \xi_1 \oplus \xi_2$. Tada je $P\xi = P\xi_2 = \xi_2 = P_{\mathcal{K}}\xi_2 = P_{\mathcal{K}}\xi$; dakle $P = P_{\mathcal{K}}$ □

Propozicija 4.1.12. *Za projektore $P, Q \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) $P \leq Q$.

(ii) $PQ = P$

(iii) $QP = P$.

(iv) $\operatorname{ran} P \subseteq \operatorname{ran} Q$

(v) $\|P\xi\| \leq \|Q\xi\|$ *za sve* $\xi \in \mathcal{H}$.

(vi) $Q - P$ *je projektor.*

Dokaz. Ekvivalencija uvjeta (ii), (iii) i (iv) je jasna, kao što su i implikacije (ii) $\Longrightarrow$ (vi) $\Longrightarrow$ (i). Dokazat ćemo da vrijedi i (i) $\Longrightarrow$ (v) $\Longrightarrow$ (ii), odakle će onda slijediti da su sve tvrdnje (i)–(vi) međusobno ekvivalentne.

(i) $\Longrightarrow$ (v). Kako je $P \leq Q$, prema Propozciji 4.1.10 imamo $\|Q\xi\|^2 - \|P\xi\|^2 = \langle (Q-P)\xi, \xi\rangle \geq 0$ za sve $\xi \in \mathcal{H}$.

(v) $\Longrightarrow$ (ii). Ako je $\|P\xi\| \leq \|Q\xi\|$ za sve $\xi \in \mathcal{H}$, tada je $\|P(1 - Q)\xi\| \leq \|Q(1 - Q)\xi\| = 0$ za sve $\xi \in \mathcal{H}$, odnosno $P = PQ$. □

Neka je $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ i neka je $\mathcal{K}$ zatvoren potprostor od $\mathcal{H}$. Prisjetimo se da za $\mathcal{K}$ kažemo da je **invarijantan** za T (odnosno T**-invarijantan**) ako je $T\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$. Također kažemo da $\mathcal{K}$ **reducira** T ako su $\mathcal{K}$ i $\mathcal{K}^\perp$ T-invarijantni. Kažemo da je T **ireducibilan** ako su $\{0\}$ i $\mathcal{H}$ jedini zatvoreni potprostori od $\mathcal{H}$ koji reduciraju T.

Propozicija 4.1.13. *Neka je $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ i neka je $\mathcal{K}$ zatvoren potprostor od $\mathcal{H}$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) $\mathcal{K}$ *je invarijantan za* T.

(ii) $\mathcal{K}^\perp$ *je invarijantan za* T^*.

(iii) $P_{\mathcal{K}}TP_{\mathcal{K}} = TP_{\mathcal{K}}$.

Također su i sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(iv) $\mathcal{K}$ *reducira* T.

(v) $\mathcal{K}$ *je invarijantan za* T *i za* T^*.

(vi) $P_{\mathcal{K}}T = TP_{\mathcal{K}}$.

Dokaz. (i) $\iff$ (ii).

$$\begin{aligned} T\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K} &\iff \langle T^*\xi, \eta\rangle = \langle \xi, T\eta\rangle = 0 \quad \text{za sve } \xi \in \mathcal{K}^\perp \text{ i } \eta \in \mathcal{K} \\ &\iff T^*\mathcal{K}^\perp \subseteq \mathcal{K}^\perp. \end{aligned}$$

(i) $\Longrightarrow$ (iii). Za $\xi \in \mathcal{H}$ imamo $P_\mathcal{K}\xi \in \mathcal{K}$, pa je $TP_\mathcal{K}\xi \in \mathcal{K}$, pa je $P_\mathcal{K}(TP_\mathcal{K}\xi) = TP_\mathcal{K}\xi$. Dakle, $P_\mathcal{K}TP_\mathcal{K} = TP_\mathcal{K}$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Za $\xi \in \mathcal{K}$ imamo $T\xi = TP_\mathcal{K}\xi = P_\mathcal{K}TP_\mathcal{K}\xi \in \mathcal{K}$, pa je $T\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$.

(iv) $\iff$ (v). Prema definiciji $\mathcal{K}$ reducira T ako i samo ako je $T\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$ i $T\mathcal{K}^\perp \subseteq \mathcal{K}^\perp$. Prema (ii), $T\mathcal{K}^\perp \subseteq \mathcal{K}^\perp$ je ekvivaletno s $T^*\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$ (zbog zatvorenosti imamo $\mathcal{K}^{\perp\perp} = \mathcal{K}$).

(v) $\Longrightarrow$ (vi). Ako je $T\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$ i $T^*\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$, tada prema dokazanom vrijedi $P_\mathcal{K}TP_\mathcal{K} = TP_\mathcal{K}$ i $P_\mathcal{K}T^*P_\mathcal{K} = T^*P_\mathcal{K}$. Adjungiranjem druge jednakosti dobivamo $P_\mathcal{K}TP_\mathcal{K} = P_\mathcal{K}T$, pa je $P_\mathcal{K}T = TP_\mathcal{K}$.

(vi) $\Longrightarrow$ (v). Ako je $P_\mathcal{K}T = TP_\mathcal{K}$, tada je i $T^*P_\mathcal{K} = P_\mathcal{K}T^*$, što implicira $P_\mathcal{K}T = P_\mathcal{K}^2T = P_\mathcal{K}TP_\mathcal{K}$ i $P_\mathcal{K}T^* = P_\mathcal{K}^2T^* = P_\mathcal{K}T^*P_\mathcal{K}$. Prema dokazanom, imamo $T\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$ i $T^*\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$. □

Također možemo definirati pojmove invarijatnosti i (i)reducibilnosti za proizvoljan skup operatora u $\mathbb{B}(\mathcal{H})$: Ako je $\mathcal{K}$ zatvoren potprostor od $\mathcal{H}$ i $E \subseteq \mathbb{B}(\mathcal{H})$, tada kažemo da je $\mathcal{K}$ E-invarijantan ako je $\mathcal{K}$ T-invarijantan za sve $T \in E$. Slično, $\mathcal{K}$ reducira E ako $\mathcal{K}$ reducira sve $T \in E$. Ako su pak $\{0\}$ i $\mathcal{H}$ jedini zatvoreni potprostori od $\mathcal{H}$ koji reduciraju sve operatore iz S, tada kažemo da je E ireducibilan.

Napomena 4.1.14. Iz Propozicije 4.1.13 slijedi da je E ireducibilan ako i samo ako su 0 i I jedini projektori u $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ koji komutiraju sa svim operatorima iz E. Nadalje, ako je E samoadjungiran, tada iz Propozicije 4.1.13 također slijedi da je E ireducibilan ako i samo ako su $\{0\}$ i $\mathcal{K}$ jedini E-invarijantni potprostori.

4.2 Parcijalne izometrije i polarna dekompozicija

Kao što svaki kompleksni broj možemo napisati kao produkt unitarnog (tj. kompleksnog broja modula 1) i nenegativnog realnog broja, u ovoj točki ćemo pokazati da svaki operator u $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ možemo prikazati kao produkt parcijalne izometrije i pozitivnog operatora (Teorem 4.2.6)

Prisjetimo se, ako je A unitalna C^*-algebra, tada ze element $a \in A$ kažemo da je a izometrija ako je $a^*a = 1$. U algebri $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ to se podudara sa standardnim pojmom izometrije u normiranom prostoru:

Propozicija 4.2.1. *Za operator $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ vrijedi $T^*T = I$ ako i samo ako vrijedi $\|T\xi\| = \|\xi\|$ za sve $\xi \in \mathcal{H}$.*

Dokaz. Ako je $T^*T = I$, tada je

$$\|T\xi\|^2 = \langle T\xi, T\xi\rangle = \langle T^*T\xi, \xi\rangle = \|\xi\|^2.$$

Obratno, ako je $\|T\xi\| = \|\xi\|$ za sve $\xi \in \mathcal{H}$, tada je

$$\langle (T^*T - I)\xi, \xi\rangle = \|T\xi\|^2 - \|\xi\|^2 = 0.$$

Kako je $T^*T - I$ hermitski, iz Korolara 4.1.2 slijedi $T^*T = I$. □

Ako je $\mathcal{H}$ konačnodimenzionalan, tada iz $T^*T = I$ slijedi da je operator T invertibilan (jer je $\det T \neq 0$) i $T^{-1} = T^*$. Dakle svaka izometrija na konačnodimenzionalnom Hilbertovom prostoru je unitaran operator. Ako je $\mathcal{H}$ beskonačnodimenzionalan, to više ne vrijedi:

Primjer 4.2.2. Pretpostavimo da je $\mathcal{H}$ separabilan i beskonačnodimenzionalan te neka je (e_n) neka ortonormirana baza za $\mathcal{H}$. **Unilateralni šift** (s obzirom na tu bazu) je operator $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definiran s

$$S\xi := \sum_{n=1}^{\infty} \langle \xi, e_n \rangle e_{n+1} \qquad (\xi \in \mathcal{H}).$$

Prema Parsevalovoj jednakosti imamo

$$\|S\xi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \xi, \varepsilon_n \rangle|^2 = \|\xi\|^2,$$

odakle slijedi da je S izometrija. Nadalje, njegov adjungat S^* je dan s

$$\begin{aligned} S^*\xi &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle S^*\xi, e_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \xi, Se_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \xi, e_{n+1} \rangle e_n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \langle \xi, e_n \rangle e_{n-1} \end{aligned}$$

Specijalno, $S^*e_1 = 0$, odakle slijedi da S nije unitaran operator.

Ako je A C^*-algebra, tada za element $a \in A$ kažemo da je parcijalna izometrija ako je $aa^*a = a$. Očito je a parcijalna izometrija ako i samo ako je a^* parcijalna izometrija. Primijetimo da su sve izometrije, koizometrije te svi projektori u A parcijalne izometrije.

Lema 4.2.3. *Neka je A C^*-algebra i neka je $a \in A$. Tada je a^*a projektor ako i samo ako je aa^* projektor.*

Dokaz. Pretpostavimo da je a^*a projektor. Tada je $(aa^*)^3 = (aa^*)^2$, pa iz neprekidnog funkcionalnog računa elementa aa^* zaključujemo da vrijedi $\lambda^3 = \lambda^2$ za sve $\lambda \in \sigma(aa^*)$. Dakle, $\sigma(aa^*) \subseteq \{0, 1\}$, pa iz Propozicije 3.2.14 slijedi da je aa^* je projektor. Obratnu implikaciju dobivamo simetrijom. $\square$

U algebri $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ imamo sljedeću karakterizaciju parcijalnih izometrija:

Propozicija 4.2.4. *Za operator $V \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) V je parcijalna izometrija.

(ii) V^* je parcijalna izometrija

(iii) V^*V je projektor.

(iv) VV^* je projektor.

(v) V je izometrija na $(\ker V)^\perp$, tj. $\|V\xi\| = \|\xi\|$ za sve $\xi \in (\ker V)^\perp$.

Dokaz. Implikacija (i) $\Longrightarrow$ (iii) je trivijalna, dok ekvivalencije (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) i (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv) vrijede u svim C^*-algebrama (Lema 4.2.3).

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Pretpostavimo da je V^*V projektor. Tada je

$$\|V\xi\|^2 = \langle V\xi, V\xi \rangle = \langle V^*V\xi, \xi \rangle = \langle V^*V\xi, V^*V\xi \rangle = \|V^*V\xi\|^2 \tag{4.3}$$

za sve $\xi \in \mathcal{H}$. Specijalno, $\|V(I - V^*V)\xi\| = \|V^*V(1 - V^*V)\xi\| = 0$ za sve $\xi \in \mathcal{H}$, odakle slijedi $V(1 - V^*V) = 0$, odnosno $V = VV^*V$.

(i) $\Longrightarrow$ (v). Pretpostavimo da je $VV^*V = V$. Tada je V^*V projektor, pa iz (4.3) slijedi $\ker(V^*V) = \ker V$, odnosno $\operatorname{ran}(V^*V) = (\ker V)^\perp$. Ako je $\xi \in (\ker V)^\perp$ tada imamo

$$\|V\xi\|^2 = \langle V^*V\xi, \xi\rangle = \langle \xi, \xi\rangle = \|\xi\|^2.$$

Dakle, V je izometrija na $(\ker V)^\perp$.

(v) $\Longrightarrow$ (iii). Pretpostavimo da je V izometrija na $(\ker V)^\perp$. Ako je P projektor na $(\ker V)^\perp$, tada za $\xi \in (\ker V)^\perp$ imamo

$$\langle V^*V\xi, \xi\rangle = \|V\xi\|^2 = \langle \xi, \xi\rangle = \langle P\xi, \xi\rangle.$$

Ako je pak $\xi \in \ker V$, tada imamo

$$\langle V^*V\xi, \xi\rangle = 0 = \langle \xi, \xi\rangle = \langle P\xi, \xi\rangle.$$

Dakle, $\langle (V^*V - P)\xi, \xi\rangle = 0$ za sve $\xi \in \mathcal{H}$, pa iz Korolara 4.1.2 slijedi $V^*V = P$. $\square$

Napomena 4.2.5. Ako je $V \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ parcijalna izometrija, tada iz (dokaza) Propozicije 4.2.4 slijedi da je $\operatorname{ran} V$ zatvoren potprostor od $\mathcal{H}$, te da su V^*V i VV^* projektori redom na potprostore $(\ker V)^\perp$ i $\operatorname{ran} V$. Za prostor $(\ker V)^\perp$ kažemo da je **inicijalni prostor** od V, a za $\operatorname{ran} V$ kažemo da je **finalni prostor** od V.

Teorem 4.2.6 (Teorem o polarnoj dekompoziciji). *Za svaki operator $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ postoji parcijalna izometrija $V \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ s inicijalnim prostorom $(\ker T)^\perp$ i finalnim prostorom $\overline{\operatorname{ran} T}$ takva da vrijedi*

$$T = V|T|.$$

Pri tome vrijedi $V^*V|T| = |T|$, $V^*T = |T|$ i $VV^*T = T$. Nadalje, ako je $T = WR$, gdje su $R, W \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ takvi da je R pozitivan, a W parcijalna izometrija s $\ker W = \ker R$, tada je $R = |T|$ i $W = V$.

Dokaz. Za svaki vektor $\xi \in \mathcal{H}$ imamo

$$\begin{aligned} \||T|\xi\|^2 &= \langle |T|\xi, |T|\xi\rangle = \langle |T|^2\xi, \xi\rangle = \langle T^*T\xi, \xi\rangle = \langle T\xi, T\xi\rangle \\ &= \|T\xi\|^2. \end{aligned}$$

Odatle slijedi da je $\ker |T| = \ker T$, pa je preslikavanje

$$V_0 : \operatorname{ran} |T| \to \mathcal{H}, \qquad V_0 : |T|\xi \mapsto T\xi$$

dobro definirana izometrija. Također je jasno da je V_0 linearno preslikavanje i da je $\operatorname{ran} V_0 = \operatorname{ran} T$. Stoga, V_0 možemo na jedinstven način proširiti do linearne izometrije (koju također označavamo s V_0) s $\overline{\operatorname{ran} |T|}$ na $\overline{\operatorname{ran} T}$. Definirajmo operator $V \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ na sljedeći način:

$$V\xi := \begin{cases} V_0\xi & : \xi \in \overline{\operatorname{ran} |T|} (= (\ker T)^\perp) \\ 0 & : \xi \in (\operatorname{ran} |T|)^\perp (= \ker T). \end{cases}$$

Tada je V parcijalna izometrija s inicijalnim prostorom $(\ker T)^\perp$ i finalnim prostorom $\overline{\operatorname{ran} T}$. Također, prema kontstrukciji je $V|T| = T$. Nadalje, prema Napomeni 4.2.5, V^*V je projektor na $(\ker T)^\perp = \overline{\operatorname{ran} |T|}$, odakle dobivamo jednakosti $V^*V|T| = |T|$, $V^*T = V^*V|T| = |T|$ i $VV^*T = VV^*V|T| = V|T| = T$.

Ostaje dokazati jedinstvenost takve dekompozicije. Pretpostavimo da je $T = WR$, gdje su $R, W \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ takvi da je R pozitivan, a W parcijalna izometrija s $\ker W = \ker R$. Tada je $T^*T = RW^*WR$. Prema Napomeni 4.2.5, W^*W je projektor na inicijalni prostor $(\ker W)^\perp$ od W. Kako je $(\ker W)^\perp = (\ker R)^\perp = \overline{\operatorname{ran} R}$, zaključujemo da je $T^*T = R^2$. Iz Propozicije 3.3.3 slijedi da je $R = |T|$. Napokon, za $\xi \in \mathcal{H}$ imamo $W|T|\xi = T\xi = V|T|\xi$, odakle slijedi da se W i V podudaraju na gustom potprostoru zajedničkog inicijalnog prostora. Dakle, $W = T$. $\square$

Napomena 4.2.7. Neka je $T = V|T|$, gdje su T i V kao u Teoremu 4.2.6. Tada iz $V^*V|T| = |T|$ dobivamo $TT^* = V|T||T|V^* = V|T|(V^*V|T|)V^* = (V|T|V^*)^2$, pa iz Propozicije 3.3.3 slijedi

$$|T^*| = (TT^*)^{\frac{1}{2}} = V|T|V^*.$$

Tada je polarna dekompozicija od T^* dana s

$$T^* = |T|V^* = V^*(V|T|V^*) = V^*|T^*|.$$

Korolar 4.2.8. *Ako je operator $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ invertibilan, tada je parcijalna izometrija V u polarnoj dekompoziciji od T unitaran operator.*

Dokaz. Prema Teoremu 4.2.6 imamo rastav $T = V|T|$, gdje je V parcijalna izometrija s inicijalnim prostorom $(\ker T)^\perp = \mathcal{H}$ i finalnim prostorom $\overline{\operatorname{ran} T} = \mathcal{H}$. Dakle, V je surjektivna izometrija, odnosno V je unitaran operator.

□

Napomena 4.2.9. Prema Zadatku 3.6.5, Korolar 4.2.8 vrijedi u svim unitalnim C^*-algebrama.

Korolar 4.2.10. *Ako je operator $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ normalan, tada postoji unitaran operator $U \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ koji komutira s operatorima T i T^* takav da je $T = U|T|$.*

Dokaz. Neka je $T = V|T|$, gdje je V kao u Teoremu 4.2.6. Budući da je operator T normalan, koristeći Napomenu 4.2.7 imamo

$$V|T|V^* = |T^*| = (TT^*)^{\frac{1}{2}} = (T^*T)^{\frac{1}{2}} = |T|,$$

pa je

$$V|T| = V|T|^* = V(V^*V|T|)^* = V|T|V^*V = |T|V. \tag{4.4}$$

Nadalje, kako je $\ker T^* = \ker T$ (Propozicija 4.1.4), imamo $\overline{\operatorname{ran} T} = (\ker T^*)^\perp = (\ker T)^\perp = (\ker |T|)^\perp = \overline{\operatorname{ran} |T|}$. Stoga je s

$$U\xi := \begin{cases} V\xi & : \xi \in \overline{\operatorname{ran} |T|} (= \overline{\operatorname{ran} T}) \\ \xi & : \xi \in \ker T. \end{cases}$$

defininiran unitaran operator na $\mathcal{H}$. Također, $U|T| = V|T| = T$. Napokon, iz (4.4) slijedi da U komutira s $|T|$, pa posljedično U komutira i s T i T^*. □

4.3 Operatori konačnog ranga

Za linearni operator $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ kažemo da ima **konačan rang** ako je $\operatorname{ran} T$ konačnodimenzionalan (specijalno zatvoren) potprostor od $\mathcal{H}$. U tom slučaju se broj $\mathrm{r}(T) := \dim(\operatorname{ran} T)$ zove **rang** od T. Ukoliko je $\mathcal{H}$ beskonačnodimenzionalan, napomenimo da T ne mora biti nužno ograničen. Skup svih ograničenih operatora konačnog ranga označavamo s $\mathbb{F}(\mathcal{H})$. Tada je $\mathbb{F}(\mathcal{H})$ očito potprostor od $\mathbb{B}(\mathcal{H})$.

Napomena 4.3.1. U daljnjem ćemo operatore iz $\mathbb{F}(\mathcal{H})$ kratko (i malo neprecizno) zvati operatorima konačnog ranga.

Za svaki par vektora $(\xi, \eta) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ definiramo operator $\xi \otimes \eta \in \mathbb{F}(\mathcal{H})$ s

$$(\xi \otimes \eta)(\zeta) := \langle \zeta, \eta \rangle \xi \qquad (\zeta \in \mathcal{H}).$$

Očito je $\operatorname{ran}(\xi \otimes \eta) = \mathbb{C}\xi$ ako je $\eta \neq 0$ i $\ker(\xi \otimes \eta) = \{\eta\}^\perp$ ako je $\xi \neq 0$. Specijalno, $\mathrm{r}(\xi \otimes \eta) \leq 1$ i $\mathrm{r}(\xi \otimes \eta) = 1$ ako i samo ako su ξ i η različiti od 0. Dokaz sljedeće jednostavne tvrdnje ostavljamo za zadaću.

Propozicija 4.3.2. *Neka su $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Tada vrijedi:*

(i) $\|\xi \otimes \eta\| = \|\xi\|\|\eta\|$.

(ii) *Preslikavanje* $(\xi, \eta) \mapsto \xi \otimes \eta$ *s* $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ *u* $\mathbb{F}(\mathcal{H})$ *je seskvilinearno.*

(iii) $(\xi \otimes \eta)(\xi' \otimes \eta') = \langle \eta, \xi' \rangle (\xi \otimes \eta')$ *za sve* $\xi', \eta' \in \mathcal{H}$.

(iv) $T(\xi \otimes \eta) = (T\xi) \otimes \eta$ *i* $(\xi \otimes \eta)T = \xi \otimes (T^*\eta)$ *za sve* $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$.

(v) $(\xi \otimes \eta)^* = \eta \otimes \xi$.

(vi) *Operator* $\xi \otimes \eta$ *je projektor (ranga 1) ako je* $\xi = \eta$ *i* $\|\xi\| = 1$. *Štoviše, svaki projektor ranga 1 je tog oblika.*

Propozicija 4.3.3. *Operator* $T \in \mathbb{F}(\mathcal{H})$ *je ranga* n *ako i samo postoje linearno nezavisni skupovi vektora* $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ *i* $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ *u* $\mathcal{H}$ *takvi da je*

$$T = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \otimes \eta_i. \tag{4.5}$$

Pri tome je $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ *baza za* $\operatorname{ran} T$ *i* $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ *baza za* $\operatorname{ran} T^*$. *Posebno,* $T \in \mathbb{F}(\mathcal{H})$ *ako i samo ako je* $T^* \in \mathbb{F}(\mathcal{H})$ *i* $\mathrm{r}(T) = \mathrm{r}(T^*)$.

Dokaz. Pretpostavimo da T možemo prikazati u obliku (4.5). Tada je očito $\operatorname{ran} T \subseteq \operatorname{span}\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, odakle slijedi $\mathrm{r}(T) \leq n$. Najprije dokažimo da je $\mathrm{r}(T) = n$ ako i samo su $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ i $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ linearno nezavisni skupovi vektora. Zaista, pretpostavimo da je skup $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ linearno zavisan. Tada neki vektor ξ_i možemo prikazati kao linearnu kombinaciju preostala $n-1$ vektora. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je to vektor ξ_n i neka su $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{C}$ takvi da je $\xi_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \xi_i$. Tada iz 4.5 dobivamo

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^{n} \xi_i \otimes \eta_i = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \otimes \eta_i + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \xi_i \right) \otimes \eta_n = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \otimes \eta_i + \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \otimes (\overline{\alpha_i} \eta_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \otimes (\eta_i + \overline{\alpha_i} \eta_n). \end{aligned}$$

Odavde slijedi da je $\operatorname{ran} T \subseteq \operatorname{span}\{\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}$, pa je $r(T) < n$. Analnogno bismo pokazali i da je $r(T) < n$ ako je skup $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ linearno zavisan.

Obratno, ako su su skupovi $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ i $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ linearno nezavisni, izaberimo vektore $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in \mathcal{H}$ takve da je $\langle \zeta_j, \eta_i \rangle = \delta_{i,j}$ za sve $1 \leq i, j \leq n$. Tada je

$$T\zeta_j = \sum_{i=1}^{n} \langle \zeta_j, \eta_i \rangle \xi_i = \xi_j,$$

odakle slijedi da je $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \subseteq \operatorname{ran} T$. Dakle $\mathrm{r}(T) = n$ i $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ je baza za $\operatorname{ran} T$. Nadalje, kako je $T^* = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \otimes \xi_i$ (Propozicija 4.3.2), isti argument pokazuje da je $\mathrm{r}(T^*) = n$ i da je $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ baza za $\operatorname{ran} T^*$.

Ostaje još dokazati da se svaki operator $T \in \mathbb{F}(\mathcal{H})$ ranga n može prikazati u obliku (4.5). Neka je $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ ortonormirana baza za $\operatorname{ran} T$. Stavimo $\eta_i := T\xi_i$. Tada za svako $\zeta \in \mathcal{H}$ imamo

$$\begin{aligned} T\zeta &= \sum_{i=1}^{n} \langle T\zeta, \xi_i \rangle \xi_i = \sum_{i=1}^{n} \langle \zeta, T^*\xi_i \rangle \xi_i = \sum_{i=1}^{n} \langle \zeta, \eta_i \rangle \xi_i \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \otimes \eta_i \right)(\zeta). \end{aligned}$$

dakle, $T = \sum_{i=1}^n \xi_i \otimes \eta_i$. $\square$

Kao direktnu posljedicu Propozicija 4.3.2 i 4.3.3 imamo:

Korolar 4.3.4. $\mathbb{F}(\mathcal{H})$ *je (obostran) samoadjungiran ideal u* $\mathbb{B}(\mathcal{H})$.

Korolar 4.3.5. *Svaki netrivijalni ideal* J *u* $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ *sadrži* $\mathbb{F}(\mathcal{H})$.

Dokaz. Neka je $0 \neq T \in I$ i izaberimo vektor $\xi_0 \in \mathcal{H}$ takav da je $\|T\xi_0\| = 1$. Stavimo $\eta_0 := T\xi_0$. Tada za sve $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ imamo

$$\xi \otimes \eta = \langle \eta_0, \eta_0 \rangle \xi \otimes \eta = (\xi \otimes \eta_0)((T\xi_0) \otimes \eta) = (\xi \otimes \eta_0)T(\xi_0 \otimes \eta),$$

odakle slijedi da je $\xi \otimes \eta \in J$. Dakle, J sadrži sve operatore ranga 1, pa iz Propozicije 4.3.3 slijedi da J sadrži čitav $\mathbb{F}(\mathcal{H})$. $\square$

Napomena 4.3.6. Ako je $\mathcal{K}$ n-dimenzionalan ($n \in \mathbb{N}$) potprostor od $\mathcal{H}$ (specijalno, $\mathcal{K}$ je zatvoren) i ako je $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ ortonormirana baza za $\mathcal{K}$ tada je $\sum_{i=1}^n \xi_i \otimes \xi_i$ (ortogonalni) projektor na potprostor $\mathcal{K}$. Nadalje, budući da je preslikavanje $(\xi, \eta) \mapsto \xi \otimes \eta$ seskvilinearno, vrijedi polarizacijski identitet:

$$\xi \otimes \eta = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{3} i^k (\xi + i^k \eta) \otimes (\xi + i^k \eta).$$

Odavde i iz Propozicije 4.3.3 slijedi da je $\mathbb{F}(\mathcal{H})$ razapet s operatorima oblika $\xi \otimes \xi$ ($\xi \in \mathcal{H}$). Specijalno, $\mathbb{F}(\mathcal{H})$ je razapet s projektorima ranga 1.

Propozicija 4.3.7. *U* $\mathbb{F}(\mathcal{H})$ *postoji mreža projektora* $(P_i)_{i \in \mathbb{I}}$ *takva da vrijedi* $\|P_i\xi - \xi\| \longrightarrow 0$ *za sve* $\xi \in \mathcal{H}$.

Dokaz. Neka je $\{e_j \ : j \in \mathbb{J}\}$ (neka) ortonormirana baza za $\mathcal{H}$ i neka je $\mathbb{I}$ skup svih konačnih podskupova od $\mathbb{J}$. Uredimo $\mathbb{I}$ s inkluzijom. Za $i \in \mathbb{I}$ stavimo $P_i := \sum_{j \in i} e_j \otimes e_j$. Tada je $(P_i)_{i \in \mathbb{I}}$ mreža projektora u $\mathbb{F}(\mathcal{H})$. Neka je $\xi \in \mathcal{H}$. Tada je $\xi = \sum_{j \in \mathbb{J}} \langle \xi, e_j \rangle e_j$ i

$$\lim_{i \in \mathbb{I}} \|P_i\xi - \xi\|^2 = \lim_{i \in \mathbb{I}} \left\| \sum_{j \notin i} \langle \xi, e_j \rangle e_j \right\|^2 = \lim_{i \in \mathbb{I}} \sum_{j \notin i} |\langle \xi, e_j \rangle|^2 = 0.$$

$\square$

Na kraju ove točke napomenimo da je linearni operator $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ograničen ako i samo ako je on $w - w$ neprekidan (tj. T je neprekidan kada su obje kopije od $\mathcal{H}$ opskrbljene sa slabom topologijom. Zaista, ako je $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ i (ξ_i) mreža u $\mathcal{H}$ takva da $\xi_i \xrightarrow{w} \xi_0$ ($\xi_0 \in \mathcal{H}$), tada $\langle \xi_i - \xi_0, \xi \rangle \longrightarrow 0$ za sve $\xi \in \mathcal{H}$, pa onda i $|\langle T(\xi_i - \xi_0), \xi \rangle| = |\langle \xi_i - \xi_0, T^*\xi \rangle| \longrightarrow 0$. Obratno, pretpostavimo da je T $w - w$ neprekidan. Kako bismo pokazali da je $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ koristit ćemo teorem o zatvorenom grafu: Neka (ξ_n) niz u $\mathcal{H}$ takav da $\xi_n \xrightarrow{s} \xi_0$ i $T\xi_n \xrightarrow{s} \eta$ ($\xi_0, \eta \in \mathcal{H}$). Tada naravno vrijedi i $\xi_n \xrightarrow{w} \xi_0$ te $T\xi_n \xrightarrow{w} \eta$. Prema pretpostavci $T\xi_n \xrightarrow{w} T\xi_0$, odakle slijedi da je $T\xi_0 = \eta$. Sličnim arugmentom bismo pokazali i da je svaki $s - w$ neprekidan linearni operator $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ograničen. S druge strane, uvjet $w - s$ neprekidosti na operator T ispada vrlo restriktivan:

Propozicija 4.3.8. *Linearan operator* $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *je konačnog ranga ako i samo ako je* T $w - s$ *neprekidan.*

Dokaz. Neka je (ξ_i) mreža u $\mathcal{H}$ takva da $\xi_i \xrightarrow{w} \xi_0$ $(\xi_0 \in \mathcal{H})$. Tada $\langle \xi_i - \xi_0, \xi\rangle \longrightarrow 0$ za sve $\xi \in \mathcal{H}$, odakle slijedi

$$\lim_i \|(\xi \otimes \xi)(\xi_i) - (\xi \otimes \xi)(\xi_0)\| = \lim_i |\langle \xi_i - \xi_0, \xi\rangle| \|\xi\| = 0.$$

Dakle, svaki operator oblika $\xi \otimes \xi$ je $w - s$ neprekidan. Iz Napomene 4.3.6 zaključujemo i da je svaki $T \in \mathbb{F}(\mathcal{H})$ $w - s$ neprekidan.

Obratno, pretpostavimo da je T $w - s$ neprekidan i neka je B otvorena jedinična kugla u $\mathcal{H}$. Tada je skup $T^{-1}(B)$ slabo otvoren, pa specijalno sadrži i neku baznu otvorenu okolinu nul-vektora. Dakle, postoje $\varepsilon > 0$ i vektori $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathcal{H}$ takvi da je $T(U(0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \varepsilon)) \subseteq B$. To znači da iz $|\langle \xi, \xi_i\rangle| < \varepsilon$ $(\xi \in \mathcal{H})$ za sve $1 \le i \le n$ slijedi $\|T\xi\| < 1$. Stavimo $\mathcal{K} := \operatorname{span}\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$. Tada za svako $\xi \in \mathcal{K}^\perp$ vrijedi $\|T\xi\| < 1$, pa je $T\xi = 0$. Naime, ako bi bilo $\|T\xi\| > 0$ za neki $\xi \in \mathcal{K}^\perp$, tada bismo mogli naći $n \in \mathbb{N}$ takav da je $1 < n\|T\xi\| = \|T(n\xi)\|$. To je naravno kontradikcija, jer je $n\xi \in \mathcal{K}^\perp$. Dakle, $\operatorname{ran} T = T(\mathcal{H}) = T(\mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp) = T\mathcal{K}$, pa je $T \in \mathbb{F}(\mathcal{H})$. $\square$

4.4 Kompaktni operatori

Važnu klasu operatora na Hilbertovim (ili općenitije normiranim) prostorima čine kompaktni operatori. Prije nego li damo formalnu definiciju, prisjetimo se da za podskup S topološkog prostora Ω kažemo da je **relativno kompaktan** ako je njegov zatvarač $\overline{S}$ kompaktan. Ako je Ω metrički prostor, tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(i) S je relativno kompaktan.

(ii) Svaki niz elemenata u S ima podniz koji konvergira u Ω.

Nadalje, ako je Ω potpun, s prethodnim svojstvima su ekvivalentna i sljedeća dva uvjeta:

(iii) Svaki niz elemenata u S ima Cauchyjev podniz.

(iv) S je potpuno omeđen, tj. za svako $\varepsilon > 0$ S dopušta konačnu ε-mrežu. To znači da za svako $\varepsilon > 0$ postoji konačno mnogo točaka $x_1, \ldots, x_n \in S$ tako da vrijedi $S \subseteq \bigcup_{i=1}^n K_\Omega(x_i, \varepsilon)$, gdje $K_\Omega(x_i, \varepsilon)$ označava otvorenu kuglu u Ω s centrom u x_i radijusa ε.

Kao što znamo, svaki kompaktan podskup metričkog prostora Ω je zatvoren i omeđen. Posebno, svaki relativno kompaktan podskup od Ω je omeđen.

Neka je $\mathcal{H}$ (kao i inače) Hilbertov prostor. Za linearni operator $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ kažemo da je **kompaktan** ako je $T(\operatorname{Ball}(\mathcal{H}))$ relativno kompaktan podskup od $\mathcal{H}$. Skup svih kompaktnih operatora na $\mathcal{H}$ označavamo s $\mathbb{K}(\mathcal{H})$.

Napomena 4.4.1. (i) Iz nizovne karakterizacije relativne kompaktnosti slijedi da je linearan operator $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ kompaktan ako i samo ako za svaki ograničen niz (ξ_n) u $\mathcal{H}$ niz $(T\xi_n)$ ima konvergentan podniz.

(ii) $\mathbb{K}(\mathcal{H}) \subseteq \mathbb{B}(\mathcal{H})$, tj. svaki kompaktni operator na $\mathcal{H}$ je ograničen. To je očito, jer je $T(\operatorname{Ball}(\mathcal{H}))$ ograničen kao relativno kompaktan podskup od $\mathcal{H}$.

(iii) Iz (i) slijedi da je $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ (vektorski) potprostor od $\mathbb{B}(\mathcal{H})$.

(iv) Budući da je svaki omeđen podskup konačnodimenzionalnog normiranog prostora relativno kompaktan, imamo $\mathbb{F}(\mathcal{H}) \subseteq \mathbb{K}(\mathcal{H})$. Ta inkluzija je striktna ako i samo ako je $\mathcal{H}$ beskonačnodimenzionalan. Naime, u tom slučaju $I \notin \mathbb{K}(\mathcal{H})$.

Imamo sljedeću karakterizaciju kompaktnih operatora:

Teorem 4.4.2. *Za linearan operator $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) T je kompaktan.

(ii) T je uniformni limes operatora konačnog ranga.

(iii) Restrikcija $T|_{\mathrm{Ball}(\mathcal{H})} : \mathrm{Ball}(\mathcal{H}) \to \mathcal{H}$ je $w - s$ neprekidna.

(iv) $T(\mathrm{Ball}(\mathcal{H}))$ je kompaktan podskup od $\mathcal{H}$.

Prije nego li damo dokaz Teorema 4.4.2, napomenimo da je zatvorena jedinična kugla $\mathrm{Ball}(\mathcal{H})$ slabo kompaktna. Tu činjenicu možemo direktno dokazati (slično kao Banach-Alaogluov teorem), no možemo postupiti i na sljedeći način: Neka je $\mathcal{H}_* := \mathcal{H}$ kao aditivna grupa. Na $\mathcal{H}_*$ definirajmo novo množenje skalarom $\lambda.\xi := \overline{\lambda}\xi$ ($\lambda \in \mathbb{C}$, $\xi \in \mathcal{H}_*$) i novi skalarni produkt $\langle \xi, \eta \rangle_* := \langle \eta, \xi \rangle$ ($\xi, \eta \in \mathcal{H}$). Tada je $\mathcal{H}_*$ Hilbertov prostor. Za $\xi \in \mathcal{H}$ definirajmo funkcional $\Phi(\xi) \in (\mathcal{H}_*)^*$ s $\Phi(\xi)(\eta) := \langle \eta, \xi \rangle_* = \langle \xi, \eta \rangle$. Tada prema Rieszovom teoremu reprezentacije ograničenog linearnog funkcionala (Teorem 1.1.10) preslikavanje

$$\Phi : \mathcal{H} \to (\mathcal{H}_*)^* \qquad \Phi : \xi \mapsto \Phi(\xi)$$

definira izometrički izomorfizam, preko kojeg ćemo identificirati ta dva prostora. Uz tu identifikaciju, slaba topologija na $\mathcal{H}$ postaje slaba $*$-topologija, pa možemo iskorisititi Banach-Alaogluov teorem (Teorem 1.2.10) kako bismo zaključili da je $\mathrm{Ball}(\mathcal{H})$ slabo kompaktna.

Dokaz Teorema 4.4.2. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Neka je $(P_i)_{i \in \mathbb{I}}$ mreža projektora u $\mathbb{F}(\mathcal{H})$ takva da $P_i\xi \xrightarrow{s} \xi$ za sve $\xi \in \mathcal{H}$ (Propozicija 4.3.7). Ako je $T \in \mathbb{K}(\mathcal{H})$, tvrdimo da je $\lim_{i \in \mathbb{I}} \|P_i T - T\| = 0$. Pretpostavimo suprotno. Tada bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da postoji $\varepsilon > 0$ i mreža jediničnih vektora $(\xi_i)_{i \in \mathbb{I}}$ u $\mathcal{H}$ tako da vrijedi $\|P_i T\xi_i - T\xi_i\| \geq \varepsilon$ (u protivnom prijeđemo na podmrežu). Budući da je T kompaktan, također možemo pretpostaviti da mreža $(T\xi_i)_{i \in \mathbb{I}}$ jako konvergira u $\mathcal{H}$ i označimo s ξ njen limes. Tada imamo

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq \|T\xi_i - P_i T\xi_i\| = \|(1 - P_i)T\xi_i\| \leq \|(1 - P_i)(T\xi_i - \xi)\| + \|(1 - P_i)\xi\| \\ &\leq \|T\xi_i - \xi\| + \|(I - P_i)\xi\| \longrightarrow 0; \end{aligned}$$

kontradikcija. Dakle, $\|P_i T - T\| \longrightarrow 0$. Budući da je $\mathbb{F}(\mathcal{H})$ ideal u $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ (Korolar 4.3.4), imamo $P_i T \in \mathbb{F}(\mathcal{H})$ za sve $i \in \mathbb{I}$, odakle slijedi da je T uniformni limes operatora konačnog ranga.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Neka je $(\xi_i)_{i \in \mathbb{I}}$ slabo konvergentna mreža u $\mathrm{Ball}(\mathcal{H})$ s limesom ξ. Prema pretpostavci, za dano $\varepsilon > 0$ postoji $S \in \mathbb{F}(\mathcal{H})$ takav da je $\|T - S\| < \varepsilon/3$. Tada za svako $i \in \mathbb{I}$ imamo

$$\begin{aligned} \|T\xi_i - T\xi\| &\leq \|T\xi_i - S\xi_i\| + \|S\xi_i - S\xi\| + \|S\xi - T\xi\| \\ &\leq \frac{2}{3}\varepsilon + \|S\xi_i - S\xi\|. \end{aligned}$$

Budući da je $S \in \mathbb{F}(\mathcal{H})$, prema Propoziciji 4.3.8 S je (globalno) $w - s$ neprekidan, pa postoji $i_0 \in \mathbb{I}$ takav da je $\|S\xi_i - S\xi\| < \varepsilon/3$ za sve $i \geq i_0$. Dakle, $\|T\xi_i - T\xi\| < \varepsilon$ za sve $i \geq i_0$, odnosno $T\xi_i \xrightarrow{s} T\xi$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv). Budući da je $\mathrm{Ball}(\mathcal{H})$ slabo kompaktna i budući da je restrikcija $T|_{\mathrm{Ball}(\mathcal{H})}$ $w - s$ neprekidna, $T(\mathrm{Ball}(\mathcal{H}))$ je (jako) kompaktan podskup od $\mathcal{H}$.

(iv) $\Longrightarrow$ (i). Ovo je trivijalno. ☐

Korolar 4.4.3. *$\mathbb{K}(\mathcal{H})$ je zatvoren ideal u $\mathbb{B}(\mathcal{H})$. Specijalno, $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ je C^*-podalgebra od $\mathbb{B}(\mathcal{H})$.*

Dokaz. Dovoljno je dokazati da je $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ uniformno zatvoren podskup od $\mathbb{B}(\mathcal{H})$. Naime, odatle i iz Teorema 4.4.2 će onda slijediti da je $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ uniformni zatvarač od $\mathbb{F}(\mathcal{H})$. Budući da je $\mathbb{F}(\mathcal{H})$ (samoadjungirani) ideal u $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ (Propozicija 4.3.4), isti zaključak vrijedi i za $\mathbb{K}(\mathcal{H})$. Dokažimo stoga zatvorenost od $\mathbb{K}(\mathcal{H})$. Neka je $S \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ operator iz uniformnog zatvarača od $\mathbb{K}(\mathcal{H})$. Tada za dano $\varepsilon > 0$ postoji $T \in \mathbb{K}(\mathcal{H})$ takav da je $\|S - T\| < \varepsilon/3$. Budući da je T kompaktan, $T(\mathrm{Ball}(\mathcal{H}))$ je (relativno) kompaktan podskup od $\mathcal{H}$ i neka je $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ neka njegova konačna $\varepsilon/3$-mreža. Tvrdimo da je tada $\{S\xi_1, \ldots, S\xi_n\}$ jedna ε-mreža za $S(\mathrm{Ball}(\mathcal{H}))$. Zaista, za proizvoljno $\xi \in \mathrm{Ball}(\mathcal{H})$ postoji $1 \le i \le n$ takav da je $\|T\xi_i - T\xi\| < \varepsilon/3$. Tada je

$$\begin{aligned}\|S\xi_i - S\xi\| &\le \|S\xi_i - T\xi_i\| + \|T\xi_i - T\xi\| + \|T\xi - S\xi\| < 2\|T - S\| + \varepsilon/3\\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Napomena 4.4.4. Ako je $\mathcal{H}$ separabilan i beskonačnodimenzionalan, tada se može pokazati da je $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ jedinstven pravi zatvoren ideal u $\mathbb{B}(\mathcal{H})$.

Napomena 4.4.5. Kao što smo napomenuli, ako je $\mathcal{H}$ beskonačnodimenzionalan, tada C^*-algebra $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ nije unitalna. Primijetimo da je u tom slučaju mreža projektora $(P_i)_{i\in\mathbb{I}}$ iz Propozicije 4.3.7 aproksimativna jedinica za $\mathbb{K}(\mathcal{H})$. Nadalje, ako je $T \in \mathbb{K}(\mathcal{H})$ tada je $T(\mathrm{Ball}(\mathcal{H}))$ kompaktan, specijalno separabilan podskup od $\mathcal{H}$. Stoga je $\overline{\mathrm{ran}\, T}$ separabilan potprostor od $\mathcal{H}$. Ako je (e_n) neka ortonormirana baza za $\overline{\mathrm{ran}\, T}$, stavimo $P_n := \sum_{i=1}^n e_i \otimes e_i$ (Napomena 4.3.6). Tada isti dokaz kao u implikaciji (i) $\Longrightarrow$ (ii) Teorema 4.4.2 pokazuje da je $\lim_{n\to\infty} \|P_nT - T\| = 0$.

Kompaktni operatori su bitni kako s teorijske strane tako i sa strane primjene. Štoviše, sam začetak teorije kompaktnih operatora došao je iz teorije integralnih jednadžbi. Eksplicitne primjere dobivamo na sljedeći način:

Propozicija 4.4.6. *Neka je (Ω, μ) prostor mjere i neka je $k \in L^2(\Omega \times \Omega, \mu \otimes \mu)$. Tada je s*

$$(Tf)(x) := \int_\Omega k(x,y) f(y)\, d\mu(y) \quad (f \in L^2(\Omega, \mu))$$

definiran kompaktan operator na $L^2(\Omega, \mu)$ i $\|T\| \le \|k\|_{L^2(\Omega\times\Omega,\mu\otimes\mu)}$. Za funkciju k kažemo da je **jezgra** *integralnog operatora T.*

U dokazu ćemo koristiti sljedeću činjenicu koju ostavljamo za domaću zadaću:

Lema 4.4.7. *Neka je $(e_i)_{i\in\mathbb{I}}$ ortonormirana baza za $L^2(\Omega, \mu)$ i definirajmo*

$$\phi_{ij}(x,y) := e_j(x)\overline{e_i(y)}$$

za $i, j \in \mathbb{I}$ i $x, y \in \Omega$. Tada je $\{\phi_{ij} : \ i, j \in \mathbb{I}\}$ ortonormiran skup u $L^2(\Omega \times \Omega, \mu \otimes \mu)$. Nadalje, ako su k i T kao u Propoziciji 4.4.6, tada imamo

$$\langle k, \phi_{ij}\rangle_{L^2(\Omega\times\Omega,\mu\otimes\mu)} = \langle Te_j, e_i\rangle_{L^2(\Omega,\mu)}$$

za sve $i, j \in \mathbb{I}$.

Dokaz Propozicije 4.4.6. Najprije pokažimo da je operator T ograničen. Za $f \in L^2(\Omega, \mu)$ imamo

$$\begin{aligned}\|Tf\|^2_{L^2(\Omega,\mu)} &= \int_\Omega \left| \int_\Omega k(x,y) f(y)\, d\mu(y) \right|^2 d\mu(x)\\ &\le \int_\Omega \left(\int_\Omega |k(x,y)|^2\, d\mu(y) \cdot \int_\Omega |f(y)|^2\, d\mu(y) \right) d\mu(x)\\ &= \|k\|^2_{L^2(\Omega\times\Omega,\mu\otimes\mu)} \|f\|^2_{L^2(O,\mu)}.\end{aligned}$$

Odavde slijedi da je $T \in \mathbb{B}(L^2(\Omega,\mu))$ i $\|T\| \leq \|k\|_{L^2(\Omega\times\Omega,\mu\otimes\mu)}$.

Neka je $(e_i)_{i\in\mathbb{I}}$ ortonormirana baza za $L^2(\Omega,\mu)$ i definirajmo funkcije ϕ_{ij} kao u Lemi 4.4.7. Tada imamo

$$\|k\|^2_{L^2(\Omega\times\Omega,\mu\otimes\mu)} \geq \sum_{i,j\in\mathbb{I}} |\langle k,\phi_{i,j}\rangle^2_{L^2(\Omega\times\Omega,\mu\otimes\mu)}| = \sum_{i,j\in\mathbb{I}} |\langle Te_j,e_i\rangle_{L^2(\Omega,\mu)}|.$$

Kako je $k \in L^2(\Omega\times\Omega,\mu\otimes\mu)$, postoji najviše prebrojivo mnogo indeksa i i j takvih da je $\langle k,\phi_{ij}\rangle_{L^2(\Omega\times\Omega,\mu\otimes\mu)} \neq 0$; označimo ih s $\{\psi_{pq} : \ 1 \leq p,q < \infty\}$. Tada prema Lemi 4.4.7 imamo $\langle Te_j,e_i\rangle_{L^2(\Omega,\mu)} = 0$ ako $\phi_{ij} \notin \{\psi_{pq} : \ 1 \leq p,q < \infty\}$. Neka je $P_n := \sum_{p=1}^n e_p \otimes e_p$ (projektor na potprostor $\mathrm{span}\{e_1,\ldots,e_n\}$) i stavimo $T_n := TP_n + P_nT - P_nTP_n$. Tada je naravno $T_n \in \mathbb{F}(L^2(\Omega,\mu))$. Tvrdimo da je $\lim_{n\to\infty}\|T-T_n\| = 0$, odakle će slijediti da je T kompaktan operator.

Zaista, neka je $f \in \mathrm{Ball}(L^2(\Omega,\mu))$. Tada je $f = \sum_{j\in\mathbb{I}}\langle f,e_j\rangle_{L^2(\Omega,\mu)}e_j$. Sada imamo:

$$\begin{aligned}
\|Tf-T_nf\|^2_{L^2(\Omega,\mu)} &= \sum_{i\in\mathbb{I}} |\langle Tf-T_nf,e_i\rangle|^2_{L^2(\Omega,\mu)} \\
&= \sum_{i\in\mathbb{I}} \left|\sum_{j\in\mathbb{I}}\langle f,e_j\rangle_{L^2(\Omega,\mu)}\cdot\langle (T-T_n)e_j,e_i\rangle_{L^2(\Omega,\mu)}\right|^2 \\
&= \sum_{p=1}^{\infty} \left|\sum_{q=1}^{\infty}\langle f,e_q\rangle_{L^2(\Omega,\mu)}\cdot\langle (T-T_n)e_q,e_p\rangle_{L^2(\Omega,\mu)}\right|^2 \\
&\leq \sum_{p=1}^{\infty}\left[\sum_{q=1}^{\infty}|\langle f,e_q\rangle_{L^2(\Omega,\mu)}|^2\right]\left[\sum_{q=1}^{\infty}|\langle (T-T_n)e_q,e_p\rangle_{L^2(\Omega,\mu)}|^2\right] \\
&\leq \|f\|^2_{L^2(\Omega,\mu)}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}|\langle Te_q,e_p\rangle_{L^2(\Omega,\mu)} - \langle TP_ne_q,P_ne_p\rangle_{L^2(\Omega,\mu)} \\
&\quad -\langle TP_ne_q,P_ne_p\rangle_{L^2(\Omega,\mu)} + \langle TP_ne_q,P_ne_p\rangle_{L^2(\Omega,\mu)}|^2 \\
&= \sum_{p=n+1}^{\infty}\sum_{q=n+1}^{\infty}|\langle Te_q,e_p\rangle_{L^2(\Omega,\mu)}|^2 \\
&= \sum_{p=n+1}^{\infty}\sum_{q=n+1}^{\infty}|\langle k,\psi_{pq}\rangle_{L^2(\Omega\times\Omega,\mu\otimes\mu)}|^2.
\end{aligned}$$

Budući da je $\sum_{p,q=1}^{\infty}|\langle k,\psi_{pq}\rangle_{L^2(\Omega\times\Omega,\mu\otimes\mu)}|^2 < \infty$, za svako $\varepsilon > 0$ možemo naći $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $n \geq n_0$ zadnja gornja suma bude manja od ε. Dakle, $\lim_{n\to\infty}\|T-T_n\| = 0$. □

U daljnjem ćemo se baviti s izučavanjem spektra kompaktnih operatora. Osnovni cilj nam je dokazati spektralni teorem za kompaktan normalni operator (Teorem 4.4.15). Najprije se prisjetimo za operator $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ definiramo sljedeća tri podskupa od $\sigma(A)$:

- **Točkovni spektar** od T:

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \ker(\lambda I - T) \neq \{0\}\}$$

(tj. $\sigma_p(T)$ je skup svih svojstvenih vrijednosti od T). Ako je $\lambda \in \sigma_p(T)$ tada za $\ker(\lambda I - T)$ kažemo da je **svojstveni potprostor** od λ. Također, za svaki vektor $\xi \in \ker(\lambda I - T)$, $\xi \neq 0$ kažemo da je **svojstveni vektor** od λ.

- **Rezidualni spektar** od T:

$$\sigma_r(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \ker(\lambda I - T) = \{0\} \text{ i } \overline{\operatorname{ran}(\lambda I - T)} \neq \mathcal{H}\}.$$

- **Kontinuirani spektar** od T:

$$\sigma_c(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \ker(\lambda I - T) = \{0\}, \ \operatorname{ran}(\lambda I - T) \neq \mathcal{H} \text{ i } \overline{\operatorname{ran}(\lambda I - T)} = \mathcal{H}\}$$

Očito su gornji skupovi međusobno diskjunktni i vrijedi $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T)$. Naravno, neki od tih skupova mogu biti i prazni. Nadalje, primijetimo da kontinuirani spektar od T možemo ekvivalentno zapisati s

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \ker(\lambda I - T) = \{0\}, \ \overline{\operatorname{ran}(\lambda I - T) = \mathcal{H}} \text{ i } \lambda I - T \text{ nije ograničen odozdo}\}.$$

Propozicija 4.4.8. *Neka je $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ normalan operator. Tada vrijedi:*

(i) $\lambda \in \sigma_p(T)$ ako i samo ako je $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$. Pri tome se pripadni svojstveni potprostori podudaraju.

(ii) Svojstveni potprostori koji pripadaju različitim svojstvenim vrijednostima operatora T su međusobno okomiti.

(iii) $\sigma_r(T) = \emptyset$. Specijalno, $\lambda \in \sigma(T)$ ako i samo ako $\lambda I - T$ nije ograničen odozdo.

Dokaz. (i). Tvrdnja slijedi iz činjenice da je za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$ operator $\lambda I - T$ normalan, pa je $\ker(\lambda I - T) = \ker((\lambda I - T)^*) = \ker(\overline{\lambda} I - T^*)$.

(ii). Neka su $\lambda, \mu \in \sigma_p(T)$, $\lambda \neq \mu$ i neka su redom ξ i η pripadni svojstveni vektori za λ i μ. Tada je prema (i):

$$\lambda\langle \xi, \eta\rangle = \langle T\xi, \eta\rangle = \langle \xi, T^*\eta\rangle = \langle \xi, \overline{\mu}\eta\rangle = \mu\langle \xi, \eta\rangle.$$

Kako je $\lambda \neq \mu$, slijedi $\langle \xi, \eta\rangle = 0$.

(iii). Neka je $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da je $\lambda I - T$ injektivan. Budući da je operator $\lambda I - T$ normalan, imamo $\overline{\operatorname{ran}(\lambda I - T)} = \ker(\lambda I - T)^{\perp} = \mathcal{H}$, pa $\lambda \notin \sigma_r(T)$. □

Propozicija 4.4.9. *Neka je $\{e_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ ortonormirana baza separabilnog Hilbertovog prostora $\mathcal{H}$ i neka je (λ_n) ograničen niz kompleksnih brojeva. Stavimo $M := \sup\{|\lambda_n| : \ n \in \mathbb{N}\}$. Tada postoji jedinstven $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ takav da je $Te_n = \lambda_n e_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Operator T je normalan, $\|T\| = M$ te vrijedi*

$$\sigma(T) = \overline{\{\lambda_n : \ n \in \mathbb{N}\}} \qquad \text{i} \qquad \sigma_p(T) = \{\lambda_n : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Nadalje, T je kompaktan ako i samo ako je $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

Dokaz. Neka je $\xi \in \mathcal{H}$. Tada imamo $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \xi, e_n\rangle e_n$ i $\|\xi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \xi, e_n\rangle|^2$. Stavimo

$$T\xi := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \xi, e_n\rangle e_n$$

i primijetimo da je $T\xi$ dobro definiran vektor u $\mathcal{H}$, budući da gornji red konvergira apsolutno, a $\mathcal{H}$ je potpun. Lako se vidi da je operator $T : \xi \mapsto T\xi$ linearan i očito vrijedi $Te_n = \lambda_n e_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Nadalje, za $\xi \in \mathcal{H}$ imamo

$$\|T\xi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\langle \xi, e_n\rangle|^2 \leq M^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \xi, e_n\rangle|^2 = M^2\|\xi\|^2,$$

odakle slijedi da je T ograničen i $\|T\| \geq M$. Štoviše, iz $Te_n = \lambda_n e_n$ slijedi $|\lambda_n| \leq \|T\|$, pa je $\|T\| = M$. Time smo pokazali egzistenciju takvog operatora T. Jedinstvenost od T slijedi iz činjenice da je T neprekidan i da je $\operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ gust podskup od $\mathcal{H}$.

Odredimo T^*. Za $\xi \in \mathcal{H}$ imamo

$$\begin{aligned} T^*\xi &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle T^*\xi, e_n\rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \xi, Te_n\rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \xi, \lambda_n e_n\rangle e_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda_n} \langle \xi, e_n\rangle e_n. \end{aligned}$$

Specijalno $T^*e_n = \overline{\lambda_n} e_n$, pa je $(T^*T - TT^*)e_n = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Dakle, operator T je normalan.

Odredimo $\sigma_p(T)$. Očito je $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \sigma_p(T)$. Pretpostavimo da je ta inkluzija striktna i neka je $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ s pripadnim svojstvenim vektorom ξ. Tada je

$$(\lambda - \lambda_n)\langle \xi, e_n\rangle = \langle \lambda\xi, e_n\rangle - \langle \xi, \overline{\lambda_n} e_n\rangle = \langle T\xi, e_n\rangle - \langle \xi, T^*e_n\rangle = 0,$$

odakle slijedi da je ξ okomit na sve vektore e_n. To je naravno nemoguće jer je $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ortonormirana baza za $\mathcal{H}$. Dakle, $\sigma_p(T) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Dokažimo da je $\sigma(T) = \sigma$, gdje je $\sigma := \overline{\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Budući da je $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} = \sigma_p(T) \subseteq \sigma(T)$ i kako je $\sigma(T)$ zatvoren, imamo $\sigma \subseteq \sigma(T)$. Dokažimo i obratnu inkluziju. Neka je $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma$ i izaberimo $\varepsilon > 0$ takav da je $|\lambda - \lambda_n| > \varepsilon$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da je $\lambda I - T$ ograničen odozdo. Zaista, za $\xi \in \mathcal{H}$ imamo

$$\|(\lambda I - T)\xi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda - \lambda_n|^2 |\langle \xi, e_n\rangle|^2 \geq \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \xi, e_n\rangle|^2 = \varepsilon^2 \|\xi\|^2.$$

Budući da je operator T normalan, iz Propozicije 4.4.8 (iii) slijedi da $\lambda \notin \sigma(T)$.

Ostaje dokazati da je operator T kompaktan ako i samo ako je $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Kako bismo to pokazali, za $n \in \mathbb{N}$ stavimo $P_n := \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e_i$ i $T_n := T - TP_n$. Tada je $T_n e_m = \lambda_m e_m$ za $m > n$ i $T_n e_m = 0$ inače. Odavde slijedi da je $\|T_n\| = \sup\{|\lambda_m| : m > n\}$. Ako je $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, tada je $\lim_{n\to\infty} \|T_n\| = 0$, pa je T kompaktan kao uniformni limes operatora konačnog ranga TP_n. Obratno, ako je T kompaktan, tada iz Napomene 4.4.5 slijedi da je $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lim_{n\to\infty} \|T_n\| = 0$. $\square$

Za operator $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ kažemo da je **dijagonalizabilan** ako postoji ortonormirana baza $(e_i)_{i\in\mathbb{I}}$ za $\mathcal{H}$ koja se sastoji od svojstvenih vektora za T. Ako s λ_i označimo svojstvenu vrijednost pridruženu svojstvenom vektoru e_i, tada je skup $\{\lambda_i : i \in \mathbb{I}\}$ ograničen i vrijedi

$$T\xi = \sum_{i\in\mathbb{I}} \langle \lambda_i \xi, e_i\rangle e_i \qquad (\xi \in \mathcal{H}).$$

Nadalje, imamo

$$T^*\xi = \sum_{i\in\mathbb{I}} \overline{\lambda_i} \langle \xi, e_i\rangle e_i \qquad (\xi \in \mathcal{H}),$$

odakle slijedi da je T normalan.

Lema 4.4.10. *Neka je $T \in \mathbb{K}(\mathcal{H})$. Ako je $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$, tada je λ svojstvena vrijednost za T.*

Dokaz. Pretpostavimo da $\lambda \neq 0$ nije svojstvena vrijednost za T. Pokazat ćemo da je tada operator $\lambda I - T$ invertibilan u $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ odakle će naravno slijediti da $\lambda \notin \sigma(T)$. Dokaz provodimo u koracima:

Najprije pokažimo da je operator $\lambda I - T$ ograničen odozdo. Zaista, u suprotnom bi postojao niz jediničnih vektora (ξ_n) u $\mathcal{H}$ takav da vrijedi

$$\|(\lambda I - T)\xi_n\| \leq \frac{1}{n} \tag{4.6}$$

za sve $n \in \mathbb{N}$. Budući da je T kompaktan, postoji podniz (ξ_{n_k}) od (ξ_n) takav da niz $(T\xi_{n_k})$ jako konvergira u $\mathcal{H}$. Označimo njegov limes s η. Kako je

$$\xi_{n_k} = \frac{1}{\lambda}((\lambda I - T)\xi_{n_k} + T\xi_{n_k}),$$

za sve k, odavde i iz (4.6) slijedi da $\xi_{n_k} \xrightarrow{s} \eta/\lambda$. Budući da je (ξ_{n_k}) niz jedničnih vektora u $\mathcal{H}$, imamo $\eta \neq 0$. Napokon, iz

$$(\lambda I - T)\eta = \lim_{k\to\infty}(\lambda I - T)(\lambda\xi_{n_k}) = \lambda \cdot \lim_{k\to\infty}(\lambda I - T)(\xi_{n_k}) = 0$$

zaključujemo da je $\lambda \in \sigma_p(T)$; kontradikcija.

Tvrdimo da je $\operatorname{ran}(\lambda I - T) = \mathcal{H}$. Kako bismo to pokazali, stavimo $\mathcal{H}_n := \operatorname{ran}((\lambda I - T)^n)$ $(n \in \mathbb{N})$ i $\mathcal{H}_0 := \mathcal{H}$. Budući da je prema prvom dijelu dokaza $\lambda I - T$ ograničen odozdo, $(\mathcal{H}_n)$ je niz zatvorenih potprostora u $\mathcal{H}$. Također imamo

$$(\lambda I - T)\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_{n+1} \qquad i \qquad \mathcal{H}_0 \supseteq \mathcal{H}_1 \supseteq \mathcal{H}_2 \supseteq \mathcal{H}_3 \supseteq \cdots.$$

Nadalje, ako je $\eta \in \mathcal{H}_n$ tada je $T\eta = ((T - \lambda I)\eta + \lambda\eta) \in \mathcal{H}_n$, odakle slijedi $T(\mathcal{H}_n) \subseteq \mathcal{H}_n$. Tvrdimo da se niz $(\mathcal{H}_n)$ stabilizira počevši od nekog $n \in \mathbb{N}$, tj. da vrijedi $\mathcal{H}_m = \mathcal{H}_n$ za sve $m \geq n$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je

$$\mathcal{H}_0 \supsetneqq \mathcal{H}_1 \supsetneqq \mathcal{H}_2 \supsetneqq \mathcal{H}_3 \supsetneqq \cdots.$$

Za svako $n \in \mathbb{N}$ izaberimo jedinični vektor $\xi_n \in \mathcal{H}_n$ takav da je $\xi_n \perp \mathcal{H}_{n+1}$. Tada za sve $m > n$ imamo

$$\begin{aligned} T\xi_n - T\xi_m &= (T - \lambda I)\xi_n + \lambda\xi_n - T\xi_m = \lambda\xi_n + [(T - \lambda I)\xi_n - T\xi_m] \\ &= \lambda\xi_n + \zeta, \end{aligned}$$

gdje je $\zeta := [(T - \lambda I)\xi_n - T\xi_m]$. Kako je $T\xi_m \in \mathcal{H}_m \subseteq \mathcal{H}_{n+1}$ (jer je $m > n$), slijedi $\zeta \in \mathcal{H}_{n+1}$. Stoga je

$$\|T\xi_n - T\xi_m\|^2 = |\lambda|^2 + \|\zeta\|^2 \geq |\lambda|^2 > 0.$$

Odavde slijedi da niz $(T\xi_n)$ ne dozvoljava Cauchyjev podniz, što je nemoguće jer je niz (ξ_n) ograničen, a operator T kompaktan. Ova kontradikcija pokazuje da se $(\mathcal{H}_n)$ eventualno stabilizira i neka je $k \in \mathbb{N}$ najmanji takav da je $\mathcal{H}_k = \mathcal{H}_{k+1}$. Pretpostavimo da je $k \neq 0$ i izaberimo vektor $\xi \in \mathcal{H}_{k-1} \setminus \mathcal{H}_k$. Tada je $(\lambda I - T)\xi \in \mathcal{H}_k = \mathcal{H}_{k+1}$, pa postoji vektor $\eta \in \mathcal{H}$ takav da je

$$(\lambda I - T)\xi = (\lambda I - T)^{k+1}\eta = (\lambda I - T)\zeta,$$

gdje je $\zeta := (\lambda I - T)^k\eta \in \mathcal{H}_k$. Budući da $\xi \notin \mathcal{H}_k$, imamo $\xi - \zeta \neq 0$, pa iz

$$(\lambda I - T)(\xi - \zeta) = 0$$

zaključujemo da je $\lambda \in \sigma_p(T)$. Ova kontradikcija pokazuje da je $k = 0$, odnosno $\operatorname{ran}(\lambda I - T) = \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$.

Sve zajedno, $\lambda I - T$ je surjektivan operator koji je ograničen odozdo. Prema Propoziciju 4.1.8, $\lambda I - T$ je invertibilan u $\mathbb{B}(\mathcal{H})$. $\square$

Teorem 4.4.11. *Neka je $\mathcal{H}$ beskonačnodimenzionalan Hilbertov prostor i neka je $T \in \mathbb{K}(\mathcal{H})$. Tada vrijedi:*

(i) $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$.

(ii) Za svako $\lambda \in \sigma_p(T) \backslash \{0\}$ je pripadni svojstveni potprostor $\ker(\lambda I - T)$ *konačnodimenzionalan.*

(iii) $\sigma_p(T)$ (pa onda i $\sigma(T)$) je konačan ili prebrojiv skup, a 0 mu je jedino moguće gomilište.

Dokaz. (i). Budući da je $\mathcal{H}$ beskonačnodimenzionalan, imamo $0 \in \sigma(T)$, pa tvrdnja slijedi direktno iz Leme 4.4.10.

(ii). Neka je $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$. Ako bi $\ker(\lambda I - T)$ bio beskonačnodimenzionalan, tada bismo mogli naći (beskonačan) ortonormiran niz (ξ_n) u $\ker(\lambda I - T)$. Tada za sve $m, n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\|T\xi_n - T\xi_m\|^2 = \|\lambda\xi_n - \lambda\xi_m\|^2 = 2|\lambda^2|,$$

što je kontradikcija, jer je T kompaktan.

(iii). Tvrdimo da je skup $\{\lambda \in \sigma_p(T) : \ |\lambda| \geq \varepsilon\}$ konačan za svako $\varepsilon > 0$. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji niz međusobno različitih svojstvenih vrijednosti (λ_n) od T takav da je $|\lambda_n| \geq \varepsilon$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Neka ξ_n pripadni svojstveni vektor od λ_n i stavimo $\mathcal{H}_n := \operatorname{span}\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$. Tada je očito $\dim \mathcal{H}_n = n$, pa je

$$\mathcal{H}_1 \subsetneqq \mathcal{H}_2 \subsetneqq \mathcal{H}_3 \subsetneqq \mathcal{H}_4 \subsetneqq \cdots .$$

Nadalje, imamo $T(\mathcal{H}_n) \subseteq \mathcal{H}_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i $(\lambda_n I - T)(\mathcal{H}_n) \subseteq \mathcal{H}_{n-1}$ za sve $n \geq 2$. Naime, za $\xi \in \mathcal{H}_n$ i $n \geq 2$ imamo $\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i$ (za neke $\alpha_i \in \mathbb{C}$), odakle slijedi da je

$$(\lambda_n I - T)\xi = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_n)\xi_n \in \mathcal{H}_{n-1}.$$

Neka je (η_n) niz jediničnih vektora u $\mathcal{H}$ takav da je $\eta_n \in \mathcal{H}_n$ i $\eta_n \perp \mathcal{H}_{n-1}$. Tada za sve $n > m$ imamo

$$T\eta_n - T\eta_m = \lambda_n\eta_n - [(\lambda_n I - T)\eta_n + T\eta_m].$$

Kako je $(\lambda_n I - T)\eta_n \in \mathcal{H}_{n-1}$ i $T\eta_m \in \mathcal{H}_m \subseteq \mathcal{H}_{n-1}$, slijedi $(\lambda_n I - T)\eta_n + T\eta_m \in \mathcal{H}_{n-1}$. Napokon, budući da je $\eta_n \perp \mathcal{H}_{n-1}$, slijedi

$$\|T\eta_n - T\eta_m\| \geq |\lambda_n| > \varepsilon,$$

što je naravno kontradikcija, jer je T kompaktan. □

U literaturi se često susreće sljedeća varijanta tvrdnji (i) i (ii) Teorema 4.4.11:

Korolar 4.4.12 (Fredholmova alternativa). *Neka je $T \in \mathbb{K}(\mathcal{H})$. Tada za svaki skalar $\mu \in \mathbb{C}$ ili jednadžba $(I - \mu T)\xi = \eta$ ima jedinstveno rješenje za svaki $\eta \in \mathcal{H}$ ili pripadna homogena jednadžba $(I - \mu T)\xi = 0$ ima konačno mnogo linearno nezavisnih rješenja.*

Napomena 4.4.13. E. I. Fredholm je formulirao prethodni rezultat za specifičan integralni operator

$$(Tf)(x) := \int_a^b k(x, y) f(y)\, dy$$

na $L^2([a, b])$ (vidjeti Propoziciju 4.4.6). Štoviše, rekao je: "Ili integralna jednadžba

$$f(x) - \mu \int_a^b k(x, y) f(y)\, dy = g(x)$$

ima jedinstveno rješenje ili pripadna homogena jednadžba

$$f(x) - \mu \int_a^b k(x, y) f(y)\, dy = 0$$

ima konačno mnogo linearno nezavisnih rješenja".

U nastavku ćemo opisati normalne kompaktne operatore. Prisjetimo se da smo u Propoziciji 4.4.9 već opisali kompaktne dijagonalne operatore. Pokazat ćemo da je takav oblik zapravo tipičan, tj. da se svaki normalan kompaktan operator može dijagonalizirati u nekoj ortonormiranoj bazi. Ako je bazni prostor $\mathcal{H}$ konačnodimenzinalan, tada nam je taj rezulrat poznat iz elementarne linearne algebre (dijagonalizacija normalnog operatora/normalne matrice).

Propozicija 4.4.14. *Ako je $T \in \mathbb{K}(\mathcal{H})$ normalan i injektivan, tada je $\mathcal{H} = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T)} \ker(\lambda I - T)$. Posebno, prostor $\mathcal{H}$ je separabilan.*

Dokaz. Iz Propozicije 4.4.8 (ii) znamo da su svojstveni potprostori koji pripadaju različitim svojstvenim vrijednostima normalnog operatora operatora T medusobno okomiti. Stavimo $\mathcal{K} := \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T)} \ker(\lambda I - T)$. Tvrdimo da je $\mathcal{K} = \mathcal{H}$. Pretpostavimo suprotno. Tada je $\mathcal{K}^\perp \neq \{0\}$. Budući da je svaki od potprostora $\ker(\lambda I - T)$ svojstven i za T i za T^* (Propozicija refosnop (i)), potprostor $\mathcal{K}$ je reducira T i T^*, pa i $\mathcal{K}^\perp$ reducira T i T^*. Osim toga, operator $T|_{\mathcal{K}^\perp}$ je također normalan i kompaktan, kao operator na prostoru $\mathcal{K}^\perp$, i vrijedi $(T|_{\mathcal{K}^\perp})^* = T^*|_{\mathcal{K}^\perp}$. Nadalje, $T|_{\mathcal{K}^\perp}$ je također injektivan, a budući da je $\mathcal{K}^\perp \neq \{0\}$, imamo $T|_{\mathcal{K}^\perp}$. Posebno $r(T|_{\mathcal{K}^\perp}) = \|T|_{\mathcal{K}^\perp}\| \neq 0$, pa u spektru od $T|_{\mathcal{K}^\perp}$ postoji barem jedan skalar λ_0 različit od 0. Budući da je $T|_{\mathcal{K}^\perp}$ kompaktan operator, iz Leme 4.4.10 zaključujemo da je $\lambda_0 \in \sigma_p(T|_{\mathcal{K}^\perp})$, pa onda i $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$. No to je nemoguće, jer bi to značilo da je pripadni svojstveni potprostor sadržan u $\mathcal{K}^\perp$; dakle okomit na $\mathcal{K}$.

Prema Teoremu 4.4.11 (iii) (točkovni) spektar kompaktnog operatora je najviše prebrojiv, a prema (ii) dijelu istog teorema svaki svojstveni potprostor (osim eventualno jezgre) kompaktnog operatora je konačne dimenzije. To dokazuje posljednju tvrdnju teorema.

□

Teorem 4.4.15. *Neka je T normalan kompaktan injektivan operator na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ i neka je $\sigma_p(T) = \{\lambda_n \;:\; n \in \mathbb{N}\}$. Označimo s $\mathcal{K}_n$ pripadne osvojstvene potprostore i s P_n ortogonalne projektore na $\mathcal{K}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $I = (s) - \sum_{n=1}^{\infty} P_n$ i vrijedi*

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n.$$

Dokaz. Možemo pretpostaviti da je $|\lambda_n| \leq |\lambda_{n+1}|$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Iz Propozicije 4.4.14 znamo da postoji ortonormirana baza (e_n) za $\mathcal{H}$ takva da je $\{e_{m_{n-1}+1}, \ldots, e_m\}$ baza za $\mathcal{K}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Pritom je $m_0 = 0$, a m_n su prirodni brojevi indukivno definirani s $m_n - m_{n-1} = \dim \mathcal{K}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Za svako $\xi \in \mathcal{H}$ imamo $\xi = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \xi, e_i \rangle e_i$ i $P_j \xi = \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m} \langle \xi, e_i \rangle e_i$. Zato je

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \xi - \sum_{i=1}^{n} P_j \xi \right\|^2 = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=m_n+1}^{\infty} |\langle \xi, e_i \rangle|^2 = 0.$$

Time je pokazano da je $I = (s) - \sum_{n=1}^{\infty} P_n$. Odavde je zbog neprekidnosti operatora T najprije $T\xi = \sum_{j=1}^{\infty} T P_j \xi = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P_j \xi$, a onda i

$$\begin{aligned} \left\| \left(T - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j \right) \xi \right\|^2 &= \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j P_j \xi \right\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} |\lambda_j|^2 \|P_j\| \|P_j \xi\|^2 \leq |\lambda_{n+1}|^2 \sum_{j=n+1}^{\infty} \|P_j \xi\|^2 \\ &\leq |\lambda_{n+1}|^2 \|\xi\|^2. \end{aligned}$$

Dakle, $\|T - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j\| \leq |\lambda_{n+1}|$, a znamo da niz (λ_m) konvergira u 0, jer je $e_m \xrightarrow{w} 0$, pa $|\lambda_m| = \|Te_m\| \longrightarrow 0$. $\square$

4.5 Fredholmovi operatori

U cijeloj ovoj točki $\mathcal{H}$ će biti beskonačnodimenzionalan separabilan Hilbertov prostor. Kao što smo vidjeli, tada je $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ jedini pravi zatvoren ideal u $\mathbb{B}(\mathcal{H})$, pa je stoga kvocijent $\mathbb{B}(\mathcal{H})/\mathbb{K}(\mathcal{H})$ prosta C^*-algebra uz kvocijentnu normu (Korolar 3.4.5). Ta se kvocijentna algebra zove **Calkinova algebra** i označava s $\mathbf{C}(\mathcal{H})$. Ako su $S, T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ takvi da je $S - T \in \mathbb{K}(\mathcal{H})$, tada kažemo da je operator S **kompaktna perturbacija** operatora T (kao i obratno). To znači da S i T imaju jednake slike u Calkinovoj algebri. Takva "lokalna" perturbacija javlja se često u primjenama i svojstva koja su invarijantna na kompaktne perturbacije su vrlo cijenjena. Jedno od takvih svojstava je indeks o kojemu će biti riječ u ovoj točki.

Propozicija 4.5.1. *Za operator $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ su sljedeća svojstva međusobno ekvivalentna:*

(i) T ima zatvorenu sliku.

(ii) Postoji operator $S \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ takav da su ST i TS projektori redom na $(\ker T)^\perp$ i $\operatorname{ran} T$.

(iii) Postoji operator $S \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ takav da je $TST = T$.

Dokaz. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Pretpostavimo da je $\operatorname{ran} T$ zatvorena. Tada restrikcija $T|_{(\ker T)^\perp}$ definira bijektivni ograničen operator s $(\ker T)^\perp$ na $\operatorname{ran} T$, pa je prema Teoremu o otvorenom preslikavanju njegov inverz S_0 ograničen. Proširimo S_0 do operatora S na čitav $\mathcal{H}$ tako da stavimo $S|_{(\operatorname{ran} T)^\perp} := 0$. Tada je $S \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$, ST je projektor na $(\ker T)^\perp$ i TS je projektor na $\operatorname{ran} T$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Ovo je trivijalno, jer ako je $S \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ operator takav da je TS projektor na $\operatorname{ran} T$, tada je $TST = T$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Neka je $S \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ takav da je $TST = T$. Stavimo $Q := TS$. Tada je $Q^2 = TSTS = TS = Q$. Dakle, Q je idempotent u $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ i očito je $\operatorname{ran} Q = \operatorname{ran}(TS) \subseteq \operatorname{ran} T$. Dokažimo i obratnu inkluziju. Neka je $\eta \in \operatorname{ran} T$ i izaberimo vektor $\xi \in \mathcal{H}$ takav da je $\eta = T\xi$. Tada je $\eta = T\xi = TST\xi = QT\xi \in \operatorname{ran} Q$. Dakle, $\operatorname{ran} Q = \operatorname{ran} T$, a kako je $\operatorname{ran} Q = \ker(I - Q)$, slika od Q (pa onda i od T) je zatvorena. $\square$

Napomena 4.5.2. Za element x prestena $\mathcal{R}$ kažemo da je **von Neumann regularan** ako postoji element $y \in \mathcal{R}$ takav da vrijedi $x = xyx$. U tom slučaju za y kažemo da je **pseudoinverz** od x. Element y općenito nije jedinstveno određen s x. Ako je svaki element $x \in \mathcal{R}$ von Neumann regularan, tada kažemo da je $\mathcal{R}$ von Neumann regularan prsten. U slučaju $\mathcal{R} = \mathbb{B}(\mathcal{H})$, Propozicija 4.5.1 kaže da je operator $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ von Neumann regularan ako i samo ako T ima zatvorenu sliku. Posebno $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ je von Neumann regularan ako i samo ako je $\dim \mathcal{H} < \infty$.

Teorem 4.5.3 (Atkinsonov teorem). *Za operator $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ su sljedeći uvjeti međusobno ekvivalentni:*

(i) Postoji $S \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ takav da su oba operatora $I - ST$ i $I - TS$ konačnog ranga.

(ii) Postoji $S \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ takav da su oba operatora $I - ST$ i $I - TS$ kompaktna.

(iii) Slika od T (po kvocijentnom preslikavanju) je invertibilan element u Calkinovoj algebri.

(iv) Slika od T je zatvorena i oba potprostora $\ker T$ i $\ker T^*$ su konačnodimenzionalna.

Dokaz. Implikacija (i) $\Longrightarrow$ (ii) kao i ekvivalencija (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) je očita.

(ii) $\Longrightarrow$ (iv) Pretpostavimo da je $\ker T$ beskonačnodimenzionalna i neka je (ξ_n) ortonormiran niz u $\ker T$. Tada za $K := ST - I \in \mathbb{K}(\mathcal{H})$ imamo $K\xi_n = -\xi_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Budući da $\xi_n \xrightarrow{w} 0$ (Parsevalova jednakost), iz Teorema 4.4.2 (iii) slijedi $1 = \|-\xi_n\| = \|K\xi_n\| \longrightarrow 0$, što je kontradikcija. Dakle, $\dim\ker T < \infty$. Također, iz $TS - I \in \mathbb{K}(\mathcal{H})$ dobivamo i $S^*T^* - I \in \mathbb{K}(\mathcal{H})$, pa isti dokaz pokazuje da je i $\dim\ker T^* < \infty$.

Ostaje dokazati da je slika od T zatvorena. Neka je $K = ST - I$ kao prije, i izaberimo $F \in \mathbb{F}(\mathcal{H})$ takav da je $\|K - F\| < 1/2$ (Teorem 4.4.2 (ii)). Tada za svaki vektor $\xi \in \ker F$ imamo

$$\begin{aligned}\|S\|\|T\xi\| &\geq \|ST\xi\| = \|(I+K)\xi\| \geq \|\xi\| - \|K\xi\| \\ &\geq \frac{1}{2}\|\xi\|.\end{aligned}$$

Dakle, restrikcija $T|_{\ker F}$ je ograničena odozdo, pa je njena slika $\mathcal{H}_1 := T(\ker F)$ zatvorena. S druge strane, prostor

$$\mathcal{K}_2 := T((\ker F)^\perp) = T(\operatorname{ran} F^*)$$

je konačnodimenzionalan. Neka je $P \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ projektor na potprostor $\mathcal{H}_1^\perp$. Tada je naravno $P(\mathcal{H}_2)$ konačnodimenzionalan (specijalno zatvoren) potprostor od $\mathcal{H}$, pa je i

$$\operatorname{ran} T = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 = P^{-1}P(\mathcal{H}_2)$$

zatvoren potprostor od $\mathcal{H}$.

(iv) $\Longrightarrow$ (i). Budući da je $\operatorname{ran} T$ zatvorena, prema Propoziciji 4.5.1 postoji operator $S \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ takav da su ST i TS projektori redom na $(\ker T)^\perp$ i $\operatorname{ran} T$. Tada su naravno $I - ST$ i $I - TS$ redom projektori na $\ker T$ i $\ker T^*$. Oba ta potprostora su konačnodimenzionalna prema pretpostavci, pa imamo $I - ST, I - TS \in \mathbb{F}(\mathcal{H})$. □

Za operator $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ koji zadovoljava uvjete Atkinsonovog teorema kažemo da je **Fredholmov**. Skup svih Fredholmovih operatora na $\mathcal{H}$ označavamo s $\mathbf{F}(\mathcal{H})$. Za svaki $T \in \mathbf{F}(\mathcal{H})$ definiramo **indeks** od T s

$$\operatorname{index} T := \dim\ker T - \dim\ker T^*.$$

Napomena 4.5.4. Neka je $T \in \mathbf{F}(\mathcal{H})$ i izaberimo operator $S \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ takav da su ST i TS projektori redom na $(\ker T)^\perp$ i $\operatorname{ran} T$. Stavimo $P := I - ST$ i $Q := I - TS$. Tada su P i Q projektori redom na $\ker T$ i $(\operatorname{ran} T)^\perp = \ker T^*$, pa je

$$\operatorname{index} T = \mathrm{r}(P) - \mathrm{r}(Q). \tag{4.7}$$

Primijetimo da iz uvjeta (iii) Atkinsonovog teorema slijedi da je skup $\mathbf{F}(\mathcal{H})$ stabilan s obzirom na operaciju množenja operatora. Posebno, za svaki operator $T \in \mathbf{F}(\mathcal{H})$ i invertibilan operator $R \in \mathbb{B}(\mathcal{H})^\times$ imamo $RT, TR \in \mathbf{F}(\mathcal{H})$. U tom slučaju je

$$\operatorname{index}(RT) = \operatorname{index}(TR) = \operatorname{index}(T)$$

jer je T bijekcija. Također je jasno da je $\mathbf{F}(\mathcal{H})$ samoadjungiran podskup od $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ te da je

$$\operatorname{index} T^* = -\operatorname{index} T \qquad (T \in \mathbf{F}(\mathcal{H})).$$

Za svako $n \in \mathbb{Z}$ definiramo

$$\mathbf{F}_n(\mathcal{H}) := \{T \in \mathbf{F}(\mathcal{H}) : \ \operatorname{index} T = n\}.$$

Sljedeći primjer pokazuje da je svaki od tih skupva neprazan:

Primjer 4.5.5. Neka je $S \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ unilateralni šift (s obzirom na neku ortonormiranu bazu), tada je $S \in \mathbf{F}(\mathcal{H})$. Nadalje, za sve $n \in \mathbb{Z}_+$ imamo $\ker S^n = \{0\}$ i $\dim \ker(S^*)^n = n$. Dakle, $\operatorname{index} S^n = -n$ i $\operatorname{index}(S^*)^n = n$.

Lema 4.5.6. *Ako je $F \in \mathbb{F}(\mathcal{H})$, tada je $I + F \in \mathbf{F}_0(\mathcal{H})$.*

Dokaz. Očito je $T := I + F \in \mathbf{F}(\mathcal{H})$. Neka je S pseudoinverz od T kao u Napomeni 4.5.4 i neka su $P = I - ST$, $Q = I - TS$ pripadni projektori konačnog ranga. Tada je $P - Q = ST - TS = FS - SF$. Označimo s R projektor na konačnodimenzionalni potprostor $\mathcal{K} := \operatorname{ran} P + \operatorname{ran} Q + \operatorname{ran} F + \operatorname{ran} F^*$. Tada je R jedinica za operatore P, Q i F, pa i operator $S_1 := RSR$ zadovoljava

$$P - Q = FS_1 - S_1 F.$$

Primijetimo da je to zapravo jednakost operatora u $\mathbb{B}(\mathcal{K})$. Ako je tr trag na $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ (koji postoji jer je $\dim \mathcal{K} < \infty$), tada imamo

$$\mathrm{r}(P) - \mathrm{r}(Q) = \operatorname{tr}(P - Q) = \operatorname{tr}(FS_2 - S_1 F) = 0.$$

Iz 4.7 zaključujemo da je $\operatorname{index} T = 0$, odnosno $T \in \mathbf{F}_0(\mathcal{H})$. □

Propozicija 4.5.7. *Za svaki $T \in \mathbf{F}_0(\mathcal{H})$ postoji parcijalna izometrija $V \in \mathbb{F}(\mathcal{H})$ takva da je operator $T + V$ invertibilan. Nadalje, ako je $K \in \mathbb{K}(\mathcal{H})$, tada je $T + K \in \mathbf{F}_0(\mathcal{H})$.*

Dokaz. Kako je $\operatorname{index} T = 0 \iff \dim \ker T = \dim \ker T^*$, možemo naći parcijalnu izometriju $V \in \mathbb{F}(\mathcal{H})$ s inicijalnim prostorom $\ker T$ i finalnim prostorom $\ker T^*$. Primijetimo da je operator $T + V$ injektivan. Zaista, ako je $\xi \in \ker(T + V)$, tada je

$$T\xi = -V\xi \in \operatorname{ran} T \cap \ker T^* = \{0\}.$$

Dakle, $T\xi = 0$, pa je $\xi \in \ker T \cap \ker V = \ker T \cap (\ker T)^\perp = \{0\}$, odnosno $\xi = 0$. Nadalje, iz

$$\begin{aligned} \operatorname{ran}(T + V) &= (T + V)(\mathcal{H}) = (T + V)((\ker T)^\perp \oplus \ker T) = \operatorname{ran} T \oplus \ker T^* \\ &= \mathcal{H}, \end{aligned}$$

zaključujemo da je $T + V$ surjekcija. Prema Teoremu o otvorenom preslikavanju, operator $T + V$ je invertibilan u $\mathbb{B}(\mathcal{H})$.

Neka je sada $K \in \mathbb{K}(\mathcal{H})$ i izaberimo operator $F \in \mathbb{F}(\mathcal{H})$ takav da je $\|K - F\| < \|(T + V)^{-1}\|^{-1}$ (Teorem 4.4.2). Stavimo

$$S := T + V + K - F = (T + V)(I + (T + V)^{-1}(K - F)).$$

Budući da je $\|(T + V)^{-1}(K - F)\| < 1$, operator $I + (T + V)^{-1}(K - F)$ je invertibilan u $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ (Propozicija 2.2.1). Tada je i operator S invertibilan u $\mathbb{B}(\mathcal{H})$, pa imamo

$$\begin{aligned} \operatorname{index}(T + K) &= \operatorname{index}(S + F - V) = \operatorname{index}(S(I + S^{-1}(F - V))) \\ &= \operatorname{index}(I + S^{-1}(F - V)) = 0, \end{aligned}$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz Leme 4.5.6, jer je $S^{-1}(F - V) \in \mathbb{F}(\mathcal{H})$. □

Korolar 4.5.8. *Fredholmov operator $T \in \mathbf{F}(\mathcal{H})$ je indeksa 0 ako i samo ako je T kompaktna perturbacija invertibilnog operatora.*

Teorem 4.5.9. *Za svaki Fredholmov operator $T \in \mathbf{F}(\mathcal{H})$ i za svaki kompaktan operator $K \in \mathbb{K}(\mathcal{H})$ imamo*
$$\operatorname{index}(T+K) = \operatorname{index} T.$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $n := \operatorname{index} T > 0$. Naime, slučaj kada je $n = 0$ je riješen u Propoziciji 4.5.7, dok slučaj kada je $n < 0$ možemo izvesti iz pozitivnog slučaja promatrajući operator T^*.

Neka je ℓ^2 Hilbertov prostor kvadratno sumabilnih nizova kompleksnih brojeva. Ako je $S \in \mathbf{F}(\ell^2)$ neki Fredholmov operator, tada je $T \oplus S \in \mathbf{F}(\mathcal{H} \oplus \ell^2)$ (gdje je $\mathcal{H} \oplus \ell^2$ direktna suma Hilbertovih prostora, a $T \oplus S$ direktna suma operatora) i vrijedi

$$\operatorname{index}(T \oplus S) = \operatorname{index} T + \operatorname{index} S, \tag{4.8}$$

gdje su indeksi računati redom u $\mathbb{B}(\mathbb{H} \oplus \ell^2)$, $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ i $\mathbb{B}(\ell^2)$. Uzmimo da je S unilateralni šift. Tada iz Primjera 4.5.5 i jednakosti (4.8) zaključujemo $T \oplus S^n \in \mathbf{F}_0(\mathcal{H} \oplus \ell^2)$, pa je prema Propoziciji 4.5.7
$$(T+K) \oplus S^n = T \oplus S^n + A \oplus 0 \in \mathbf{F}_0(\mathcal{H} \oplus \ell^2).$$
Dakle, $T + K \in \mathbf{F}_n(\mathcal{H})$, kao što je i trebalo pokazati. □

Teorem 4.5.10. *Svaka Fredholmova klasa $\mathbf{F}_n(\mathcal{H})$ $(n \in \mathbb{Z})$ je otvorena u operatorskoj topologiji na $\mathbb{B}(\mathcal{H})$. Posebno, preslikavanje* index : $\mathbf{F}(\mathcal{H}) \to \mathbb{Z}$ *je neprekidno. Nadalje, vrijedi*

$$\operatorname{index}(T_1 T_2) = \operatorname{index} T_1 + \operatorname{index} T_2 \tag{4.9}$$

za sve $T_1, T_2 \in \mathbf{F}(\mathcal{H})$.

Dokaz. Najprije dokažimo da je klasa $\mathbf{F}_0(\mathcal{H})$ otvorena u $\mathbb{B}(\mathcal{H})$. Pretpostavimo stoga da je $T \in \mathbf{F}_0(\mathcal{H})$ i prepostavimo da je (T_n) niz u $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ koji konvergira prema T. Prema Propoziciji 4.5.7 postoji parcijalna izometrija $V \in \mathbb{F}(\mathcal{H})$ takva da je operator $T+V$ invertibilan u $\mathbb{B}(\mathcal{H})$. Specijalno, oba operatora $T + V$ i $(T + V)^*$ su ograničena odozodo s nekom pozitivnom konstantom ε. Tada su i operatori $T_n + V$ i $(T_n + V)^*$ ograničeni odozdo za dovoljno velike n, pa iz Korolara 4.1.9 zaključujemo da su oni nužno invertibilni. Dakle,

$$\operatorname{index} T_n = \operatorname{index}(T_n + V) = 0,$$

za sve $n \geq n_0$. Time smo pokazali otvorenost skupa $\mathbf{F}_0(\mathcal{H})$.

Pretpostavimo sada da je $n > 0$ i neka je $T \in \mathbf{F}_n(\mathcal{H})$. Tada je prema dokazu Teorema 4.5.9 $T \oplus S^n \in F_0(\mathcal{H} \oplus \ell^2)$, gdje je S unilateralni šift na ℓ^2. Iz prvog dijela dokaza znamo da postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $W \in \mathbf{F}_0(\mathcal{H} \oplus \ell^2)$, čim je $W \in \mathbb{B}(\mathcal{H} \oplus \ell^2)$ takav da je $\|T \oplus S^n - W\| < \varepsilon$. Posebno, ako je $R \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ takav da je $\|T - R\| < \varepsilon$, tada je i $\|T \oplus S^n - R \oplus S^n\| < \varepsilon$, pa zaključujemo da je $R \oplus S^n \in \mathbf{F}_0(\mathcal{H} \oplus \ell^2)$. Odavde naravno slijedi da je $R \in \mathbf{F}_n(\mathcal{H})$. Time je dokazana i otvorenost klase $\mathbf{F}_n(\mathcal{H})$ za pozitivne n. Negativni slučaj dobivamo iz pozitivnog primjenom involucije koja je izometrija s $\mathbf{F}_{-n}(\mathcal{H})$ na $\mathbf{F}_n(\mathcal{H})$.

Ostalo nam je dokazati jednakost (4.9). Neka su $T_1 \in \mathbf{F}_n(\mathcal{H})$ i $T_2 \in \mathbf{F}_m(\mathcal{H})$. Uzmimo najprije da je $m = 0$. Tada prema Propoziciji 4.5.7 postoji parcijalna izometrija $V \in \mathbb{F}(\mathcal{H})$ takva da je operator $T_2 + V$ invertibilan u $\mathbb{B}(\mathcal{H})$. Budući da je $T_1 V \in \mathbb{F}(\mathcal{H})$, prema Teoremu 4.5.9 imamo

$$\begin{aligned} \operatorname{index} T_1 &= \operatorname{index}(T_1(T_2 + V)) = \operatorname{index}(T_1 T_2 + T_1 V) \\ &= \operatorname{index}(T_1 T_2). \end{aligned}$$

Sada pretpostavimo da je $m > 0$. Tada je $T_2 \oplus S^m \in \mathbf{F}_0(\mathcal{H} \oplus \ell^2)$ (gdje je S unilateralni šift na ℓ^2, kao i prije), pa prema prijašnjem rezultatu imamo

$$\begin{aligned} n &= \operatorname{index}((T_1 \oplus I_{\ell^2})(T_2 \oplus S^m)) = \operatorname{index}(T_1T_2 \oplus S^m) = \operatorname{index}(T_1T_2) + \operatorname{index}(S^m) \\ &= \operatorname{index}(T_1T_2) - m. \end{aligned}$$

Dakle $\operatorname{index}(T_1T_2) = n + m = \operatorname{index}(T_1) + \operatorname{index}(T_2)$, kada je $m > 0$. Negativni slučaj dobivamo analogno, posmatrajući operator $T_2 \oplus (S^*)^m$. □

Korolar 4.5.11. *Ako je T Fredholmov operator na $\mathcal{H}$, tada je i svaki pseudoinverz S od T Fredholmov operator te vrijedi*

$$\operatorname{index} S = -\operatorname{index} T.$$

Dokaz. Neka je $q : \mathbb{B}(\mathcal{H}) \to \mathbf{C}(\mathcal{H})$ kvocijentno preslikavanje. Iz $TST = T$ slijedi $q(T)q(S)q(T) = q(T)$. Kako je element $q(T)$ ivertibilan u $\mathbf{C}(\mathcal{H})$ (Teorem 4.5.3), slijedi $q(T)q(S) = q(S)q(T) = 1$. Dakle, $q(S)$ je također invertibilan u $\mathbf{C}(\mathcal{H})$, pa je $S \in \mathbf{F}(\mathcal{H})$. Nadalje, iz jednakosti $TST = T$ i formule (4.9) dobivamo

$$\operatorname{index}(T) = \operatorname{index}(TST) = \operatorname{index}(T) + \operatorname{index}(S) + \operatorname{index}(T),$$

odakle slijedi da je $\operatorname{index}(S) = -\operatorname{index}(T)$. □

Na kraju ove točke istaknimo i još jedno topološko svojstvo Fredholmovih klasa $\mathbf{F}_n(\mathcal{H})$. Najprije se prisjetimo par pojmova iz topologije.

Neka je Ω topološki prostor.

- Za dvije točke $x, y \in \Omega$ kažemo da su **homotopne u** Ω (oznaka $x \overset{h}{\sim} y$) ako postoji put u Ω od x do y (tj. postoji neprekidna funkcija $f : [0, 1] \to X$ takva da je $f(0) = x$ i $f(1) = y$. Relacija $\overset{h}{\sim}$ je očigledno relacija ekvivalencija na Ω.
- Za prostor Ω kažemo da je **putevima povezan** ako su svake dvije točke iz Ω homotopne u Ω.
- Za potprostor Ω_0 od Ω kažemo da je **deformacioni retrakt** od Ω ako postoji neprekidno preslikavanje $F : \Omega \to \Omega_0$ takvo da je $x \overset{h}{\sim} F(x)$ u Ω za sve $x \in \Omega$ i $F(x) = x$ za sve $x \in \Omega_0$.
- Za prostor Ω kažemo da je **kontraktibilan** ako postoji jednočlan podskup od Ω koji je deformacioni retrakt od Ω.

Pretpostavimo da je sada A unitalna C^*-algebra i neka su redom $A^\times$ i $\mathcal{U}(A)$ grupe invertibilnih i unitarnih elemenata u A. Primijetimo da je tada $\mathcal{U}(A)$ deformacioni retrakt od $A^\times$. Zaista, ako je $a \in A^\times$, tada je očito i $|a| \in A^\times$ te se lako provjeri da je element $\omega(a) := a|a|^{-1}$ unitaran (vidjeti Zadatak 3.6.5). Tada prema Zadatku 4.7.20 preslikavanje $a \mapsto \omega(a)$ definira deformacionu retrakciju s $A^\times$ na $\mathcal{U}(A)$. Drugim riječima, vrijedi $\omega(u) = u$ za sve $u \in \mathcal{U}(A)$ te $\omega(a) \overset{h}{\sim} a$ u $A^\times$ za sve $a \in A^\times$.

Uzmimo sada da je $A = \mathbb{B}(\mathcal{H})$. Tada se koristeći Borelov funkcionalni račun može pokazati da je svaki unitarni operator $U \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ oblika $T = \exp(iH)$ za neki hermitski operator $H \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ (to ne vrijedi u općenitim C^*-algebrama, vidjeti Zadatak 3.6.11). Posebno, grupa $\mathcal{U}(\mathbb{B}(\mathcal{H}))$ je putevima povezana, pa je onda i grupa $\mathbb{B}(\mathcal{H})^\times$ putevima povezana (Štoviše, može se pokazati da su te grupe u stvari kontraktibilne, o čemu govori tzv. **Kuiperov teorem**). Odavde specijalno dobivamo:

Propozicija 4.5.12. *Svaka Fredholmova klasa* $\mathbf{F}_n(\mathcal{H})$ *je putevima povezana. Posebno, dva Fredholmova operatora* $T_1, T_2 \in \mathbf{F}(\mathcal{H})$ *su homotopna u* $\mathbf{F}(\mathcal{H})$ *ako i samo ako je* $\operatorname{index}(T_1) = \operatorname{index}(T_2)$.

Dokaz. Koristeći slične arugmente kao i prije, dovoljno je pokazati da je klasa $\mathbf{F}_0(\mathcal{H})$ putevima povezana. Neka su stoga $T_1, T_2 \in \mathbf{F}_0(\mathcal{H})$. Tada prema Korolaru 4.5.8 postoje invertibilni operatori $R_1, R_2 \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ i kompaktni operatori $K_1, K_2 \in \mathbb{K}(\mathcal{H})$ takvi da je $T_i = R_i + K_i$ $(i = 1, 2)$. Kao što smo napomenuli $R_1 \overset{h}{\sim} R_2$ u $\mathbb{B}(\mathcal{H})^\times$ te $K_1 \overset{h}{\sim} K_2$ u $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ (jer je $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ konveksan skup, kao potprostor od $\mathbb{B}(\mathcal{H})$). Dakle $T_1 = R_1 + K_1 \overset{h}{\sim} R_2 + K_2 = T_2$ u $\mathbf{F}_0(\mathcal{H})$. □

Označimo sada s $\mathfrak{G}$ grupu invertibilnih elemenata Calkinove algebre $\mathbf{C}(\mathcal{H})$. Za svako $n \in \mathbb{Z}$ neka je $\mathfrak{G}_n$ slika Fredholmove klase $\mathbf{F}_n(\mathcal{H})$ u $\mathfrak{C}(\mathcal{H})$. Tada je $\mathfrak{G}_0$ otvorena i zatvorena normalna podgrupa od $\mathfrak{G}$ koja se sastoji od svih elemenata iz $\mathfrak{G}$ koji su homotopni s $1_{\mathbf{C}(\mathcal{H})}$ (vidjeti Zadatak 3.6.13). Štoviše, kvocijentna grupa $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$ je izomorfna aditivnoj grupi $\mathbb{Z}$, preko izomorfizma $\Phi : \mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0 \to \mathbb{Z}$, koji slika klasu $(\mathfrak{G}_n.\mathfrak{G}_0)/\mathfrak{G}_0$ u cijeli broj n. U tom kontekstu je $\operatorname{index}(T) = \Phi(\pi(q(T)))$ za sve $T \in \mathbf{F}(\mathcal{H})$, gdje su $q : \mathbb{B}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{C}(\mathcal{H})$ i $\pi : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$ pripadna kvocijentna preslikavanja.

4.6 Hilbert-Schmidtovi i nuklearni operatori

Posebno istaknute klase kompaktnih operatora na Hilbertovim prostorima čine tzv. Nuklearni i Hilbert-Schmidtovi operatori o kojima će biti riječ u ovoj točki. Prije nego li damo formalne definicije, najprije se prisjetimo pojma sumabilnosti u Banachovim prostorima.

Neka je $\{x_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ familija vektora u Banachovom prostoru X. Označimo s $\mathcal{F}$ skup svih nepraznih konačnih podskupova od $\mathbb{I}$ te ga uredimo sa skupovnom inkluzijom. Za svaki $F \in \mathcal{F}$ stavimo $x_F := \sum_{i\in F} x_i$. Tada je $(x_F)_{F\in\mathcal{F}}$ mreža u X. Za familiju $\{x_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ kažemo da je **sumabilna** ako postoji vektor $x \in X$ koji je limes mreže $(x_F)_{F\in\mathcal{F}}$. U tom slučaju također kažemo da je x **suma familije** $\{x_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ i pišemo $x = \sum_{i\in\mathbb{I}} x_i$. Vrijedi sljedeći Cauchyjev kriterij sumabilnosti čiji dokaz ostavljamo za zadaću:

Propozicija 4.6.1. *Familija vektora* $\{x_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ *Banachovog prostora* X *je sumabilna ako i samo ako vrijedi*

$$\text{Za sve } \varepsilon > 0 \quad \text{postoji } F_\varepsilon \in \mathcal{F} \quad \text{takav da } F \in \mathcal{F},\ F \cap F_\varepsilon = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \left\| \sum_{i\in F} x_i \right\| < \varepsilon.$$

Posebno, skup $\{i \in \mathbb{I} :\ \|x_i\| > 0\}$ *je najviše prebrojiv.*

Ako su svi x_i nenegativni realni brojevi, tada je familija $\{x_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ sumabilna ako i samo ako je $\sup_{F\in\mathcal{F}} \sum_{i\in F} x_i < \infty$ i u tom slučaju je

$$\sum_{i\in\mathbb{I}} x_i = \sup \left\{ \sum_{i\in F} x_i :\ F \in \mathcal{F} \right\}.$$

Koristeći desnu stranu gornjeg izraza možemo definirati sumu $\sum_{i\in\mathbb{I}} x_i$ za proizvoljnu familiju $\{x_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ elemenata u $\mathbb{R}_+$.

Propozicija 4.6.2. *Neka su* $\mathcal{E}$ *i* $\mathcal{F}$ *ortonormirane baze za Hilbertov prostor* $\mathcal{H}$. *Tada za svaki operator* $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ *vrijedi*

$$\sum_{e\in\mathcal{E}} \|Te\|^2 = \sum_{f\in\mathcal{F}} \|T^* f\|^2 = \sum_{e\in\mathcal{E}} \sum_{f\in\mathcal{F}} |\langle Te, f\rangle|^2.$$

Dokaz. Tvrdnja slijedi direktno iz Parsevalove jednakosti , budući da imamo $\|Te\|^2 = \sum_{f\in\mathcal{F}} |\langle Te, f\rangle|^2$ za sve $e \in \mathcal{E}$, kao i $\|T^*f\|^2 = \sum_{e\in\mathcal{E}} |\langle e, T^*f\rangle|^2$ za sve $f \in \mathcal{F}$. □

Za svaki operator $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ i ortonormiranu bazu $\mathcal{E}$ za $\mathcal{H}$ definiramo

$$\|T\|_2 := \left(\sum_{e\in\mathcal{E}} \|Te\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}.$$

Prema Propoziciji 4.6.2 broj $\|T\|_2$ ne ovisi o izboru ortonormirane baze $\mathcal{E}$. Kažemo da je T **Hilbert-Schmidtov operator** ako je $\|T\|_2 < \infty$. Skup svih Hilbert-Schmidtovih operatora na $\mathcal{H}$ označavamo s $\mathbb{B}_2(\mathcal{H})$.

Primjer 4.6.3. (i) Fiksirajmo ortonormiranu bazu $\mathcal{E}$ za $\mathcal{H}$ u promotrimo dijagonalni operator $Te = f(e)e$, gdje je $f \in \ell^\infty(\mathcal{E})$. Tada je $T \in \mathbb{B}_2(\mathcal{H})$ ako i samo ako je $f \in \ell^2(\mathcal{E})$.

(ii) Pretpostavimo sada da je $\mathcal{H}$ separabilan i da je $\mathcal{E} = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Neka je $(\alpha_{m,n})$ $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-matrica od T s obzirom na bazu $\mathcal{E}$, tj. $\alpha_{m,n} = \langle Te_n, e_m\rangle$. Tada iz definicije slijedi

$$\|T\|_2 = \left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{m,n}|^2\right).$$

Posebno, T je Hilbert-Schmidtov operator ako i samo ako je $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{m,n}|^2 < \infty$.

(iii) Neka je (Ω, μ) prostor mjere i neka je $k \in L^2(\Omega \times \Omega, \mu \otimes \mu)$. Kao što znamo, integralni operator

$$(Tf)(y) := \int_\Omega k(x, y)f(y)\, d\mu(y) \quad (f \in L^2(\Omega, \mu))$$

je kompaktan operator na $L^2(\Omega, \mu)$ i vrijedi $\|T\| \le \|k\|_{L^2(\Omega\times\Omega,\mu\otimes\mu)}$ (Primijer 4.4.6). Štoviše, ako je (Ω, μ) σ-konačan prostor mjere, tada je T Hilbert-Schmidtov operator na $L^2(\Omega, \mu)$ i vrijedi $\|T\|_2 = \|k\|_{L^2(\Omega\times\Omega,\mu\otimes\mu)}$. Zaista, neka je $(e_i)_{i\in\mathbb{I}}$ ortonormirana baza za $L^2(\Omega, \mu)$. Budući da je prostor mjere (Ω, μ) σ-konačan, familija $\{\phi_{ij} : i, j \in \mathbb{I}\}$, gdje je

$$\phi_{ij}(x, y) := e_j(x)\overline{e_i(y)} \qquad (i, j \in \mathbb{I},\ x, y \in \Omega)$$

definira ortonormiranu bazu za $L^2(\Omega \times \Omega, \mu \otimes \mu)$ (općenito je familija $\{\phi_{mn}\}$ samo ortonormiran skup u $L^2(\Omega \times \Omega, \mu \otimes \mu)$, vidjeti Lemu 4.4.7). Tada prema Lemi 4.4.7 imamo

$$\begin{aligned}\|T\|_2^2 &= \sum_{j\in\mathbb{I}} \|Te_j\|^2_{L^2(\Omega,\mu)} = \sum_{j\in\mathbb{I}}\sum_{i\in\mathbb{I}} |\langle Te_j, e_i\rangle_{L^2(\Omega,\mu)}|^2 = \sum_{j\in\mathbb{I}}\sum_{i\in\mathbb{I}} |\langle k, \phi_{ij}\rangle|^2_{L^2(\Omega\times O,\mu\otimes\mu)} \\ &= \|k\|^2_{L^2(\Omega\times\Omega,\mu\otimes\mu)}.\end{aligned}$$

Osnovna svojstva Hilbert-Schmidtovih operatora dana su sljedećim teoremom:

Teorem 4.6.4. *(i) Ako je $T \in \mathbb{B}_2(\mathcal{H})$ tada je i $T^* \in \mathbb{B}_2(\mathcal{H})$ te vrijedi $\|T^*\|_2 = \|T\|_2$.*

(ii) $\|T\| \le \|T\|_2$ za sve $T \in \mathbb{B}_2(\mathcal{H})$.

(iii) Ako je $S \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ i $T \in \mathbb{B}_2(\mathcal{H})$, tada su $TS, ST \in \mathbb{B}_2(\mathcal{H})$ i vrijedi $\max\{\|TS\|_2, \|ST\|_2\} \le \|S\|\|T\|_2$.

(iv) $\mathbb{B}_2(\mathcal{H})$ je (obostran) samoadjungiran ideal u $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ i $\|\cdot\|_2$ definira normu na $\mathbb{B}_2(\mathcal{H})$ s obzirom na koju je $\mathbb{B}_2(\mathcal{H})$ Banachova $*$-algebra.

(v) $\mathbb{F}(\mathcal{H})$ *je u normi* $\|\cdot\|_2$ *gust podskup od* $\mathbb{B}_2(\mathcal{H})$*. Posebno,* $\mathbb{B}_2(\mathcal{H}) \subseteq \mathbb{K}(\mathcal{H})$*.*

(vi) *Norma* $\|\cdot\|_2$ *na* $\mathbb{B}_2(\mathcal{H})$ *pridružena je skalarnom produktu*

$$\langle T_1, T_2\rangle_2 := \sum_{e\in\mathcal{E}} \langle T_1 e, T_2 e\rangle \qquad (T_1, T_2 \in \mathbb{B}_2(\mathcal{H})),$$

gdje je $\mathcal{E}$ *neka ortonormirana baza za* $\mathcal{H}$*. Pri tome gornji red konvergira apsolutno i suma mu ne ovisi o izboru ortonormirane baze* $\mathcal{E}$*. Posebno,* $(\mathbb{B}_2(\mathcal{H}), \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ *je Hilbertov prostor.*

Dokaz. (i). Neka je $\mathcal{E}$ neka ortonormirana baza za $\mathcal{H}$. Prema Propoziciji 4.6.2 imamo

$$\|T^*\|_2^2 = \sum_{e\in\mathcal{E}} \|T^* e\|^2 = \sum_{e\in\mathcal{E}} \|Te\|^2 = \|T\|_2^2,$$

odakle slijedi da je $T^* \in \mathbb{B}_2(\mathcal{H})$ i $\|T^*\|_2 = \|T\|_2$.

(ii). Fiksirajmo jedinični vektor $\xi \in \mathcal{H}$ i neka je $\mathcal{E}$ neka ortonormirana baza za $\mathcal{H}$ koja sadrži vektor ξ. Tada je $\|T\|_2^2 = \sum_{e\in\mathcal{E}} \|Te\|^2 \geq \|T\xi\|^2$. Kako je jedinični vektor $\xi \in \mathcal{H}$ bio proizvoljan, slijedi $\|T\|_2 \geq \|T\|$.

(iii). Ako je $\mathcal{E}$ proizvoljna ortonormirana baza za $\mathcal{H}$, tada imamo $\|STe\|^2 \leq \|S\|^2\|Te\|^2$. Odavde slijedi da je $ST \in \mathbb{B}_2(\mathcal{H})$ te da je $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|_2$. Nadalje, iz (i) slijedi da je $S^*T^* \in \mathbb{B}_2(\mathcal{H})$, pa je onda i $TS \in \mathbb{B}_2(\mathcal{H})$ i $\|ST\|_2 \leq \|S\|\|T\|_2$.

(iv). Fiksirajmo neku ortonormiranu bazu $\mathcal{E}$. Ako je $T \in \mathbb{B}_2(\mathcal{H})$, tada je $\|T\|_2 = 0$ ako i samo ako je $\|Te\| = 0$ za sve $e \in \mathcal{E}$, odnosno ako i samo ako je $T = 0$. Nadalje, za $\alpha \in \mathbb{C}$, je očito $\alpha T \in \mathbb{B}_2(\mathcal{H})$ i $\|\alpha T\|_2 = |\alpha|\|T\|_2$. Neka je sad $S \in \mathbb{B}_2(\mathcal{H})$ neki drugi Hilbert-Schmidtov operator. Tada su $\{\|Se\|\}_{e\in\mathcal{E}}$ i $\{\|Te\|\}_{e\in\mathcal{E}}$ familije u $\ell^2(\mathcal{E})$. Koristeći nejednakost trokuta u $\ell^2(\mathcal{E})$ imamo

$$(\sum_{e\in\mathcal{E}} (\|Se\| + \|Te\|)^2)^{1/2} \leq \|S\|_2 + \|T\|_2.$$

Odavde slijedi

$$\begin{aligned} \|S+T\|_2^2 &= \sum_{e\in\mathcal{E}} \|Se + Te\|^2 \leq \sum_{e\in\mathcal{E}} (\|Se\| + \|Te\|)^2 \\ &\leq (\|S\|_2 + \|T\|_2)^2 < \infty. \end{aligned}$$

Dakle, $S+T \in \mathbb{B}_2(\mathcal{H})$ i $\|S+T\|_2 \leq \|S\|_2 + \|T\|_2$. Odavde te iz (i) i (iii) zaključujemo da je $\mathbb{B}_2(\mathcal{H})$ samoadjungirani ideal u $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ te da $\|\cdot\|_2$ definira normu na $\mathbb{B}_2(\mathcal{H})$. Nadalje, koristeći (ii) i (iii) imamo $\|ST\|_2 \leq \|S\|_2\|T\| \leq \|S\|_2\|T\|_2$, pa je $\mathbb{B}_2(\mathcal{H})$ normirana $*$-algebra s obzirom na normu $\|\cdot\|_2$.

Dokažimo da je algebra $\mathbb{B}_2(\mathcal{H})$ potpuna s obzirom na normu $\|\cdot\|_2$. Neka je (T_n) Cauchyjev niz u $\mathbb{B}_2(\mathcal{H})$ s obizrom na normu $\|\cdot\|_2$. Tada je prema (ii) taj niz Cauchyjev i s obzirom na operatorsku normu, pa zaključujemo da postoji $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ takav da je $\lim_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0$. Budući da je niz (T_n) Cauchyjev s obzirom na normu $\|\cdot\|_2$, za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$\text{Za sve } m, n \in \mathbb{N}, \qquad m, n \geq n_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \|T_n - T_m\|_2 < \varepsilon. \tag{4.10}$$

Budući da je svaki Cauchyjev niz u metričkom prostoru ograničen, postoji $M > 0$ takav da vrijedi

$$\|T_n\|_2 \leq M \qquad \text{za sve } n \in \mathbb{N}. \tag{4.11}$$

Fiksirajmo neku ortonormiranu bazu $\mathcal{E}$ za $\mathcal{H}$. Budući da je prebrojiva unija prebrojivih skupova prebrojiv skup, prema Propoziciji 4.6.1 postoji konačan ili prebrojiv podskup $F \subseteq \mathcal{E}$ takav da vrijedi

$$T_n e = 0 \qquad \text{za sve } n \in \mathbb{N} \ i \ e \in \mathcal{E} \setminus F.$$

Kako je $\lim_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0$, za sve $e \in \mathcal{E} \setminus F$ imamo $Te = \lim_{n\to\infty} T_n e = 0$. Posebno, skup $\{e \in \mathcal{E} : \ Te \neq 0\}$ je sadržan u skupu F, pa je kao takav on konačan ili prebrojiv. Poredajmo elemente od F u niz (e_i). Prema 4.11, za sve $n, k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{i=1}^{k} \|T_n e_i\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|T_n e_i\|^2 = \|T_n\|_2^2 \leq M^2.$$

Kako je $\lim_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0$, odavde dobivamo

$$\sum_{i=1}^{k} \|Te_i\|^2 \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \|T_n e_i\|^2 \leq M^2.$$

Budući da gornja jednakost vrijedi za sve $k \in \mathbb{N}$, slijedi

$$\|T\|_2^2 = \sum_{e\in\mathcal{E}} \|Te\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|Te_i\|^2 \leq M^2 < \infty.$$

Time smo pokazali da je $T \in \mathbb{B}_2(\mathcal{H})$. Napokon, iz (4.10) slijedi da za svako $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$m, n \geq n_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} \|(T_n - T_m)e_i\|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Pustimo li da n teži u ∞, nalazimo

$$m \geq n_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} \|(T - T_m)e_i\|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Kako je $k \in \mathbb{N}$ bio prozivoljan, zaključujemo

$$m \geq n_\varepsilon \qquad \Longrightarrow \quad \|T - T_m\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|(T - T_m)e_i\|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Time je dokazana potpunost od $\mathbb{B}_2(\mathcal{H})$ s obzirom na normu $\|\cdot\|_2$.

(v). Najprije primijetimo da za $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ imamo $\|\xi \otimes \eta\|_2 = \|\xi\|\|\eta\|$, pa je $\xi \otimes \eta \in \mathbb{B}_2(\mathcal{H})$. Odavde i iz (iv) slijedi da je $\mathbb{F}(\mathcal{H}) \subseteq \mathbb{B}_2(\mathcal{H})$. Neka je sad $T \in \mathbb{B}_2(\mathcal{H})$ i neka je $\mathcal{E}$ ortonormirana baza za $\mathcal{H}$. Za dano $\varepsilon > 0$ izaberimo konačan podskup $F \subseteq \mathcal{E}$ takav da je $\sum_{e\in\mathcal{E}\setminus F} \|Te\|^2 < \varepsilon^2$ i stavimo $P := \sum_{e\in F} e \otimes e$ i $S := TP$. Tada je $S \in \mathbb{F}(\mathcal{H})$ i $\|T - S\|_2^2 = \sum_{e\in\mathcal{E}\setminus F} \|Te\|^2 < \varepsilon^2$. Time smo pokazali da je $\mathbb{F}(\mathcal{H})$ $\|\cdot\|_2$-gust podskup od $\mathbb{B}_2(\mathcal{H})$. Nadalje, prema (ii) imamo $\|T - S\|_2 \leq \|T - S\| < \varepsilon$, pa iz Teorema 4.4.2 slijedi da je $T \in \mathbb{K}(\mathcal{H})$.

(vi). Dokaz ove tvrdnje je jednostavan i ostavljamo ga za zadaću (Zadatak 4.7.22).

□

Za operator $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ i ortonormiranu bazu $\mathcal{E}$ za $\mathcal{H}$ definiramo

$$\|T\|_1 := \sum_{e\in\mathcal{E}} \langle |T|e, e\rangle \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}.$$

Prema Propoziciji 4.6.2, broj $\|T\|_1$ ne ovisi o izboru ortonormirane baze $\mathcal{E}$. Ako je $\|T\|_1 < \infty$, tada kažemo da je T **nuklearan operator**. Skup svih nuklearnih operatora na $\mathcal{H}$ označavamo s $\mathbb{B}_1(\mathcal{H})$. Osnovna veza između Hilbert-Schmidtovih i nuklearnih operatora dana je sljedećom propozicijom:

Propozicija 4.6.5. *Za operator $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ su sljedeća svojstva međusobno ekivalentna:*

(i) $T \in \mathbb{B}_1(\mathcal{H})$.

(ii) $|T|^{1/2} \in \mathbb{B}_2(\mathcal{H})$.

(iii) *T je produkt dva Hilbert-Schmidtova operatora.*

(iv) *$|T|$ je produkt dva Hilbert-Schmidtova operatora.*

Dokaz. Neka je $T = V|T|$ polarna dekompozicija od T.

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii). Ovo slijedi iz činjenice da je $\|T\|_1 = \||T|^{1/2}\|_2^2$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Imamo $T = (V|A|^{1/2})|A|^{1/2}$, a prema pretpostavici i Teoremu 4.6.4, oba faktora su Hilbert-Schmidtovi operatori.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv). Pretpostavimo da je $T = T_1T_2$, gdje su $T_1, T_2 \in \mathbb{B}_2(\mathcal{H})$. Tada je $|T| = V^*T = (V^*T_1)T_2$, a iz Teorema 4.6.4 slijedi $V^*T_1 \in \mathbb{B}_2(\mathcal{H})$.

(iv) $\Longrightarrow$ (i). Pretpostavimo da je $|T| = T_1T_2$, gdje su $T_1, T_2 \in \mathbb{B}_2(\mathcal{H})$. Fiksirajmo ortonormiranu bazu $\mathcal{E}$ za $\mathcal{H}$. Budući da za svaki vektor $e \in \mathcal{E}$ imamo $\langle |T|e, e\rangle = \langle T_2e, T_1^*e\rangle \leq \|T_2e\|\|T_1^*e\|$, imamo

$$\begin{aligned}\sum_{e\in\mathcal{E}}\langle |T|e, e\rangle &\leq \sum_{e\in\mathcal{E}} \|T_2e\|\|T_1^*e\| \leq \left(\sum_{e\in\mathcal{E}} \|T_2e\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{e\in\mathcal{E}} \|T_1^*e\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|T_2\|_2\|T_1\|_2.\end{aligned}$$

□

Korolar 4.6.6. *Imamo inkluzije $\mathbb{B}_1(\mathcal{H}) \subseteq \mathbb{B}_2(\mathcal{H}) \subseteq \mathbb{K}(\mathcal{H})$.*

Propozicija 4.6.7. *Neka je $T \in \mathbb{B}_1(\mathcal{H})$. Ako je $\mathcal{E}$ ortonormirana baza za $\mathcal{H}$, tada je $\sum_{e\in\mathcal{E}} |\langle Te, e\rangle| < \infty$ i suma $\sum_{e\in\mathcal{E}}\langle Te, e\rangle$ ne ovisi o izboru ortonormirane baze $\mathcal{E}$.*

Dokaz. Prema Propoziciji 4.6.5 imamo $T = T_2^*T_1$, gdje su $T_1, T_2 \in \mathbb{B}_2(\mathcal{H})$. Kako je $\|(T_1 - \lambda T_2)e\|^2 \geq 0$ za svaki skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ i vektor $e \in \mathcal{E}$, imamo

$$2\,\mathrm{Re}\,\overline{\lambda}\langle T_1e, T_2e\rangle \leq \|T_1e\|^2 + |\lambda|^2\|T_2e\|^2.$$

Izabrimo skalar λ tako da vrijedi $|\lambda| = 1$ i $\overline{\lambda}\langle T_1e, T_2e\rangle = |\langle T_1e, T_2e\rangle|$. Tada za svako $e \in \mathcal{E}$ imamo

$$|\langle Te, e\rangle| = |\langle T_1e, T_2e\rangle| \leq \frac{1}{2}(\|T_1e\|^2 + \|T_2e\|^2),$$

odakle slijedi

$$\sum_{e\in\mathcal{E}} |\langle Te, e\rangle| \leq \frac{1}{2}(\|T_1\|_2^2 + \|T_2\|_2^2) < \infty.$$

Ostaje dokazati da suma $\sum_{e\in\mathcal{E}}\langle Te, e\rangle$ ne ovisi o odabiru ortonormirane baze $\mathcal{E}$. Kako bismo to pokazali, najprije primijetimo da za svako $e \in \mathcal{E}$ imamo

$$\mathrm{Re}\langle Te, e\rangle = \frac{1}{4}(\|(T_1 + T_2)e\|^2 - \|(T_1 - T_2)e\|^2).$$

Odavde slijedi

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{e\in\mathcal{E}}\langle Te,e\rangle\right)=\frac{1}{4}(\|T_1+T_2\|_2^2-\|T_1-T_2\|^2). \tag{4.12}$$

Ukoliko T zamijenimo s iT, tada dobivamo

$$\mathrm{Im}\left(\sum_{e\in\mathcal{E}}\langle Te,e\rangle\right)=\frac{1}{4}(\|iT_1+T_2\|_2^2-\|iT_1-T_2\|^2). \tag{4.13}$$

Iz (4.12) i (4.13) je sada jasno da suma $\sum_{e\in\mathcal{E}}\langle Te,e\rangle$ ne ovisi o odabiru ortonormirane baze $\mathcal{E}$. $\square$

U svjetlu Propozicije 4.6.7 za nuklearni operator $T\in\mathbb{B}_1(\mathcal{H})$ možemo definirati **trag** od T s

$$\operatorname{tr}T:=\sum_{e\in\mathcal{E}}\langle Te,e\rangle,$$

gdje je $\mathcal{E}$ neka ortonormirana baza za $\mathcal{H}$.

Idući teorem opisuje osnovna svojstva nuklearnih operatora.

Teorem 4.6.8. *(i) $\mathbb{B}_1(\mathcal{H})$ je (obostran) ideal u $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ i $\|\cdot\|_1$ definira normu na $\mathbb{B}_1(\mathcal{H})$.*

(ii) Ako je $T\in\mathbb{K}(\mathcal{H})$ i ako su $\lambda_1,\lambda_2,\ldots$ sve svojstvene vrijednosti od T (brojeći njihove kratnosti), tada je $T\in\mathbb{B}_1(\mathcal{H})$ ako i samo ako je $(\lambda_n)\in\ell^1$ i u tom slučaju vrijedi $\|T\|_1=\sum_n\lambda_n$.

(iii) $\operatorname{tr}:\mathbb{B}_1(\mathcal{H})\to\mathbb{C}$ je pozitivno definitan linearni funkcional.

(iv) $\mathbb{F}(\mathcal{H})\subseteq\mathbb{B}_1(\mathcal{H})$ i $\mathbb{F}(\mathcal{H})$ je u normi $\|\cdot\|_1$ gust podskup od $\mathbb{B}_1(\mathcal{H})$.

(v) Ako je $T\in\mathbb{B}_1(\mathcal{H})$, tada vrijedi $\operatorname{tr}(TS)=\operatorname{tr}(ST)$ i $|\operatorname{tr}(ST)|\leq\|S\|\|T\|_1$ za svaki operator $S\in\mathbb{B}(\mathcal{H})$.

(vi) $\|T^*\|_1=\|T\|_1$ za sve $T\in\mathbb{B}_1(\mathcal{H})$.

(vii) Ako je $T\in\mathbb{B}_1(\mathcal{H})$ i $S\in\mathbb{B}(\mathcal{H})$, tada vrijedi $\max\{\|ST\|_1,\|TS\|_1\}\leq\|S\|\|T\|_1$.

Dokaz. (i). Neka su $T_1,T_2\in\mathbb{B}_1(\mathcal{H})$ i neka su $T_1=V|T_1|$ i, $T_2=W|T_2|$ i $T_1+T_2=U|T_1+T_2|$ pripadne polarne dekompozicije. Budući da je prema Korolaru 4.6.6 operator $|T_1+T_2|$ kompaktan, prema spektralnom teoremu postoji ortonormiran niz (e_n) u $\mathcal{H}$ i niz (λ_n) u c_0 takav da vrijedi

$|T_1+T_2| = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \otimes e_n$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle |T_1+T_2| e_n, e_n\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \langle (T_1+T_2) e_n, U e_n\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (\langle T_1 e_n, U e_n\rangle + \langle T_2 e_n, U e_n\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (\langle |T_1| e_n, V^* U e_n\rangle + \langle |T_2| e_n, W^* U e_n\rangle) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\langle |T_1|^{\frac{1}{2}} e_n, |T_1|^{\frac{1}{2}} V^* U e_n\rangle + \langle |T_2|^{\frac{1}{2}} e_n, |T_2|^{\frac{1}{2}} W^* U e_n\rangle \right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\||T_1|^{\frac{1}{2}} e_n\| \cdot \||T_1|^{\frac{1}{2}} V^* U e_n\| + \||T_2|^{\frac{1}{2}} e_n\| \cdot \||T_2|^{\frac{1}{2}} W^* U e_n\| \right) \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \||T_1|^{\frac{1}{2}} e_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \||T_1|^{\frac{1}{2}} V^* U e_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \||T_2|^{\frac{1}{2}} e_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \||T_2|^{\frac{1}{2}} W^* U e_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \||T_1|^{\frac{1}{2}}\|_2 \cdot \||T_1|^{\frac{1}{2}} V^* U\|_2 + \||T_2|^{\frac{1}{2}}\|_2 \cdot \||T_2|^{\frac{1}{2}} W^* U\|_2 \\
&\leq \||T_1|^{\frac{1}{2}}\|_2^2 + \||T_2|^{\frac{1}{2}}\|_2^2 \\
&= \|T_1\|_1 + \|T_2\|_1.
\end{aligned}$$

Odavde istovremeno vidimo da iz $T_1, T_2 \in \mathbb{B}_1(\mathcal{H})$ slijedi $T_1 + T_2 \in \mathbb{B}_1(\mathcal{H})$ te da $\|\cdot\|_1$ zadovoljava nejednakost trokuta. Ostatak dokaza da $\|\cdot\|_1$ definira normu na $\mathbb{B}_1(\mathcal{H})$ je lagan, pa ga izostavljamo.

Pretpostavimo sada da je $T \in \mathbb{B}_1(\mathcal{H})$ i faktorizirajmo $T = T_1 T_2$, gdje su $T_1, T_2 \in \mathbb{B}_2(\mathcal{H})$. Budući da je $\mathbb{B}_2(\mathcal{H})$ ideal u $\mathbb{B}(\mathcal{H})$, za svaki operator $S \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ imamo $ST = (ST_1)T_2 \in \mathbb{B}_1(\mathcal{H})$ i $TS = T_1(T_2 S) \in \mathbb{B}_1(\mathcal{H})$. Time smo pokazali da je $\mathbb{B}_1(\mathcal{H})$ ideal u $\mathbb{B}(\mathcal{H})$.

(ii). Pretpostavimo da je $T \in \mathbb{K}(\mathcal{H})$ i neka je $T = V|T|$ njegova polarna dekompozicija. Budući da je $|T| \in \mathbb{B}(\mathcal{H})_+$, prema spektralnom teoremu postoji ortonormiran niz (e_n) u $\mathcal{H}$ takav da vrijedi $|T| = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \otimes e_n$, gdje je $(\lambda_n) \in c_0$ niz svojstvenih vrijednosti za $|T|$. Naravno, kako je $|T|$ pozitivan, imamo $\lambda_n \geq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je $T \in \mathbb{B}_1(\mathcal{H})$ i $\mathcal{E}$ neka ortonormirana baza za $\mathcal{H}$ koja sadrži niz (e_n), tada imamo

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n = \sum_{e \in \mathcal{E}} \langle |T| e, e\rangle = \operatorname{tr} |T| < \infty.$$

Obratno, ako je $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$, tada se lako vidi da je operator $|T|$ nuklearan, pa je posljedično i $T = V|T| \in \mathbb{B}_1(\mathcal{H})$.

(iii). Jasno je da trag definira pozitivan linearni funkcional na $\mathbb{B}_1(\mathcal{H})$. Nadalje, ako je T pozitivan nuklearni operator s dijagonalizacijom $T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \otimes e_n$, tada je $\operatorname{tr} T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$. Odavde slijedi da je $\operatorname{tr} T = 0$ ako i samo ako je $T = 0$.

(iv). Dokaz ove činjenice je sličan dokazu od (v) Teorema 4.6.4, pa ga ostavljamo za zadaću (Zadatak 4.7.23).

(v). Neka su $T_1, T_2 \in \mathbb{B}_2(\mathcal{H})$. Tada kao u dokazu Propozicije 4.6.7 imamo

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\operatorname{tr}(T_2^*T_1)) &= \frac{1}{4}(\|T_1+T_2\|_2^2 - \|T_1-T_2\|_2^2) = \frac{1}{4}(\|T_1^*+T_2^*\|_2^2 - \|T_1^*-T_2^*\|_2^2) \\ &= \operatorname{Re}(\operatorname{tr}(T_2T_1^*)).\end{aligned}$$

Ako u gornjoj jednakosti operator T_1 zamijenimo s operatorom iT_1, dobivamo $\operatorname{Im}(\operatorname{tr}(T_2^*T_1)) = -\operatorname{Im}(\operatorname{tr}(T_2T_1^*))$. Dakle,

$$\operatorname{tr}(T_2^*T_1) = \overline{\operatorname{tr}(T_2T_1^*)} \qquad \text{za sve } T_1, T_2 \in \mathbb{B}_2(\mathcal{H}).$$

Neka je sada $T \in \mathbb{B}_1(\mathcal{H})$, $T = T_2^*T_1$, gdje su $T_1, T_2 \in \mathbb{B}_2(\mathcal{H})$. Tada za sve $S \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ imamo

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(ST) &= \operatorname{tr}((ST_2^*)T_1) = \overline{\operatorname{tr}((T_2S^*)T_1^*)} = \overline{\operatorname{tr}(T_2(T_1S)^*)} = \operatorname{tr}(T_2^*(T_1S)) \\ &= \operatorname{tr}(TS).\end{aligned}$$

Kako bismo dokazali drugi dio tvrdnje, primijetimo da su za $T \in \mathbb{B}_1(\mathcal{H})$ i $S \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$, $S|T|^{\frac{1}{2}}$ i $|T|^{\frac{1}{2}}S$ Hilbert-Schmidtovi operatori. Ako je $T = V|T|$ polarna dekompozicija od T i $\mathcal{E}$ neka ortonormirana baza za $\mathcal{H}$, tada primjenom Cauchy-Schwarzove nejednakosti dobivamo

$$\begin{aligned}|\operatorname{tr}(ST)| &= \sum_{e\in\mathcal{E}} |\langle |T|^{\frac{1}{2}}e, |T|^{\frac{1}{2}}V^*S^*e\rangle| \\ &\leq \sum_{e\in\mathcal{E}} \||T|^{\frac{1}{2}}e\|\||T|^{\frac{1}{2}}V^*S^*e\| \\ &\leq \left(\sum_{e\in\mathcal{E}} \||T|^{\frac{1}{2}}e\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{e\in\mathcal{E}} \||T|^{\frac{1}{2}}V^*S^*e\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \||T|^{\frac{1}{2}}\|_2\||T|^{\frac{1}{2}}V^*S^*\|_2.\end{aligned}$$

Odavde i iz Teorema 4.6.4 dobivamo

$$\begin{aligned}|\operatorname{tr}(ST)| &\leq \||T|^{\frac{1}{2}}\|_2^2\||T|^{\frac{1}{2}}V^*S^*\| \leq \||T|^{\frac{1}{2}}\|_2^2\|S\| \\ &= \|T\|_1\|S\|,\end{aligned}$$

čime je tvrdnja (v) u potpunosti dokazana.

(vi). Ako je $T \in \mathbb{B}_1(\mathcal{H})$ s polarnom dekompozicijom $T = V|T|$, tada je prema Napomeni 4.2.7 $|T^*| = V|T|V^*$. Odavde i iz (v) dobivamo

$$\begin{aligned}\|T^*\|_1 &= \operatorname{tr}|T^*| = \operatorname{tr}(V|T|V^*) = \operatorname{tr}(V|T|V^*) = \operatorname{tr}(V^*V|T|) = \operatorname{tr}|T| \\ &= \|T\|_1.\end{aligned}$$

(vii). Neka su $T \in \mathbb{B}_1(\mathcal{H})$ i $S \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$. Napravimo polarne dekomozicije $T = V|T|$ i $ST = W|ST|$, tako da je $|ST| = R|T|$, gdje je $R := W^*SV$. Posebno, $\|R\| \leq \|S\|$. Koristeći (v) dobivamo

$$\begin{aligned}\|ST\|_1 &= \operatorname{tr}(|ST|) = \operatorname{tr}(R|T|) \leq \|R\|\|T\|_1 \\ &\leq \|S\|\|T\|_1.\end{aligned}$$

Nadalje, odavde i iz (vi) dobivamo $\|TS\|_1 = \|S^*T^*\|_1 \leq \|S^*\|\|T^*\|_1 = \|S\|\|T\|_1$. □

Korolar 4.6.9. *Ako je $T \in \mathbb{B}_1(\mathcal{H})$ i ako su $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ i $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ dvije ortonormirane baze za $\mathcal{H}$, tada vrijedi*

$$\sum_{i\in\mathbb{I}} |\langle Te_i, f_i\rangle| \leq \|T\|_1.$$

Dokaz. Neka je $\alpha_i \in \mathbb{T}$ takav da je $\alpha_i\langle Te_i, f_i\rangle = |\langle Te_i, f_i\rangle|$ i neka je $U \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ unitaran operator takav da je $Ue_i = \overline{\alpha_i} f_i$ za sve $i \in \mathbb{I}$. Tada je $|\langle Te_i, f_i\rangle| = |\langle Te_i, Ue_i\rangle| = |\langle U^*Te_i, e_i\rangle|$ za sve $i \in \mathbb{I}$. Kako je $U^*T \in \mathbb{B}_1(\mathcal{H})$, imamo

$$\sum_{i\in\mathbb{I}} |\langle Te_i, f_i\rangle| = \operatorname{tr}(U^*T) \leq \|U^*\|\|T\|_1 = \|T\|_1.$$

□

Napomena 4.6.10. Ako su $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, primijetimo da je $\|\xi \otimes \eta\|_1 = \|\xi\|\|\eta\|$. Dakle, na operatorima ranga 1 se norme $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ podudaraju.

Teorem 4.6.11. *Neka su (ξ_n) i (η_n) dva kvadratno sumabilna niza vektora u $\mathcal{H}$. Tada je $T := \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \otimes \eta_n$ nuklearan operator i vrijedi $\|T\|_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_n\|\|\eta_n\|$. Obratno, ako je T nuklearan operator na $\mathcal{H}$, tada postoje dva ortogonalna kvadratno sumabilna niza vektora (ξ_n) i (η_n) u $\mathcal{H}$ takva da vrijedi $T = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \otimes \eta_n$ i $\|T\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \|\xi_n\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|\eta_n\|^2$.*

Dokaz. Neka su (ξ_n) i (η_n) dva kvadratno sumabilna niza vektora u $\mathcal{H}$ te neka je (e_n) ortonormiran niz vektora u $\mathcal{H}$. Za $n \in \mathbb{N}$ stavimo $F_n := \sum_{k=1}^{n} \xi_k \otimes e_k \in \mathbb{F}(\mathcal{H})$. Tada za $n > m$ imamo

$$\|F_n - F_m\|_2^2 = \sum_{k=m+1}^{n} \|(F_n - F_m)(e_k)\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |\langle e_k, \xi_k\rangle|^2 \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|\xi_k\|^2.$$

Odavde slijedi da je (F_n) Cauchyjev niz u $\mathbb{F}(\mathcal{H})$ s obzirom na normu $\|\cdot\|_2$, pa prema Teoremu 4.6.4 (iv) imamo $F := \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \otimes e_n \in \mathbb{B}_2(\mathcal{H})$. Kako je $G := \sum_{n=1}^{\infty} e_n \otimes \eta_n$ adjungat operatora $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \otimes e_n \in \mathbb{B}_2(\mathcal{H})$, imamo $G \in \mathbb{B}_2(\mathcal{H})$. Koristeći činjenicu da je množenje u normiranoj algebri neprekidno i Propoziciju 4.3.2 (iii), imamo

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \otimes \eta_n = FG \in \mathbb{B}_1(\mathcal{H}) \qquad \text{i} \qquad \|T\|_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_n \otimes \eta_n\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_n\|\|\eta_n\|.$$

Obratno, neka je $T \in \mathbb{B}_1(\mathcal{H})$ i neka je $T = V|T|$ njegova polara dekompozicija. Prikažimo operator $|T|$ u dijagonalnom obliku $|T| = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \otimes e_n$, gdje su $\lambda_n > 0$ i (e_n) ortonormirana baza za $(\ker|T|)^\perp = (\ker T)^\perp$. Stavimo $\eta_n := \sqrt{\lambda_n} e_n$ i $\xi_n := V\eta_n$. Očito je (η_n) ortogonalan niz u $\mathcal{H}$. Budući da je V parcijalna izometrija s inicijalnim prostorom $(\ker T)^\perp$, niz (ξ_n) je također ortogonalan i $\|\xi_n\|^2 = \|\eta_n\|^2 = \lambda_n$. Dakle,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|\eta_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \operatorname{tr}|T| = \|T\|_1$$

te

$$\begin{aligned} T &= V|T| = V\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \otimes e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} V(\sqrt{\lambda_n} e_n) \otimes \sqrt{\lambda_n} e_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \otimes \eta_n. \end{aligned}$$

□

Neka je $T \in \mathbb{B}_1(\mathcal{H})$. Tada je s

$$\varphi_T : \mathbb{K}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}, \qquad \varphi_T(K) := \operatorname{tr}(KT) = \operatorname{tr}(TK).$$

dobro definiran linearni funkcional na $\mathbb{K}(\mathcal{H})$. Prema Teoremu 4.6.8 imamo

$$\sup\{|\operatorname{tr}(TK) : \ K \in \operatorname{Ball}(\mathbb{K}(\mathcal{H}))\|\} \leq \|T\|_1,$$

što pokazuje da je φ_T ograničen funkcional s $\|\varphi_T\| \leq \|T\|_1$. Vrijedi i puno više:

Teorem 4.6.12. *Preslikavanje $\Phi : T \mapsto \varphi_T$ definira izometrički izomorfizam s $\mathbb{B}_1(\mathcal{H})$ na $\mathbb{K}(\mathcal{H})^\natural$.*

Dokaz. Trebamo pokazati da je preslikavanje Φ surjektivno te da vrijedi $\|\Phi(T)\| \geq \|T\|_1$ za sve $T \in \mathbb{B}_1(\mathcal{H})$. Za $\varphi \in \mathbb{K}(\mathcal{H})^\natural$ definirajmo

$$[\xi, \eta]_\varphi := \varphi(\xi \otimes \eta) \qquad \text{za sve } \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Tada je $|[\xi, \eta]_\varphi| \leq \|\varphi\|\|\xi\|\|\eta\|$ za sve $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, pa je $[\cdot, \cdot]_\varphi$ ograničena seskvilinearna forma na $\mathcal{H}$. Prema Teoremu 1.1.11 postoji jedinstven ograničen operator $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ takav da vrijedi

$$\langle T\xi, \eta\rangle = [\xi, \eta]_\varphi = \varphi(\xi \otimes \eta) \qquad \text{za sve } \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Tvrdimo da je $T \in \mathbb{B}_1(\mathcal{H})$ i da je $\varphi = \varphi_T$. Zaista, neka je $T = V|T|$ polarna dekompozicija od T i neka je $\mathcal{E}$ neka ortonormirana baza za $\mathcal{H}$. Ako je E konačan podskup od $\mathcal{E}$, tada je $C_E := (\sum_{e \in E} e \otimes e)V^*$ kontrakcija u $\mathbb{F}(\mathcal{H})$, pa je

$$\begin{aligned} \|\varphi\| &\geq |\varphi(C_E)| = \left|\varphi\left(\sum_{e \in E} e \otimes Ve\right)\right| = \sum_{e \in E} |\langle Te, Ve\rangle| \\ &= \sum_{e \in E} \langle |T|e, e\rangle. \end{aligned}$$

Odavde slijedi da je

$$\|\varphi\| \geq \sup\left\{\sum_{e \in E} \langle |T|e, e\rangle : \ E \subseteq \mathcal{E} \text{ konačan}\right\} = \|T\|_1.$$

Dakle, $T \in \mathbb{B}_1(\mathcal{H})$ i $\|T\|_1 = \|\varphi\|$.

Ostalo nam je pokazati da je $\varphi = \varphi_T$. Kako su ti funkcionali ograničeni te kako je $\mathbb{F}(\mathcal{H})$ u normi $\|\cdot\|_1$ gust podskup od $\mathbb{B}_1(\mathcal{H})$ (Teorem 4.6.8 (iv)), dovoljno je pokazati da vrijedi $\varphi(F) = \varphi_T(F)$ za sve $F \in \mathbb{F}(\mathcal{H})$. Neka je stoga $F \in \mathbb{F}(\mathcal{H})$. Tada prema Propoziciji 4.3.3 postoji konačno mnogo vektora $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathcal{H}$ te $\eta_1, \ldots, \eta_n \in \mathcal{H}$ tako da vrijedi $F = \sum_{i=1}^n \xi_i \otimes \eta_i$. Tada imamo

$$\begin{aligned} \varphi(F) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^n \xi_i \otimes \eta_i\right) = \sum_{i=1}^n \langle T\xi_i, \eta_i\rangle = \sum_{i=1}^n \operatorname{tr}(T(\xi_i \otimes \eta_i)) = \operatorname{tr}(TF) \\ &= \varphi_T(F) \end{aligned}$$

Time je dokaz teorema završen. $\square$

Na skupove operatora $\mathbb{F}(\mathcal{H})$, $\mathbb{B}_1(\mathcal{H})$, $\mathbb{B}_2(\mathcal{H})$, $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ i $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ možemo redom gledati kao nekomutativne analogone od c_{00}, ℓ^1, ℓ^2, c_0 i ℓ^∞. Budući da je ℓ^∞ dual od ℓ^1, ta nam analogija može sugerirati da je $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ dual od $\mathbb{B}_1(\mathcal{H})$. Kako bismo pokazali da je to zaista točno, najprije primijetimo da je za svako $S \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ s

$$\psi_S : \mathbb{B}_1(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}, \qquad \psi_S(T) := \operatorname{tr}(ST) = \operatorname{tr}(TS)$$

dobro definiran linearni funkcional na $\mathbb{B}_1(\mathcal{H})$.

Teorem 4.6.13. *Preslikavanje $\Psi : S \mapsto \psi_S$ definira izometrički izomorfizam s $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ na $\mathbb{B}_1(\mathcal{H})^\natural$.*

Dokaz. Iz Teorema 4.6.8 (v) slijedi da je $\|\psi_S\| \leq \|S\|$, tako da je $\psi_S \in \mathbb{B}_1(\mathcal{H})^\natural$. Također, preslikavanje Ψ je očito linearno. Neka je $\varepsilon > 0$ i izaberimo jedinični vektor $\xi \in \mathcal{H}$ takav da je $\|S\xi\| > \|S\| - \varepsilon$. Sada izaberimo jedinični vektor $\eta \in \mathcal{H}$ takav da je $\langle S\xi, \eta\rangle = \|S\xi\|$. Tada za $C := \xi \otimes \eta$ imamo $C \in \mathbb{F}(\mathcal{H}) \subseteq \mathbb{B}_1(\mathcal{H})$ i $\|C\|_1 = 1$. Dakle,

$$\begin{aligned} \|\psi_S\| &\geq |\operatorname{tr}(SC)| = \operatorname{tr}(S\xi \otimes \eta) = \langle S\xi, \eta\rangle = \|S\xi\| \\ &> \|S\| - \varepsilon. \end{aligned}$$

Kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, slijedi $\|\psi_S\| = \|S\|$. Dakle, preslikavanje Ψ je izometrija.

Ostaje dokazati surjektivnost od Ψ. Neka je $\psi \in \mathbb{B}_1(\mathcal{H})^\natural$. Tada koristeći slične argumente kao u dokazu Teorema 4.6.12 dolazimo do operatora $S \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ koji zadovoljava $\langle S\xi, \eta\rangle = \psi(\xi \otimes \eta)$ za sve $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Odavde naravno dobivamo da je $\psi(F) = \psi_S(F)$ za sve operatore $F \in \mathbb{F}(\mathcal{H})$. Kako je $\mathbb{F}(\mathcal{H})$ u normi $\|\cdot\|_1$ gust potprostor od $\mathbb{B}_1(\mathcal{H})$ te kako su funkcionali ψ i ψ_S ograničeni, zaključujemo da je $\psi = \psi_S$. □

4.7 Zadaci

U svim zadacima možete pretpostaviti da je $\mathcal{H}$ beskonačnodimenzionalan separabilan Hilbertov prostor.

Zadatak 4.7.1. Neka su $P, Q \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ dva projektora.

(i) Dokažite da je $P + Q$ projektor ako i samo ako vrijedi $\operatorname{ran} P \perp \operatorname{ran} Q$.

(ii) Dokažite da je PQ projektor ako i samo ako vrijedi $PQ = QP$.

(iii) Dokažite da je $P + Q - PQ$ projektor ako i samo ako vrijedi $PQ = QP$.

Nadalje, u dijelovima (i) i (ii) odredite $\ker(P + Q)$ i $\operatorname{ran}(P + Q)$, a u dijelu (iii) odredite $\ker(P + Q - PQ)$ i $\operatorname{ran}(P + Q - PQ)$.

Zadatak 4.7.2. Neka je $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ bilateralni šift, tj. $U : e_n \mapsto e_{n+1}$ $(n \in \mathbb{Z})$, gdje je (e_n) standardna ortonormitana baza za $\ell^2(\mathbb{Z})$.

(i) Dokažite da je U unitaran operator i odredite U^*.

(ii) Nadalje, nađite neki invarijantan potprostor od U koji ne reducira U.

Zadatak 4.7.3. Neka je $S \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ unilateralni šift.

(i) Dokažite da je S ireducibilan operator.

(ii) Dokažite da S nema drugi korijen u $\mathbb{B}(\mathcal{H})$.

Zadatak 4.7.4. Pretpostavimo da su $V, W \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ parcijalne izometrije takve da je $\|V - W\| < 1$. Dokažite da tada vrijedi $\dim \operatorname{ran} V = \dim \operatorname{ran} W$, $\dim(\operatorname{ran} V)^\perp = \dim(\operatorname{ran} W)^\perp$ i $\dim \ker V = \dim \ker W$.

Zadatak 4.7.5. Dokažite da je skup svih nenul parcijalnih izometrija u $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ u normi zatvoren i nepovezan podskup od $\mathbb{B}(\mathcal{H})$. Vrijedi li ista tvrdnja i za skup svih izometrija u $\mathbb{B}(\mathcal{H})$?

Zadatak 4.7.6. Nađite nužan i dovoljan uvjet na kompaktan podskup $K \subseteq \mathbb{C}$ takav da postoji parcijalna izometrija $V \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ sa spektrom K.

Zadatak 4.7.7. Pretpostavimo da je $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ operator s polarnom dekompozicijom $T = V|T|$. Dokažite:

(i) V je izometrija ako i samo ako je T injektivan operator.

(ii) V je koizometrija ako i samo ako je $\operatorname{ran} T$ gust potprostor od $\mathcal{H}$.

Zadatak 4.7.8. Za $n \geq 2$ definirajmo operator $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ s $Te_k = e_{k+1}$ za $1 \leq k \leq n-1$ i $Te_n = 0$, gdje je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ standardna ortonormirana baza za $\mathbb{C}^n$. Odredite polarnu dekompoziciju od T.

Zadatak 4.7.9. Neka su $\xi, \eta \in \mathcal{H}$.

(i) Odredite polarnu dekompoziciju operatora $\xi \otimes \eta$.

(ii) Dokažite da je $\|\xi \otimes \eta\| = \|\xi \otimes \eta\|_1 = \|\xi \otimes \eta\|_2 = \|\xi\| \|\eta\|$.

Zadatak 4.7.10. Neka je $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$. Dokažite:

(i) Ako je $\lambda \in \sigma_p(T)$, tada je $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*) \cup \sigma_r(T^*)$.

(ii) Ako je $\lambda \in \sigma_r(T)$, tada je $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$.

Zadatak 4.7.11. Dokažite Propoziciju 4.3.2.

Zadatak 4.7.12. Dokažite Lemu 4.4.7.

Zadatak 4.7.13. Neka je $T \in \mathbb{K}(\mathcal{H})$. Dokažite da je svaki zatvoren potprostor $\mathcal{K} \leq \mathcal{H}$ koji je sadržan u slici od T nužno konačnodimenzionalan.

Zadatak 4.7.14. Neka je $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$. Dokažite da je operator T kompaktan ako i samo ako vrijedi $Te_n \xrightarrow{s} 0$ za svaku ortonormiranu bazu (e_n) za $\mathcal{H}$. Vrijedi li ista tvrdnja ukoliko izraz "za svaku" zamijenimo izrazom "za neku "?

Zadatak 4.7.15. Ako je $S \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ unilateralni šift, izračunajte

$$d(S, \mathbb{K}(\mathcal{H})) = \inf\{\|S - K\| : \ K \in \mathbb{K}(\mathcal{H})\}.$$

Zadatak 4.7.16. Pretpostavimo da je $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ operator takav da je $\ker T^*$ konačnodimenzionalan potprostor od $\mathcal{H}$. Dokažite da je slika od T zatvorena.

Zadatak 4.7.17. Pretpostavimo da su $S, T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ operatori takvi da operator $TST - T$ ima zatvorenu sliku. Dokažite da tada i operator T ima zatvorenu sliku.

Zadatak 4.7.18. Neka su $T \in \mathbf{F}(\mathcal{H})$ i $R \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ operatori takvi da vrijedi $T + R \in \mathbf{F}_0(\mathcal{H})$. Dokažite da za svaki pseudoinverz S operatora T vrijedi $I + SR \in \mathbf{F}_0(\mathcal{H})$.

Zadatak 4.7.19. Neka je $S \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ unilateralni šift. Dokažite da je slika od S u Calkinovoj algebri $\mathbf{C}(\mathcal{H})$ normalan element, ali da ne postoji normalan operator $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ takav da je $S - T$ kompaktan operator.

Zadatak 4.7.20. Ako je A unitalna C^*-algebra, dokažite da preslikavanje $a \mapsto \omega(a) = a|a|^{-1}$ definira deformacionu retrakciju s $A^\times$ na $\mathcal{U}(A)$.

Zadatak 4.7.21. Dokažite Propoziciju 4.6.1.

Zadatak 4.7.22. Dokažite dio (vi) Teorema 4.6.4.

Zadatak 4.7.23. Dokažite dio (iv) Teorema 4.6.8.

Zadatak 4.7.24. Neka je $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$. Dokažite da je operator T nuklearan ako i samo ako vrijedi $\sum_{e\in\mathcal{E}} |\langle Te, e\rangle| < \infty$ za svaku ortonormiranu bazu $\mathcal{E}$ za $\mathcal{H}$. Vrijedi li ista tvrdnja ukoliko izraz "za svaku" zamijenimo izrazom "za neku "?

Zadatak 4.7.25. Ako je $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$, dokažite da je T nuklearan operator ako i samo ako su $\mathrm{Re}\, T$ i $\mathrm{Im}\, T$ nuklerani operatori. Nadalje, ako je T hermitski, dokažite da je T nuklearan ako i samo ako su T_+ i T_- nuklearni operatori. Vrijede li analogne tvrdnje za Hilbert-Schmidtove operatore?

Bibliografija

[1] W. Arveson, *An Invitation to $C^*-algebras$*, Springer-Verlag, 1976.

[2] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, 2nd ed., Springer-Verlag, 1990.

[3] J. B. Conway, *A Course in Operator Theory*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2000.

[4] K. R. Davidson, *$C^*-algebras$ by Examples*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1996.

[5] J. Dixmier, *$C^*-algebras$*, North−Holland Publishing Company, Amsterdam − New York − Oxford, 1977.

[6] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, 2nd ed., John Wiley & Sons, 1999.

[7] G. B. Folland, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, 2nd ed., Taylor & Francis, 2015

[8] R. V. Kadison, John R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Volume I: Elementary Theory*, AMS, Providence, 1997.

[9] R. V. Kadison, John R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Volume II: Advanced Theory*, AMS, Providence, 1997.

[10] E. Kaniuth, *A Course in Commutative Banach Algebras*, Springer-Verlag, 2009.

[11] H. Kraljević, *Kompaktni operatori*, PMF-Matematički odsjek, Zagreb, 2008. (interna skripta) `https://web.math.pmf.unizg.hr/~hrk/nastava/2007-08/kompaktni_2007_8.pdf`

[12] H. Kraljević, *Operatorske algebre*, PMF-Matematički odsjek, Zagreb, 2011. (interna skripta) `https://web.math.pmf.unizg.hr/~hrk/nastava/2010-11/Op_alg.pdf`

[13] H. Kraljević, *Von Neumannove algebre*, PMF-Matematički odsjek, Zagreb, 2012. (interna skripta) `https://web.math.pmf.unizg.hr/~hrk/nastava/2011-12/vNa.pdf`

[14] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer-Verlag, 1998.

[15] G. J. Murphy, *C^*-Algebras and Operator Theory*, Academic Press, San Diego, 1990.

[16] G. K. Pedersen, *Analysis Now*, Springer-Verlag, 1989.

[17] M. Rørdam, F. Larsen, N. J. Laustsen, *An introduction to K-theory for C^*-algebras*, Cambridge University Press, 2000.

[18] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw - Hill Book Company, New York, 1973.

[19] N. E. Wegge-Olsen, *K-theory and C^*-algebras. A friendly approach*, Oxford University Press, 1993.

[20] K. Zhu, *An Introduction to Operator Algebras*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, 1993.