Jordanove algebre

od matričnih primjera do formalno realne klasifikacije

Ilja Gogić
PMF-MO, Sveučilište u Zagrebu

Sažetak

Jordanove algebre nastale su iz pokušaja algebarskog opisa opservabli u kvantnoj mehanici. Osnovni motiv dolazi iz činjenice da produkt dviju hermitskih matrica općenito nije hermitska matrica, dok simetrizirani produkt jest. U asocijativnoj algebri taj se produkt pojavljuje u rastavu

$$ab = \frac{1}{2}(ab + ba) + \frac{1}{2}(ab - ba),$$

pri čemu antisimetrični dio vodi do Liejevog komutatora, a simetrični dio do Jordanovog produkta. Cilj ovih predavanja je uvesti Jordanove algebre prirodnim putem, od matričnih primjera do formalno realne klasifikacije. U prvom dijelu uvodimo osnovne pojmove, specijalne Jordanove algebre, kvadratne operatore, Peirceovu dekompoziciju i strukturu matričnih Jordanovih algebri. U drugom dijelu fokusiramo se na konačnodimenzionalne proste formalno realne Jordanove algebre i Jordan–von Neumann–Wignerovu klasifikaciju: svaka takva algebra, do izomorfizma, pripada jednoj od standardnih klasa koje obuhvaćaju realne simetrične, kompleksne hermitske i kvaternionske hermitske matrične modele, spin faktore te iznimnu Albertovu algebru, odnosno algebru hermitskih 3×3 matrica nad oktonionima.

Ključne riječi: Jordanova algebra, specijalna Jordanova algebra, Peirceova dekompozicija, formalno realna Jordanova algebra, Jordan–von Neumann–Wignerova klasifikacija.

Sadržaj

1 Preliminarni dio **2**
1.1 Osnovni pojmovi o algebrama 2
1.2 Osnove o matričnoj algebri $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ 9
1.3 Kvaternioni i oktonioni 12

2 Jordanove algebre **18**
2.1 Definicija, motivacija i osnovni identiteti 18
2.2 Potencijska asocijativnost Jordanovih algebri 22
2.3 Jordanova algebra $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})^+$ 24
2.4 Peirceova dekompozicija za jedan idempotent 28

3 Formalno realne proste Jordanove algebre **31**
3.1 Formalna realnost i realni trag 31
3.2 Hermitske matrične Jordanove algebre 32
3.3 Spin faktori 34
3.4 Albertova algebra $H_3(\mathbb{O})$ 39
3.5 Jordan–von Neumann–Wignerov klasifikacijski teorem 41

4 Zadaci **42**

1 Preliminarni dio

Najprije se prisjetimo osnovne terminologije. *Polje* je komutativan prsten s jedinicom $1 \neq 0$ u kojem svaki nenul element ima multiplikativni inverz. Skup svih nenul elemenata polja $\mathbb{F}$ označavamo s $\mathbb{F}^\times := \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

Ako je $\mathbb{F}$ polje, njegova *karakteristika*, u oznaci $\operatorname{char} \mathbb{F}$, jest najmanji prirodan broj m takav da je

$$\underbrace{1 + \cdots + 1}_{m \text{ puta}} = 0$$

u polju $\mathbb{F}$, ako takav broj postoji. Ako takav broj ne postoji, kažemo da je $\mathbb{F}$ karakteristike 0. Na primjer, $\operatorname{char} \mathbb{Q} = \operatorname{char} \mathbb{R} = \operatorname{char} \mathbb{C} = 0$, dok je za prost broj p, $\operatorname{char}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = p$.

Tijekom ovih predavanja, ako nije drukčije naglašeno, $\mathbb{F}$ označava polje za koje vrijedi $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$. To znači da u $\mathbb{F}$ možemo dijeliti s 2, pa izrazi poput $\frac{1}{2}(ab + ba)$ imaju smisla. Upravo se takvi simetrizirani produkti prirodno pojavljuju u teoriji Jordanovih algebri. Čitatelji koji nisu upoznati s općim poljima mogu, bez gubitka glavne ideje, misliti na slučajeve $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Posebno ćemo naglasiti situacije u kojima promatramo realne algebre izgrađene iz kvaterniona ili oktoniona.

Na vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$ koristimo standardni skalarni produkt. Ako su $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, \ldots, y_n)$ elementi od $\mathbb{R}^n$, tada pišemo

$$\langle x, y \rangle := \sum_{r=1}^{n} x_r y_r.$$

Pripadnu euklidsku normu označavamo s $\| \cdot \|$, dakle

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\sum_{r=1}^{n} x_r^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Na prostoru $\mathbb{R}^3$ koristimo i standardni vektorski produkt. Za $x = (x_1, x_2, x_3)$ i $y = (y_1, y_2, y_3)$ on je dan formulom

$$x \times y := (x_2 y_3 - x_3 y_2,\ x_3 y_1 - x_1 y_3,\ x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

U odnosu na standardnu pozitivno orijentiranu bazu (e_1, e_2, e_3) za $\mathbb{R}^3$ vrijedi

$$e_1 \times e_2 = e_3, \qquad e_2 \times e_3 = e_1, \qquad e_3 \times e_1 = e_2.$$

1.1 Osnovni pojmovi o algebrama

Definicija 1.1. *Algebra nad poljem* $\mathbb{F}$ je vektorski prostor $\mathcal{A}$ nad $\mathbb{F}$ s bilinearnim preslikavanjem

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \qquad (a, b) \mapsto ab,$$

koje zovemo *množenje* u algebri $\mathcal{A}$.

Kažemo da je $\mathcal{A}$ *unitalna* ako postoji element $1 \in \mathcal{A}$ takav da je

$$1a = a1 = a, \qquad \text{za sve } a \in \mathcal{A}.$$

Takav element 1 zove se *jedinica* algebre $\mathcal{A}$. Jedinica je, ako postoji, jedinstvena.

Definicija 1.2. Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $a \in \mathcal{A}$. Element $b \in \mathcal{A}$ zove se *lijevi inverz* od a ako je $ba = 1$, a *desni inverz* od a ako je $ab = 1$. Ako vrijedi

$$ab = ba = 1,$$

tada se b zove *obostrani inverz* od a. Element a zove se *invertibilan* ako ima obostrani inverz.

U općoj neasocijativnoj algebri obostrani inverz ne mora biti jedinstven. Zato oznaku a^{-1} koristimo samo kada je iz konteksta jasno da je inverz jedinstven.

Lema 1.3. *U asocijativnoj unitalnoj algebri obostrani inverz, ako postoji, je jedinstven.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{A}$ asocijativna algebra s jedinicom i neka su $b, c \in \mathcal{A}$ obostrani inverzi elementa $a \in \mathcal{A}$. Tada je $ba = 1$ i $ac = 1$. Zbog asocijativnosti vrijedi

$$b = b1 = b(ac) = (ba)c = 1c = c.$$

Dakle $b = c$. $\square$

Definicija 1.4. Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra nad poljem $\mathbb{F}$. Za $a \in \mathcal{A}$ definiramo linearne operatore lijevog i desnog množenja, redom s

$$\mathcal{L}_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \qquad \mathcal{L}_a(x) := ax,$$

i

$$\mathcal{R}_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \qquad \mathcal{R}_a(x) := xa.$$

Algebra $\mathcal{A}$ zove se *algebra s dijeljenjem* ako je $\mathcal{A} \neq 0$ i ako su za svaki $a \in \mathcal{A}$, $a \neq 0$, operatori $\mathcal{L}_a$ i $\mathcal{R}_a$ bijektivni.

Napomena 1.5. Ova definicija algebre s dijeljenjem prikladna je i za neasocijativne algebre. Ona znači da za svaki $a \neq 0$ i svaki $b \in \mathcal{A}$ jednadžbe

$$ax = b \qquad \text{i} \qquad ya = b$$

imaju jedinstvena rješenja $x, y \in \mathcal{A}$. U asocijativnim algebrama to je ekvivalentno uobičajenom uvjetu da je svaki nenul element invertibilan. U neasocijativnim algebrama treba biti oprezniji: lijevi i desni inverzi ne moraju se u potpunoj općenitosti ponašati kao u asocijativnom slučaju. Klasičan neasocijativan primjer algebre s dijeljenjem je algebra oktoniona $\mathbb{O}$.

Definicija 1.6. Neka je $\mathcal{A}$ algebra nad poljem $\mathbb{F}$. *Podalgebra* od $\mathcal{A}$ je vektorski potprostor $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ koji je zatvoren s obzirom na množenje naslijeđeno iz $\mathcal{A}$, tj. za koji vrijedi

$$b_1 b_2 \in \mathcal{B}, \qquad \text{za sve } b_1, b_2 \in \mathcal{B}.$$

Ako je $\mathcal{A}$ unitalna, ne zahtijevamo da podalgebra sadrži jedinicu od $\mathcal{A}$, osim ako to posebno naglasimo. Podalgebra generirana skupom $S \subseteq \mathcal{A}$ je najmanja podalgebra od $\mathcal{A}$ koja sadrži S, odnosno presjek svih podalgebri od $\mathcal{A}$ koje sadrže S.

Definicija 1.7. Neka je $\mathcal{A}$ algebra nad poljem $\mathbb{F}$. *Komutator* u algebri $\mathcal{A}$ je bilinearno preslikavanje

$$[\cdot,\cdot]:\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A},\qquad (a,b)\mapsto[a,b],$$

definirano formulom

$$[a,b]:=ab-ba,\qquad a,b\in\mathcal{A}.$$

Komutator je antikomutativan, tj. za sve $a,b\in\mathcal{A}$ vrijedi

$$[a,b]=-[b,a].$$

Kažemo da elementi $a,b\in\mathcal{A}$ *komutiraju* ako je $[a,b]=0$, odnosno ako je $ab=ba$. Algebra $\mathcal{A}$ zove se *komutativna* ako svaka dva njezina elementa komutiraju, tj. ako vrijedi

$$ab=ba,\qquad \text{za sve } a,b\in\mathcal{A}.$$

Definicija 1.8. Neka je $\mathcal{A}$ algebra nad poljem $\mathbb{F}$. *Asocijator* u algebri $\mathcal{A}$ je trilinearno preslikavanje

$$\langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle:\mathcal{A}\times\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A},\qquad (a,b,c)\mapsto\langle a,b,c\rangle,$$

definirano formulom

$$\langle a,b,c\rangle:=(ab)c-a(bc),\qquad \text{za sve } a,b,c\in\mathcal{A}.$$

- Kažemo da je algebra $\mathcal{A}$ *asocijativna* ako je $\langle a,b,c\rangle=0$ za sve $a,b,c\in\mathcal{A}$, tj. ako vrijedi
$$(ab)c=a(bc),\qquad \text{za sve } a,b,c\in\mathcal{A}.$$
- Kažemo da je algebra $\mathcal{A}$ *alternativna* ako vrijedi $\langle a,a,b\rangle=\langle b,a,a\rangle=0$ za sve $a,b\in\mathcal{A}$, tj. ako vrijedi
$$(aa)b=a(ab)\qquad \text{i}\qquad (ba)a=b(aa),\qquad \text{za sve } a,b\in\mathcal{A}.$$
- Kažemo da je algebra $\mathcal{A}$ *potencijski asocijativna* ako je za svaki $a\in\mathcal{A}$ podalgebra generirana elementom a asocijativna.

Napomena 1.9. Ako je algebra $\mathcal{A}$ potencijski asocijativna, tada su za svaki fiksni element $a\in\mathcal{A}$ potencije $a^2,a^3,\dots$ jednoznačno određene i vrijedi

$$a^m a^n=a^{m+n},\qquad \text{za sve } m,n\geq 1.$$

To je upravo razlog zbog kojeg u takvim algebrama možemo govoriti o polinomima u jednom elementu bez dodatnog navođenja zagrada.

Asocijativnost je najjače od ovih svojstava. Svaka asocijativna algebra je alternativna, jer su tada svi asocijatori jednaki nuli. Nadalje, svaka alternativna algebra je potencijski asocijativna. To slijedi iz Artinovog[1] teorema za alternativne algebre, prema kojem je svaka podalgebra generirana s dva elementa alternativne algebre asocijativna; vidjeti [14]. Posebno, podalgebra generirana jednim elementom je tada asocijativna.

Dakle, vrijedi lanac implikacija

$$\text{asocijativna}\quad\Longrightarrow\quad\text{alternativna}\quad\Longrightarrow\quad\text{potencijski asocijativna}.$$

Obratne implikacije općenito ne vrijede.

[1] Emil Artin (1898.–1962.), austrijsko-američki matematičar.

Primjer 1.10. Navodimo nekoliko osnovnih primjera algebri.

(a) Svako polje $\mathbb{F}$ možemo promatrati kao asocijativnu algebru nad samim sobom. Zbrajanje i množenje u algebri tada su uobičajene operacije u polju $\mathbb{F}$, a množenje skalarom podudara se s množenjem elemenata polja.

(b) Općenitije, ako je $\mathbb{K}$ potpolje od $\mathbb{F}$, tada $\mathbb{F}$ možemo promatrati kao asocijativnu $\mathbb{K}$-algebru. Množenje u algebri je množenje elemenata polja $\mathbb{F}$, dok se skalari uzimaju iz potpolja $\mathbb{K}$. Posebno, $\mathbb{C}$ možemo promatrati kao $\mathbb{C}$-algebru dimenzije 1, ali i kao $\mathbb{R}$-algebru dimenzije 2.

(c) Skup svih polinoma u jednoj varijabli nad poljem $\mathbb{F}$ označavamo s $\mathbb{F}[X]$. S obzirom na uobičajeno zbrajanje, množenje polinoma i množenje skalarom, $\mathbb{F}[X]$ je unitalna komutativna asocijativna $\mathbb{F}$-algebra. Jedinica je konstantni polinom 1, a invertibilni elementi u $\mathbb{F}[X]$ upravo su nenul konstantni polinomi.

(d) Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Skup svih $\mathbb{F}$-linearnih operatora $V \to V$ označavamo s $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. Dakle, $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ sastoji se od svih preslikavanja $T : V \to V$ takvih da je

$$T(\lambda v + \mu w) = \lambda T(v) + \mu T(w), \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{F}, \quad v, w \in V.$$

S obzirom na uobičajene operacije

$$(\lambda T)(v) := \lambda T(v), \qquad (S+T)(v) := S(v) + T(v), \qquad (ST)(v) := S(T(v)),$$

skup $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ je asocijativna unitalna $\mathbb{F}$-algebra. Jedinica je identiteta id_V. Ako je $\dim_{\mathbb{F}} V > 1$, tada algebra $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ nije komutativna.

(e) Neka je $\mathcal{A}$ algebra nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $n \in \mathbb{N}$. Skup svih $n \times n$ matrica s elementima iz $\mathcal{A}$ označavamo s $\mathrm{M}_n(\mathcal{A})$. Na njemu definiramo uobičajene matrične operacije

$$\lambda[a_{ij}] := [\lambda a_{ij}], \qquad [a_{ij}] + [b_{ij}] := [a_{ij} + b_{ij}], \qquad [a_{ij}][b_{ij}] := \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right].$$

Tako $\mathrm{M}_n(\mathcal{A})$ postaje algebra nad $\mathbb{F}$. Ako je $\mathcal{A}$ asocijativna, tada je i $\mathrm{M}_n(\mathcal{A})$ asocijativna. Ako je $\mathcal{A}$ unitalna, tada je jedinica u $\mathrm{M}_n(\mathcal{A})$ matrica

$$I_n := \mathrm{diag}(1_{\mathcal{A}}, \ldots, 1_{\mathcal{A}}).$$

Posebno, za $\mathcal{A} = \mathbb{F}$ dobivamo punu matričnu algebru $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$.

(f) Prostor $\mathbb{R}^3$ uz vektorski produkt

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad (u, v) \mapsto u \times v,$$

jednostavan je primjer neasocijativne algebre. Bilinearnost vektorskog produkta daje strukturu algebre nad $\mathbb{R}$. Ta algebra nije asocijativna. Naime, za standardne bazne vektore e_1, e_2, e_3 vrijedi

$$(e_1 \times e_2) \times e_2 = e_3 \times e_2 = -e_1, \qquad e_1 \times (e_2 \times e_2) = e_1 \times 0 = 0.$$

Dakle,

$$(e_1 \times e_2) \times e_2 \neq e_1 \times (e_2 \times e_2).$$

Definicija 1.11. Neka je $\mathcal{A}$ algebra nad poljem $\mathbb{F}$.

- Za element $p \in \mathcal{A}$ kažemo da je *idempotent* ako je $p^2 := pp = p$. Ako je $\mathcal{A}$ unitalna, idempotent p zove se *netrivijalan* ako je $p \neq 0$ i $p \neq 1$.
- Pretpostavimo dodatno da je $\mathcal{A}$ potencijski asocijativna. Za element $x \in \mathcal{A}$ kažemo da je *nilpotentan* ako postoji $n \geq 1$ takav da je $x^n = 0$. Najmanji takav n zove se *indeks nilpotentnosti* elementa x.

Definicija 1.12. Neka je $\mathcal{A}$ algebra nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}$ vektorski potprostor.

- $\mathcal{I}$ je *lijevi ideal* od $\mathcal{A}$ ako za sve $a \in \mathcal{A}$ i $x \in \mathcal{I}$ vrijedi $ax \in \mathcal{I}$.
- $\mathcal{I}$ je *desni ideal* od $\mathcal{A}$ ako za sve $x \in \mathcal{I}$ i $a \in \mathcal{A}$ vrijedi $xa \in \mathcal{I}$.
- $\mathcal{I}$ je *obostrani ideal*, ili kraće *ideal*, od $\mathcal{A}$ ako je istodobno lijevi i desni ideal.

Svaka algebra $\mathcal{A}$ ima *trivijalne obostrane ideale* 0 i $\mathcal{A}$. Algebra $\mathcal{A}$ zove se *prosta algebra* ako produkt u $\mathcal{A}$ nije identički jednak nuli i ako su to njezini jedini obostrani ideali. Drugim riječima, zahtijevamo da postoje $a, b \in \mathcal{A}$ takvi da je $ab \neq 0$. Ako je $\mathcal{A}$ unitalna i $\mathcal{A} \neq 0$, taj je uvjet automatski ispunjen, jer za svaki nenul element $a \in \mathcal{A}$ vrijedi $1a = a \neq 0$.

Primjer 1.13. Navodimo nekoliko osnovnih primjera ideala.

(a) U komutativnoj algebri lijevi, desni i obostrani ideali isti su pojam. U algebri polinoma $\mathbb{F}[X]$ osnovni primjeri ideala dobivaju se fiksiranjem jednog polinoma. Ako je $p \in \mathbb{F}[X]$, tada je

$$p\mathbb{F}[X] = \{pq : q \in \mathbb{F}[X]\}$$

ideal u $\mathbb{F}[X]$, jer je zatvoren na linearne kombinacije i na množenje proizvoljnim polinomom iz $\mathbb{F}[X]$. Posebno važan slučaj nastaje za $p = X - \alpha$, gdje je $\alpha \in \mathbb{F}$. Tada $(X - \alpha)\mathbb{F}[X]$ ima jednostavno značenje: to je ideal svih polinoma koji se poništavaju u točki α. Drugim riječima,

$$(X - \alpha)\mathbb{F}[X] = \{f \in \mathbb{F}[X] : f(\alpha) = 0\}.$$

To slijedi iz činjenice da je $f(\alpha) = 0$ upravo uvjet da polinom $X - \alpha$ dijeli f.

(b) U nekomutativnim algebrama lijevi i desni ideali ne moraju se podudarati. To se vidi već u algebri $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, gdje je V vektorski prostor dimenzije barem 2. Neka je W pravi netrivijalni potprostor od V.

Skup

$$\mathcal{R}_W := \{T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) : \mathrm{Im}\, T \subseteq W\}$$

je desni ideal: ako je $T \in \mathcal{R}_W$ i $A \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, tada je $\mathrm{Im}(TA) \subseteq \mathrm{Im}\, T \subseteq W$. Međutim, općenito nije lijevi ideal. Naime, za $W = \mathbb{F}e_1$ možemo uzeti $T(e_1) = e_1$, $T(e_2) = 0$ i $A(e_1) = e_2$. Tada je $T \in \mathcal{R}_W$, ali $(AT)(e_1) = e_2 \notin W$.

Slično,

$$\mathcal{L}_W := \{T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) : W \subseteq \mathrm{Ker}\, T\}$$

je lijevi ideal, ali općenito nije desni ideal. Ako je $W = \mathbb{F}e_1$, $T(e_1) = 0$, $T(e_2) = e_2$ i $A(e_1) = e_2$, tada je $T \in \mathcal{L}_W$, ali $(TA)(e_1) = e_2 \neq 0$.

Ovi primjeri pokazuju da jednostrani ideali mogu postojati i u algebrama bez netrivijalnih obostranih ideala. Ako je V konačnodimenzionalan, tada je $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ prosta algebra; nakon izbora baze to je upravo prostost pune matrične algebre, koju ćemo dokazati u Propoziciji 1.21.

Definicija 1.14. Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ algebre nad istim poljem $\mathbb{F}$.

- Za preslikavanje $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ kažemo da je *homomorfizam algebri* ako je $\mathbb{F}$-linearno i multiplikativno, tj. ako vrijedi
$$\phi(\lambda a + \mu b) = \lambda\phi(a) + \mu\phi(b),$$
$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$$
za sve $a, b \in \mathcal{A}$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$.

- Injektivni homomorfizmi zovu se *monomorfizmi*, surjektivni homomorfizmi *epimorfizmi*, a bijektivni homomorfizmi *izomorfizmi*. Izomorfizmi $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ zovu se *automorfizmi* algebre $\mathcal{A}$.

- Za algebre $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ kažemo da su *izomorfne* i pišemo $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ ako postoji izomorfizam $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

Napomena 1.15. Neka je $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfizam algebri.

- Slika $\mathrm{Im}\,\phi$ je podalgebra od $\mathcal{B}$. Doista, iz linearnosti slijedi da je $\mathrm{Im}\,\phi$ vektorski potprostor od $\mathcal{B}$, a iz multiplikativnosti slijedi da je zatvoren s obzirom na produkt, jer za $u = \phi(a)$ i $v = \phi(b)$ vrijedi
$$uv = \phi(a)\phi(b) = \phi(ab) \in \mathrm{Im}\,\phi.$$

- Jezgra $\ker\phi$ je obostrani ideal u $\mathcal{A}$. Doista, $\ker\phi$ je vektorski potprostor od $\mathcal{A}$, a ako je $x \in \ker\phi$ i $a \in \mathcal{A}$, tada je
$$\phi(ax) = \phi(a)\phi(x) = 0, \qquad \phi(xa) = \phi(x)\phi(a) = 0.$$
Dakle, $ax, xa \in \ker\phi$.

Napomena 1.16. Izomorfnost je relacija ekvivalencije na klasi svih $\mathbb{F}$-algebri: kompozicija izomorfizama opet je izomorfizam, a inverz izomorfizma također je izomorfizam. Izomorfizam čuva svu algebarsku strukturu, odnosno linearne kombinacije i produkt, pa se sva svojstva izražena tim operacijama prenose s jedne algebre na drugu. Zato se izomorfne algebre često poistovjećuju; razlikuju se samo u izboru oznaka za elemente.

Pri radu s nekomutativnim algebrama često se pojavljuju i preslikavanja koja ne čuvaju redoslijed množenja, nego ga obrću. Takva preslikavanja nisu homomorfizmi u uobičajenom smislu, ali su jednako prirodna: ona prepoznaju istu multiplikativnu strukturu gledanu s obrnutim redoslijedom množenja.

Definicija 1.17. Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ algebre nad istim poljem $\mathbb{F}$. Za preslikavanje $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ kažemo da je *antihomomorfizam algebri* ako je $\mathbb{F}$-linearno i antimultiplikativno, tj. ako vrijedi
$$\theta(ab) = \theta(b)\theta(a), \qquad \text{za sve } a, b \in \mathcal{A}.$$
Bijektivni antihomomorfizam zove se *antiizomorfizam*. Antiizomorfizam $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ zove se *antiautomorfizam* algebre $\mathcal{A}$.

Definicija 1.18. *Centar* asocijativne algebre $\mathcal{A}$ je skup

$$Z(\mathcal{A}) := \{a \in \mathcal{A} : ax = xa, \text{ za svaki } x \in \mathcal{A}\}.$$

Elementi centra zovu se *centralni elementi.* Ako je $\mathcal{A}$ unitalna, tada je $1 \in Z(\mathcal{A})$. Algebra $\mathcal{A}$ je komutativna ako i samo ako je $Z(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

Napomena 1.19. Centar ovdje definiramo samo za asocijativne algebre. U općim neasocijativnim algebrama pojam centra zahtijeva dodatni oprez: nije dovoljno tražiti samo $ax = xa$, nego se često dodatno zahtijeva kompatibilnost s različitim načinima postavljanja zagrada u produktu. Zato u ovom preliminarnom dijelu ne uvodimo opći centar neasocijativne algebre.

Primjer 1.20. Neka je $\mathcal{A}$ unitalna asocijativna algebra nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $a \in \mathcal{A}$ invertibilan. Tada preslikavanje

$$\mathrm{Ad}_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \qquad \mathrm{Ad}_a(x) = axa^{-1},$$

definira automorfizam algebre $\mathcal{A}$. Doista, asocijativnost daje

$$\mathrm{Ad}_a(xy) = a(xy)a^{-1} = (axa^{-1})(aya^{-1}), \qquad x, y \in \mathcal{A},$$

a inverz preslikavanja Ad_a je $\mathrm{Ad}_{a^{-1}}$. Automorfizmi tog oblika zovu se *unutarnji automorfizmi* algebre $\mathcal{A}$.

Nadalje, dva invertibilna elementa $a, b \in \mathcal{A}$ induciraju isti unutarnji automorfizam ako i samo ako je $b^{-1}a$ invertibilan centralan element. Naime, invertibilni elementi algebre $\mathcal{A}$ čine grupu s obzirom na množenje, pa je $b^{-1}a$ invertibilan. Nadalje, jednakost $\mathrm{Ad}_a = \mathrm{Ad}_b$ ekvivalentna je uvjetu

$$axa^{-1} = bxb^{-1}, \qquad x \in \mathcal{A},$$

što je pak ekvivalentno jednakosti

$$b^{-1}ax = xb^{-1}a, \qquad x \in \mathcal{A}.$$

Dakle, $b^{-1}a$ mora biti centralan. Obratno, također slijedi iz gornjih jednakosti.

Posebno, ako je $Z(\mathcal{A}) = \mathbb{F}1$, tada dva invertibilna elementa induciraju isti unutarnji automorfizam ako i samo ako se razlikuju za nenul skalarni faktor.

Pretpostavimo sada dodatno da je karakteristika polja $\mathbb{F}$ različita od 2. Uz komutator, u asocijativnoj algebri prirodno se pojavljuje i simetrični produkt

$$a \circ b := \frac{1}{2}(ab + ba). \tag{1.1}$$

Tada za sve $a, b \in \mathcal{A}$ vrijedi rastav

$$ab = a \circ b + \frac{1}{2}[a, b]. \tag{1.2}$$

Produkt $[\cdot, \cdot]$ je antikomutativan, a produkt $\circ$ iz (1.1) je komutativan. Međutim, nijedan od ta dva produkta općenito nije asocijativan. Upravo zato oni vode do novih, neasocijativnih struktura: komutator vodi do Liejevih[2] algebri, a simetrični produkt do Jordanovih[3] algebri. Formula (1.2) pokazuje da se asocijativni produkt rastavlja na ta dva prirodna dijela. Ako je $\mathcal{A}$ komutativna, tada je $[a, b] = 0$ za sve $a, b \in \mathcal{A}$, pa se asocijativni produkt podudara sa simetričnim produktom.

[2]Marius Sophus Lie (1842.–1899.), norveški matematičar.
[3]Ernst Pascual Jordan (1902.–1980.), njemački fizičar i matematičar.

1.2 Osnove o matričnoj algebri $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$

Neka je $n \geq 1$. Prema Primjeru 1.10 (e), $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ je unitalna asocijativna algebra nad $\mathbb{F}$. Jedinica u $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ je jedinična matrica I_n, koju ćemo često označavati kraće s I.

Za $1 \leq i, j \leq n$ neka je E_{ij} matrica koja na mjestu (i, j) ima 1, a na svim ostalim mjestima 0. Matrice E_{ij} zovu se *matrične jedinice*. Njihovi produkti zadovoljavaju relacije

$$E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}, \tag{1.3}$$

gdje je δ_{jk} Kroneckerov[4] simbol. Relacije (1.3) koristit ćemo u svim kasnijim računima s matričnim jedinicama. Iz (1.3) posebno vidimo da su sve matrične jedinice oblika E_{ii} idempotenti u $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, dok su, za $i \neq j$, matrice E_{ij} nilpotentne indeksa 2. Nadalje, očito je familija matričnih jedinica $\{E_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$ baza vektorskog prostora $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, odnosno svaka matrica $X = [x_{ij}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ ima jedinstven zapis

$$X = \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}E_{ij}.$$

Ako je $n \geq 2$, primijetimo da algebra $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ nije komutativna, jer je, na primjer,

$$E_{12}E_{21} = E_{11}, \qquad E_{21}E_{12} = E_{22}.$$

Propozicija 1.21. *Centar algebre* $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ *jednak je* $\mathbb{F}I$. *Nadalje,* $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ *je prosta asocijativna algebra.*

Dokaz. Neka je $X = [x_{ij}] \in Z(\mathrm{M}_n(\mathbb{F}))$. Tada X komutira sa svim matričnim jedinicama. Iz jednakosti $XE_{kk} = E_{kk}X$ slijedi da su svi elementi iz k-tog stupca matrice X, osim eventualno x_{kk}, jednaki nuli, te da su svi elementi iz k-tog retka matrice X, osim eventualno x_{kk}, jednaki nuli. Budući da je k proizvoljan, matrica X je dijagonalna. Ako je $i \neq j$, tada iz jednakosti $XE_{ij} = E_{ij}X$ slijedi $x_{ii} = x_{jj}$. Dakle $X = \lambda I$ za neki $\lambda \in \mathbb{F}$. Obratno, svaka matrica oblika λI očito komutira sa svim matricama iz $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. Zato je

$$Z(\mathrm{M}_n(\mathbb{F})) = \mathbb{F}I.$$

Dokažimo da je $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ prosta. Budući da je $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ unitalna, preostaje pokazati da nema netrivijalnih obostranih ideala. Neka je $\mathcal{I} \neq 0$ obostrani ideal u $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. Neka je $\mathcal{I} \neq 0$ obostrani ideal u $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ i neka je $0 \neq A = [a_{ij}] \in \mathcal{I}$. Odaberimo indekse p, q takve da je $a_{pq} \neq 0$. Za proizvoljne r, s vrijedi

$$E_{rp}AE_{qs} = a_{pq}E_{rs}.$$

Budući da je $\mathcal{I}$ obostrani ideal, lijeva strana pripada $\mathcal{I}$. Kako je $a_{pq} \neq 0$ i $\mathcal{I}$ je vektorski potprostor, slijedi $E_{rs} \in \mathcal{I}$. Dakle $\mathcal{I}$ sadrži sve matrične jedinice. Budući da matrične jedinice čine bazu prostora $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, dobivamo $\mathcal{I} = \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. Prema tome, jedini obostrani ideali algebre $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ su 0 i $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. $\square$

U algebri $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ idempotenti imaju sljedeći jednostavan opis, koji ćemo koristiti u nastavku.

[4] Leopold Kronecker (1823.–1891.), njemački matematičar.

Lema 1.22. *Neka je $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ idempotent, tj. neka je $P^2 = P$. Tada je*

$$\mathbb{F}^n = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Ker} P.$$

Ako je $r = \operatorname{rang} P$, tada postoji $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ takav da je

$$SPS^{-1} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dokaz. Budući da je $P^2 = P$, vrijedi i $(I - P)^2 = I - P$, pa je $I - P$ također idempotent. Za svaki $v \in \mathbb{F}^n$ imamo

$$v = Pv + (I - P)v.$$

Pritom je $Pv \in \operatorname{Im} P$, a $(I - P)v \in \operatorname{Ker} P$, jer je $P(I - P)v = (P - P^2)v = 0$. Dakle, $\mathbb{F}^n = \operatorname{Im} P + \operatorname{Ker} P$.

Suma je direktna. Doista, ako je $w \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Ker} P$, tada je $w = Pu$ za neki $u \in \mathbb{F}^n$ i vrijedi $Pw = 0$. Zato je $w = Pu = P^2u = P(Pu) = Pw = 0$. Prema tome, $\mathbb{F}^n = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Ker} P$.

Neka je $r = \operatorname{rang} P = \dim \operatorname{Im} P$. Izaberimo bazu prostora $\operatorname{Im} P$ i bazu prostora $\operatorname{Ker} P$. Zbog upravo dokazane direktne sume njihova unija je baza prostora $\mathbb{F}^n$. Neka je $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ matrica kojoj su stupci redom vektori te baze. U toj bazi operator P djeluje kao identiteta na $\operatorname{Im} P$ i kao nula na $\operatorname{Ker} P$, pa je

$$T^{-1}PT = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Stavimo li $S = T^{-1}$, dobivamo

$$SPS^{-1} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

što je trebalo dokazati. □

Primjer 1.20 daje prirodnu klasu automorfizama pune matrične algebre: konjugacije invertibilnim matricama. Sljedeći teorem pokazuje da drugih automorfizama nema; to je matrični oblik Skolem[5]–Noetherinovog[6] teorema. Za općenitiji kontekst vidjeti [4].

Teorem 1.23. *Svaki automorfizam asocijativne $\mathbb{F}$-algebre $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ je unutarnji. Preciznije, za svaki takav automorfizam ϕ postoji invertibilna matrica $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ takva da je*

$$\phi(X) = SXS^{-1}, \qquad X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F}). \tag{1.4}$$

Pritom je matrica S određena jedinstveno do na produkt nenul skalarom.

Dokaz. Stavimo $F_{ij} := \phi(E_{ij})$. Budući da je ϕ bijektivan homomorfizam algebre $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ u samu sebe, vrijedi $\phi(I) = I$. Doista, za svaki $Y \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ postoji $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ takav da je $Y = \phi(X)$, pa je

$$\phi(I)Y = \phi(I)\phi(X) = \phi(X) = Y \qquad \text{i} \qquad Y\phi(I) = \phi(X)\phi(I) = \phi(X) = Y.$$

[5]Albert Thoralf Skolem (1887.–1963.), norveški matematičar

[6]Amalie Emmy Noether (1882.–1935.), njemačka matematičarka.

Dakle, $\phi(I)$ je jedinica algebre $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, pa je $\phi(I) = I$.

Budući da ϕ čuva množenje, iz (1.3) slijedi

$$F_{ij}F_{kl} = \phi(E_{ij})\phi(E_{kl}) = \phi(E_{ij}E_{kl}) = \delta_{jk}\phi(E_{il}) = \delta_{jk}F_{il}.$$

Osim toga,

$$F_{11} + \cdots + F_{nn} = \phi(E_{11} + \cdots + E_{nn}) = \phi(I) = I.$$

Dakle, matrice F_{ij} čine novi sustav matričnih jedinica.

Budući da je ϕ injektivna i $E_{11} \neq 0$, vrijedi $F_{11} \neq 0$. Zato je $\operatorname{Im} F_{11} \neq 0$. Odaberimo nenul vektor $u \in \operatorname{Im} F_{11}$ i definirajmo

$$u_i := F_{i1}u, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Budući da je F_{11} idempotent i $u \in \operatorname{Im} F_{11}$, vrijedi $F_{11}u = u$. Ako je $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = 0$, tada množenjem slijeva s F_{1k} dobivamo

$$0 = F_{1k} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_{i1} u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_{1k} F_{i1} u = \alpha_k F_{11} u = \alpha_k u.$$

Kako je $u \neq 0$, slijedi $\alpha_k = 0$. Budući da je k bio proizvoljan, vektori $u_1, \ldots, u_n$ linearno su nezavisni, pa čine bazu prostora $\mathbb{F}^n$.

Neka je $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ matrica koja standardnu bazu šalje u bazu $u_1, \ldots, u_n$, tj. neka je $Se_i = u_i$ za sve i. Tada za sve i, j, k vrijedi

$$F_{ij}u_k = F_{ij}F_{k1}u = \delta_{jk}F_{i1}u = \delta_{jk}u_i.$$

S druge strane,

$$SE_{ij}S^{-1}u_k = SE_{ij}e_k = \delta_{jk}Se_i = \delta_{jk}u_i.$$

Budući da se linearni operatori F_{ij} i $SE_{ij}S^{-1}$ podudaraju na bazi $u_1, \ldots, u_n$, slijedi

$$F_{ij} = SE_{ij}S^{-1}, \qquad 1 \leq i, j \leq n.$$

Kako matrične jedinice čine bazu prostora $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, za svaku matricu $X = \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}E_{ij}$ dobivamo

$$\phi(X) = \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}\phi(E_{ij}) = \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}SE_{ij}S^{-1} = SXS^{-1}.$$

Napokon, iz Primjera 1.20 i Propozicije 1.21 slijedi da je matrica S jedinstvena do na produkt nenul skalarom. □

Štoviše, prostost algebre $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ zajedno s prethodnim teoremom daje sljedeći opis njezinih nenul endomorfizama.

Korolar 1.24. *Svaki nenul homomorfizam asocijativnih $\mathbb{F}$-algebri $\phi : \mathrm{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ je automorfizam. Posebno, ϕ je oblika* (1.4) *za neku matricu $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$.*

Dokaz. Prema Napomeni 1.15, jezgra $\ker \phi$ je obostrani ideal u $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. Budući da je $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ prosta algebra i $\phi \neq 0$, prema Propoziciji 1.21 vrijedi $\ker \phi = 0$. Dakle, ϕ je injektivno linearno preslikavanje.

Prema Teoremu o rangu i defektu, injektivan linearni operator između dva konačnodimenzionalna vektorska prostora iste dimenzije je surjektivan. Zato je ϕ automorfizam asocijativne algebre $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. Sada tvrdnja slijedi iz Teorema 1.23. □

Osnovni primjer antiautomorfizma algebre $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ je *transponiranje*

$$\tau : \mathrm{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{F}), \qquad \tau(X) := X^t.$$

Dakle, ako je $X = [x_{ij}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, onda je $X^t = [x_{ji}]$, odnosno X^t je dobivena iz X zamjenom njenjih redaka i stupaca matrice. Preslikavanje τ je bijektivno i $\mathbb{F}$-linearno, a za sve $X, Y \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ vrijedi

$$\tau(XY) = (XY)^t = Y^t X^t = \tau(Y)\tau(X).$$

Prema tome, transponiranje ne čuva redoslijed množenja, nego ga obrće.

Štoviše, do konjugacije invertibilnom matricom, svi antiautomorfizmi algebre $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ dolaze upravo od transponiranja.

Korolar 1.25. *Svaki antiautomorfizam algebre* $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ *ima oblik*

$$\theta(X) = SX^tS^{-1}, \qquad X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F}),$$

za neku matricu $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$.

Dokaz. Neka je θ antiautomorfizam algebre $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ i neka je $\tau(X) := X^t$. Budući da su θ i τ antiautomorfizmi, njihova kompozicija $\theta \circ \tau$ je automorfizam asocijativne algebre $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. Prema Teoremu 1.23 postoji $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ takva da je

$$(\theta \circ \tau)(X) = SXS^{-1}, \qquad X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F}).$$

Zamjenom X s X^t dobivamo

$$\theta(X) = SX^tS^{-1}, \qquad X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F}),$$

što je trebalo dokazati. $\square$

Napomena 1.26. Homomorfizmi i antihomomorfizmi asocijativnih algebri ponovno će se pojaviti kasnije u Jordanovom kontekstu. Razlog je u tome što se simetrizirani produkt

$$X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$$

čuva u oba slučaja. Zato su homomorfizmi i antihomomorfizmi prirodna preslikavanja pri proučavanju algebri koje nastaju iz asocijativnih algebri simetrizacijom produkta.

1.3 Kvaternioni i oktonioni

Kvaternioni

Kvaternioni su realna asocijativna algebra dimenzije 4 s bazom $1, i, j, k$:

$$\mathbb{H} := \mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k.$$

Množenje je zadano na baznim elementima pravilima

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \qquad ij = k, \qquad jk = i, \qquad ki = j,$$

uz promjenu predznaka pri zamjeni poretka u posljednje tri jednakosti:

$$ji = -k, \qquad kj = -i, \qquad ik = -j.$$

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Tablica 1: Množenje baznih kvaterniona.

Produkt proizvoljnih kvaterniona dobiva se proširenjem tih pravila po bilinearnosti. Tako dobiven produkt je asocijativan; to se može provjeriti na baznim elementima $1, i, j, k$. Ekvivalentno, množenje baznih elemenata prikazano je u Tablici 1.

Posebno, $\mathbb{H}$ nije komutativna algebra, primjerice $ij = k$, dok je $ji = -k$. Budući da je $\mathbb{H}$ asocijativna realna algebra, iz dijela (e) Primjera 1.10 slijedi da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ algebra $\mathrm{M}_n(\mathbb{H})$ asocijativna realna algebra s uobičajenim matričnim produktom. Ipak, zbog nekomutativnosti kvaterniona pri računanju s kvaternionskim matricama treba paziti na poredak faktora.

Svaki kvaternion $q \in \mathbb{H}$ ima jedinstven zapis

$$q = a + bi + cj + dk, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Broj a zove se *realni dio* kvaterniona q i označava se s $\operatorname{Re} q$. Element

$$\operatorname{Im} q := bi + cj + dk$$

zove se *imaginarni dio* kvaterniona q. Tako dobivamo rastav

$$q = \operatorname{Re} q + \operatorname{Im} q.$$

Prostor svih imaginarnih kvaterniona je

$$\operatorname{Im} \mathbb{H} := \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k.$$

Identificiramo ga s vektorskim prostorom $\mathbb{R}^3$ tako da vektoru $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ pridružujemo imaginarni kvaternion $u_1 i + u_2 j + u_3 k$. Drugim riječima, standardna baza prostora $\mathbb{R}^3$ identificira se s bazom i, j, k prostora $\operatorname{Im} \mathbb{H}$.

U toj notaciji kvaternion pišemo kraće kao

$$q = a + u, \qquad a \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R}^3,$$

pri čemu je $a = \operatorname{Re} q$, a u predstavlja imaginarni dio kvaterniona q. Ako je još

$$r = b + v, \qquad b \in \mathbb{R}, \quad v \in \mathbb{R}^3,$$

tada se množenje kvaterniona može zapisati u obliku

$$qr = (ab - \langle u, v \rangle) + (av + bu + u \times v).$$

Ova formula sažima cijelu tablicu množenja. Na primjer, budući da se standardna baza prostora $\mathbb{R}^3$ identificira s i, j, k, iz pravila za vektorski produkt dobivamo $ij = k$, dok zamjena poretka daje $ji = -k$.

Svaki kvaternion možemo zapisati u obliku $q = a+u$, gdje je $a \in \mathbb{R}$, a $u \in \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ imaginarni dio kvaterniona. *Konjugiranje* kvaterniona definiramo s

$$\overline{a+u} := a - u.$$

Kvaternion $\overline{q}$ zove se *konjugat* kvaterniona q. U koordinatama, ako je $q = a + bi + cj + dk$, tada je

$$\overline{q} = a - bi - cj - dk.$$

Iz definicije i tablice množenja baznih kvaterniona slijedi

$$\overline{\overline{q}} = q, \qquad \overline{q+r} = \overline{q} + \overline{r}, \qquad \overline{\lambda q} = \lambda \overline{q}, \qquad \text{za sve } q, r \in \mathbb{H},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Osim toga, konjugiranje je antimultiplikativno, tj. vrijedi

$$\overline{qr} = \overline{r}\,\overline{q}, \qquad \text{za sve } q, r \in \mathbb{H}.$$

Na prostoru $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ koristimo standardnu euklidsku normu. Ona zadovoljava

$$\|q\|^2 = q\overline{q} = \overline{q}q = a^2 + \|u\|^2.$$

U koordinatnom prikazu je

$$\|a + bi + cj + dk\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Euklidska norma je multiplikativna na kvaternionima, tj, vrijedi

$$\|qr\| = \|q\|\,\|r\|, \qquad \text{za sve } q, r \in \mathbb{H}.$$

Doista, iz antimultiplikativnosti konjugiranja i asocijativnosti množenja u $\mathbb{H}$ slijedi

$$\|qr\|^2 = (qr)\overline{(qr)} = qr\overline{r}\,\overline{q} = q\,\|r\|^2\,\overline{q} = \|r\|^2 q\overline{q} = \|q\|^2\|r\|^2.$$

Budući da su obje strane nenegativne, dobivamo $\|qr\| = \|q\|\,\|r\|$. Nadalje, svaki nenul kvaternion je invertibilan i vrijedi

$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{\|q\|^2}, \qquad \text{za } q \neq 0.$$

Prema tome, $\mathbb{H}$ je realna asocijativna algebra s dijeljenjem.

Napomena 1.27. Kvaternioni će se ponovno pojaviti kasnije, pri opisu hermitskih matrica i njihovog simetriziranog produkta. Budući da je $\mathbb{H}$ asocijativna, prema Primjeru 1.10 (e) kvaternionske matrice možemo množiti uobičajenim pravilom matričnog množenja. Ipak, $\mathbb{H}$ nije komutativna algebra, pa se pri računanju s kvaternionskim matricama poredak faktora ne smije proizvoljno mijenjati.

Napomena 1.28. Povijesno, kvaternione je 1843. uveo Hamilton[7], koji je dugo pokušavao pronaći trodimenzionalni analogon kompleksnih brojeva. Pokazalo da se odgovarajuće množenje prirodno pojavljuje tek u dimenziji 4. Osnovne relacije

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

otkrio je 16. listopada 1843. u Dublinu. Za povijesni pregled vidjeti [3].

[7] William Rowan Hamilton (1805.–1865.), irski matematičar i fizičar.

Frobeniusov[8] teorem je fundamentalan strukturni rezultat o konačnodimenzionalnim realnim asocijativnim algebrama s dijeljenjem. Navodimo ga bez dokaza, jer njegov puni dokaz prelazi okvire ovih predavanja, ali rezultat jasno pokazuje zašto se u nastavku prirodno pojavljuju upravo algebre $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ i $\mathbb{H}$.

Teorem 1.29 (Frobeniusov teorem)**.** *Svaka konačnodimenzionalna asocijativna realna algebra s dijeljenjem izomorfna je jednoj od algebri* $\mathbb{R}$*,* $\mathbb{C}$ *ili* $\mathbb{H}$*.*

Dakle, u asocijativnom konačnodimenzionalnom realnom slučaju nema drugih algebri s dijeljenjem: uz realne i kompleksne brojeve pojavljuju se još samo kvaternioni. Za izvorni rad vidjeti [5].

Oktonioni

Oktonioni su realna algebra dimenzije 8 s bazom $1, e_1, \ldots, e_7$:

$$\mathbb{O} := \mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}e_7.$$

Svaki oktonion $x \in \mathbb{O}$ ima jedinstven zapis

$$x = x_0 + x_1 e_1 + \cdots + x_7 e_7, \qquad x_0, x_1, \ldots, x_7 \in \mathbb{R}.$$

Broj x_0 zove se *realni dio* oktoniona x i označava se s $\operatorname{Re} x$. Element

$$\operatorname{Im} x := x_1 e_1 + \cdots + x_7 e_7$$

zove se *imaginarni dio* oktoniona x. Tako dobivamo rastav

$$x = \operatorname{Re} x + \operatorname{Im} x.$$

Prostor svih *imaginarnih oktoniona* je

$$\operatorname{Im} \mathbb{O} := \mathbb{R}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}e_7.$$

Identificiramo ga s vektorskim prostorom $\mathbb{R}^7$ tako da vektoru $u = (u_1, \ldots, u_7) \in \mathbb{R}^7$ pridružujemo imaginarni oktonion $u_1 e_1 + \cdots + u_7 e_7$.

Množenje imaginarnih jedinica zadano je pravilima $e_i^2 = -1$ za $1 \le i \le 7$ i orijentiranom Fanovom ravninom prikazanom na Slici 1.

Sa slike 1 očitavamo sljedeće orijentirane trojke:

$$(6,1,5), \quad (5,2,3), \quad (3,4,6), \quad (6,7,2), \quad (4,1,2), \quad (3,7,1), \quad (4,5,7).$$

Svaka od tih trojki zapisuje jedan pravac Fanove ravnine u smjeru strelica.

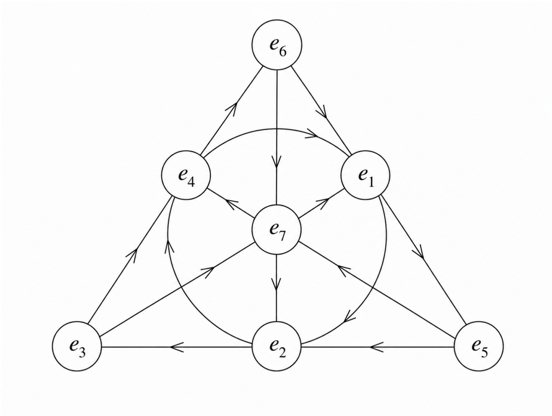
Preciznije, neka su $p, q, r \in \{1, \ldots, 7\}$ tri indeksa koji leže na istom pravcu Fanove ravnine i neka strelice na tom pravcu određuju ciklički poredak

$$p \to q \to r \to p.$$

Tada vrijedi

$$e_p e_q = e_r, \qquad e_q e_r = e_p, \qquad e_r e_p = e_q,$$

[8]Ferdinand Georg Frobenius (1849.–1917.), njemački matematičar.



Slika 1: Fanova ravnina za odabrano množenje imaginarnih jedinica oktoniona. Na svakom pravcu strelice određuju ciklički poredak triju indeksa.

a zamjenom poretka mijenja se predznak. Zajedno s pravilima $e_i^2 = -1$ i bilinearnošću množenja, time je određena cijela algebra $\mathbb{O}$.

U toj notaciji oktonion često pišemo kraće kao

$$x = x_0 + u, \qquad x_0 \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R}^7,$$

pri čemu je $x_0 = \operatorname{Re} x$, a u predstavlja imaginarni dio oktoniona x.

Konjugiranje oktoniona definiramo s

$$\overline{x_0 + u} := x_0 - u.$$

Oktonion $\overline{x}$ zove se *konjugat* oktoniona x. U koordinatnom prikazu imamo

$$\overline{x_0 + x_1 e_1 + \cdots + x_7 e_7} = x_0 - x_1 e_1 - \cdots - x_7 e_7.$$

Neposredno iz definicije slijedi

$$\overline{\overline{x}} = x, \qquad \overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y}, \qquad \overline{\lambda x} = \lambda \overline{x}, \qquad \text{za sve } x, y \in \mathbb{O},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Osim toga, iz pravila množenja imaginarnih jedinica slijedi da je konjugiranje antimultiplikativno:

$$\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}, \qquad \text{za sve } x, y \in \mathbb{O}.$$

Na prostoru $\mathbb{O} \cong \mathbb{R}^8$ koristimo standardnu euklidsku normu. U koordinatnom prikazu ona je zadana formulom

$$\|x_0 + x_1 e_1 + \cdots + x_7 e_7\|^2 = x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_7^2.$$

Iz pravila množenja imaginarnih jedinica slijedi

$$x\overline{x} = \overline{x}x = \|x\|^2 \qquad \text{za } x \in \mathbb{O}.$$

Odavde vidimo da svaki nenul oktonion ima obostrani inverz

$$x^{-1} = \frac{\overline{x}}{\|x\|^2}, \qquad \text{za } x \neq 0.$$

Nadalje, koristeći navedena pravila množenja i bilinearnost množenja na $\mathbb{O}$, može se provjeriti multiplikativnost euklidske norme na $\mathbb{O}$, tj.

$$\|xy\| = \|x\| \, \|y\|, \qquad \text{za sve } x, y \in \mathbb{O}. \tag{1.5}$$

Oktonioni nisu niti komutativni niti asocijativni. Nekomutativnost se vidi već iz orijentirane trojke $(6, 1, 5)$: vrijedi $e_6 e_1 = e_5$, dok zamjena poretka daje $e_1 e_6 = -e_5$. Neasocijativnost se, primjerice, vidi iz računa

$$(e_1 e_2) e_6 = e_4 e_6 = e_3, \qquad e_1(e_2 e_6) = e_1 e_7 = -e_3.$$

Ipak, oktonioni su alternativni:

$$(xx)y = x(xy), \qquad y(xx) = (yx)x, \qquad \text{za sve } x, y \in \mathbb{O}.$$

Posebno, prema Napomeni 1.9, $\mathbb{O}$ je potencijski asocijativna, pa su potencije jednog oktoniona jednoznačno određene. Nadalje, budući da je $\mathbb{O}$ alternativna, Artinov teorem pokazuje da je svaka podalgebra generirana s dva oktoniona asocijativna. Za $a \neq 0$ i $b \in \mathbb{O}$ podalgebra generirana s a i b sadrži i a^{-1}, jer je $a^{-1} = \overline{a}/\|a\|^2$ linearna kombinacija jedinice i elementa a. Zato u toj podalgebri možemo pisati

$$a(a^{-1}b) = b, \qquad (ba^{-1})a = b.$$

Dakle jednadžbe $ax = b$ i $ya = b$ imaju rješenja. Jedinstvenost slijedi iz multiplikativnosti norme (1.5): ako je $ax = ay$, tada je $a(x - y) = 0$, pa

$$0 = \|a(x - y)\| = \|a\| \, \|x - y\|.$$

Budući da je $a \neq 0$, slijedi $x = y$. Analogno, iz $xa = ya$ slijedi $x = y$. Prema tome, operatori $\mathcal{L}_a$ i $\mathcal{R}_a$ bijektivni su za svaki $a \neq 0$, pa je $\mathbb{O}$ realna neasocijativna algebra s dijeljenjem.

Napomena 1.30. Oktonioni će se ponovno pojaviti kasnije, pri opisu tzv. Albertove[9] algebre. To je algebra hermitskih 3×3 matrica nad $\mathbb{O}$ sa simetriziranim produktom. Ona se pojavljuje kao iznimni primjer u klasifikaciji prostih formalno realnih Jordanovih algebri.

U Primjeru 1.10 (e) vidjeli smo da je $\mathrm{M}_n(\mathcal{A})$ asocijativna algebra ako je $\mathcal{A}$ asocijativna algebra. Analogna tvrdnja ne vrijedi za alternativne algebre. Iako je $\mathbb{O}$ alternativna algebra, algebra $\mathrm{M}_n(\mathbb{O})$ s uobičajenim matričnim produktom nije alternativna za $n \geq 2$.

Već za $n = 2$ dobivamo kontraprimjer. Neka $E_{ij}(u)$ označava 2×2 matricu koja na mjestu (i, j) ima $u \in \mathbb{O}$, a na svim ostalim mjestima nulu. Stavimo

$$X := E_{12}(e_1) + E_{21}(e_2), \qquad Y := E_{12}(e_6).$$

Iz pravila množenja imaginarnih jedinica oktoniona imamo

$$e_1 e_2 = e_4, \qquad e_4 e_6 = e_3, \qquad e_2 e_6 = e_7, \qquad e_1 e_7 = -e_3.$$

Stoga je

$$((XX)Y)_{12} = (e_1 e_2) e_6 = e_4 e_6 = e_3,$$

[9]Abraham Adrian Albert (1905.–1972.), američki matematičar.

dok je
$$(X(XY))_{12} = e_1(e_2e_6) = e_1e_7 = -e_3.$$
Prema tome,
$$\big((XX)Y - X(XY)\big)_{12} = 2e_3 \neq 0.$$
Dakle, $\mathrm{M}_2(\mathbb{O})$ nije alternativna. Isti se kontraprimjer može uložiti u gornji lijevi blok algebre $\mathrm{M}_n(\mathbb{O})$, pa $\mathrm{M}_n(\mathbb{O})$ nije alternativna ni za jedan $n \geq 2$.

Zato se s matricama nad $\mathbb{O}$ ne može postupati jednako kao s matricama nad $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ili $\mathbb{H}$. Upravo zbog toga oktonionske hermitske matrice imaju posebno mjesto u Jordanovoj teoriji.

Napomena 1.31. Povijesno, oktonioni su otkriveni ubrzo nakon kvaterniona. Graves[10] opisao ih je u pismu Hamiltonu 1843., a Cayley[11] neovisno ih je objavio 1845. Zbog toga se oktonioni u literaturi često nazivaju i Cayleyjevim brojevima; za pregled vidjeti [3].

Zornov[12] teorem može se shvatiti kao prirodno proširenje Frobeniusovog teorema: kada se asocijativnost oslabi na alternativnost, pojavljuje se točno jedan novi konačnodimenzionalni realni primjer s dijeljenjem, algebra oktoniona. Potpuni dokaz zahtijeva dublju teoriju alternativnih algebri, pa ga ovdje navodimo kao vanjski strukturni rezultat.

Teorem 1.32 (Zornov teorem)**.** *Svaka konačnodimenzionalna alternativna realna algebra s dijeljenjem izomorfna je jednoj od algebri* $\mathbb{R}$*,* $\mathbb{C}$*,* $\mathbb{H}$ *ili* $\mathbb{O}$*.*

U odnosu na Frobeniusovu klasifikaciju, nova mogućnost je upravo $\mathbb{O}$. U tom smislu oktonioni dovršavaju niz realnih konačnodimenzionalnih algebri s dijeljenjem $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$; vidjeti [15].

2 Jordanove algebre

2.1 Definicija, motivacija i osnovni identiteti

Pojmovi i osnovni identiteti u ovom odjeljku imaju smisla nad proizvoljnim poljem $\mathbb{F}$ karakteristike različite od 2. Jordanove algebre izvorno su uvedene u radu Jordana, von Neumanna[13] i Wignera[14] iz 1934. godine, kao dio pokušaja algebarskog opisa opservabli u kvantnoj mehanici [12].

Osnovna motivacija dolazi iz sljedećeg jednostavnog opažanja. Kompleksnu matricu A zovemo *hermitskom* ako je $A^* = A$, gdje je A^* adjungirana, odnosno konjugirano transponirana matrica. Ako su A i B hermitske matrice, tada produkt AB općenito nije hermitska matrica. Na primjer, matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
su hermitske, ali
$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

[10] John Thomas Graves (1806.–1870.), irski matematičar i pravnik.
[11] Arthur Cayley (1821.–1895.), britanski matematičar.
[12] Max August Zorn (1906.–1993.), njemačko-američki matematičar.
[13] John von Neumann (1903.–1957.), mađarsko-američki matematičar.
[14] Eugene Paul Wigner (1902.–1995.), mađarsko-američki fizičar i matematičar.

nije hermitska matrica. Međutim, hermitske matrice zatvorene su s obzirom na simetrizirani produkt

$$A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA).$$

Doista, ako su $A^* = A$ i $B^* = B$, tada je

$$(A \circ B)^* = \left(\frac{1}{2}(AB + BA)\right)^* = \frac{1}{2}(B^*A^* + A^*B^*) = \frac{1}{2}(BA + AB) = A \circ B.$$

Dakle, simetrizirani produkt dviju hermitskih matrica ponovno je hermitska matrica. Jordanove algebre formaliziraju upravo takvu situaciju: produkt je komutativan, ali u pravilu nije asocijativan.

Definicija 2.1. *Jordanova algebra nad poljem* $\mathbb{F}$ je algebra $\mathcal{J}$ s bilinearnim produktom

$$\mathcal{J} \times \mathcal{J} \to \mathcal{J}, \qquad (x, y) \mapsto x \circ y,$$

takvim da za sve $x, y \in \mathcal{J}$ vrijedi $x \circ y = y \circ x$ i

$$x^2 \circ (x \circ y) = x \circ (x^2 \circ y), \qquad x^2 := x \circ x. \tag{2.1}$$

Identitet (2.1) zove se *Jordanov identitet*, a produkt $\circ$ zove se *Jordanov produkt.*

Za $x \in \mathcal{J}$ operator množenja s x označavamo s $\mathcal{L}_x$, dakle

$$\mathcal{L}_x : \mathcal{J} \to \mathcal{J}, \qquad \mathcal{L}_x(y) = x \circ y.$$

Primijetimo da je Jordanov identitet ekvivalentan operatorskoj jednakosti

$$\mathcal{L}_{x^2}\mathcal{L}_x = \mathcal{L}_x\mathcal{L}_{x^2}, \qquad \text{za sve } x \in \mathcal{J}.$$

U karakteristici 0 često ćemo koristiti sljedeći linearizirani oblik Jordanovog identiteta.

Lema 2.2. *Neka je $\mathcal{J}$ Jordanova algebra nad poljem $\mathbb{F}$ karakteristike* 0. *Tada za sve $a, b, c \in \mathcal{J}$ vrijedi*

$$[\mathcal{L}_a, \mathcal{L}_{b\circ c}] + [\mathcal{L}_b, \mathcal{L}_{c\circ a}] + [\mathcal{L}_c, \mathcal{L}_{a\circ b}] = 0, \tag{2.2}$$

gdje je $[S, T] = ST - TS$ komutator linearnih operatora.

Dokaz. Prema operatorskom obliku Jordanovog identiteta vrijedi

$$[\mathcal{L}_z, \mathcal{L}_{z^2}] = 0, \qquad z \in \mathcal{J}.$$

Stavimo $z = \alpha a + \beta b + \gamma c$, gdje su $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$. U izrazu za z^2 članovi relevantni za koeficijent uz $\alpha\beta\gamma$ u komutatoru su upravo

$$2\alpha\beta(a \circ b), \qquad 2\beta\gamma(b \circ c), \qquad 2\gamma\alpha(c \circ a).$$

Stoga je koeficijent uz $\alpha\beta\gamma$ u jednakosti $[\mathcal{L}_z, \mathcal{L}_{z^2}] = 0$ jednak

$$2[\mathcal{L}_a, \mathcal{L}_{b\circ c}] + 2[\mathcal{L}_b, \mathcal{L}_{c\circ a}] + 2[\mathcal{L}_c, \mathcal{L}_{a\circ b}].$$

Jer je $\operatorname{char} \mathbb{F} = 0$, smijemo uspoređivati koeficijente i dijeliti s 2. Time dobivamo (2.2). $\square$

Jordanov identitet ne treba miješati s alternativnošću. Jordanove algebre općenito nisu alternativne, čak ni kada nastaju iz asocijativnih algebri simetrizacijom produkta (vidjeti Zadatak 4). S druge strane, Jordanov identitet ima snažnu posljedicu: u idućem pododjeljku dokazat ćemo da je svaka Jordanova algebra nad poljem karakteristike 0 potencijski asocijativna.

Sljedeći pojmovi su specijalizacije općih definicija iz preliminarnog dijela na Jordanov produkt. Budući da je taj produkt komutativan, nema razlike između lijevih i desnih ideala. Ako je $\mathcal{J}$ Jordanova algebra, potprostor $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ zove se *Jordanov ideal* ako za sve $x \in \mathcal{J}$ i $y \in \mathcal{I}$ vrijedi $x \circ y \in \mathcal{I}$. Kada u nastavku govorimo o idealima Jordanove algebre, uvijek mislimo na ideale u ovom smislu. Jordanova algebra $\mathcal{J}$ zove se *prosta* ako njezin produkt nije identički jednak nuli i ako nema netrivijalnih Jordanovih ideala.

Na isti način, pojam homomorfizma specijalizira se na Jordanov produkt. Ako su $\mathcal{J}$ i $\mathcal{K}$ Jordanove algebre nad istim poljem $\mathbb{F}$, linearni operator $\phi : \mathcal{J} \to \mathcal{K}$ zove se *Jordanov homomorfizam* ako za sve $x, y \in \mathcal{J}$ vrijedi

$$\phi(x \circ y) = \phi(x) \circ \phi(y).$$

Bijektivni Jordanovi homomorfizmi zovu se *Jordanovi izomorfizmi*, a Jordanovi izomorfizmi $\mathcal{J}$ na samu sebe *Jordanovi automorfizmi*. Prema Napomeni 1.15, slika Jordanovog homomorfizma je Jordanova podalgebra kodomene, a njegova jezgra je Jordanov ideal domene. Pridjev *Jordanov* naglašava da se čuva Jordanov produkt, a ne asocijativni produkt; ta će razlika biti osobito važna pri uvođenju specijalnih Jordanovih algebri u Definiciji 2.5.

Budući da je Jordanov produkt komutativan, kvadrati određuju produkt *polarizacijom*. Za sve $x, y \in \mathcal{J}$ vrijedi

$$x \circ y = \frac{1}{2}\big((x+y)^2 - x^2 - y^2\big). \tag{2.3}$$

Prema tome, linearni operator između Jordanovih algebri čuva Jordanov produkt ako i samo ako čuva kvadrate. Naime, ako je $\phi(x^2) = \phi(x)^2$ za svaki x, tada iz (2.3) slijedi

$$\begin{aligned}
\phi(x \circ y) &= \frac{1}{2}\big(\phi((x+y)^2) - \phi(x^2) - \phi(y^2)\big) \\
&= \frac{1}{2}\big((\phi(x)+\phi(y))^2 - \phi(x)^2 - \phi(y)^2\big) = \phi(x) \circ \phi(y).
\end{aligned}$$

Obrat je neposredan. Ovu ćemo činjenicu nekoliko puta koristiti u nastavku.

Propozicija 2.3. *Neka je $\mathcal{A}$ asocijativna algebra nad poljem $\mathbb{F}$ karakteristike različite od 2. Na vektorskom prostoru $\mathcal{A}$ definiramo simetrizirani produkt*

$$x \circ y := \frac{1}{2}(xy + yx). \tag{2.4}$$

Tada je $\mathcal{A}$ s tim produktom Jordanova algebra. Označavamo je s $\mathcal{A}^+$. Ako je $\mathcal{A}$ unitalna, tada je i $\mathcal{A}^+$ unitalna s istom jedinicom.

Dokaz. Bilinearnost produkta $\circ$ slijedi iz bilinearnosti množenja u $\mathcal{A}$. Produkt je komutativan jer je

$$x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx) = \frac{1}{2}(yx + xy) = y \circ x.$$

Preostaje dokazati Jordanov identitet. Budući da je $x \circ x = x^2$, gdje je na desnoj strani običan asocijativni kvadrat u $\mathcal{A}$, za $x, y \in \mathcal{A}$ računamo

$$\begin{aligned} x^2 \circ (x \circ y) &= \frac{1}{2}\big(x^2(x \circ y) + (x \circ y)x^2\big) \\ &= \frac{1}{4}(x^3y + x^2yx + xyx^2 + yx^3), \end{aligned}$$

dok je

$$\begin{aligned} x \circ (x^2 \circ y) &= \frac{1}{2}\big(x(x^2 \circ y) + (x^2 \circ y)x\big) \\ &= \frac{1}{4}(x^3y + xyx^2 + x^2yx + yx^3). \end{aligned}$$

Dobiveni izrazi jednaki su, pa vrijedi Jordanov identitet.

Ako je 1 jedinica u $\mathcal{A}$, tada za svaki $x \in \mathcal{A}$ vrijedi

$$1 \circ x = \frac{1}{2}(1x + x1) = x.$$

Dakle, 1 je jedinica i u Jordanovoj algebri $\mathcal{A}^+$. □

Napomena 2.4. Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ asocijativne algebre nad $\mathbb{F}$. Svaki homomorfizam asocijativnih algebri $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ daje Jordanov homomorfizam $\phi : \mathcal{A}^+ \to \mathcal{B}^+$. Doista,

$$\phi(x \circ y) = \frac{1}{2}\phi(xy + yx) = \frac{1}{2}\big(\phi(x)\phi(y) + \phi(y)\phi(x)\big) = \phi(x) \circ \phi(y).$$

Isto vrijedi za antihomomorfizme. Ako je $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ antihomomorfizam, tada

$$\theta(x \circ y) = \frac{1}{2}\theta(xy + yx) = \frac{1}{2}\big(\theta(y)\theta(x) + \theta(x)\theta(y)\big) = \theta(x) \circ \theta(y).$$

Obratno pitanje, odnosno pitanje kada Jordanov homomorfizam između algebri dobivenih simetrizacijom asocijativnog produkta mora dolaziti iz homomorfizma ili antihomomorfizma asocijativnih algebri, klasičan je problem u teoriji prstenova i algebri. Sustavno su ga proučavali Jacobson[15] i Rickart[16] u radu [10]; za daljnji razvoj vidjeti i Hersteineov rad [17] [8]. Ove opće rezultate ovdje nećemo koristiti, ali ova napomena objašnjava zašto se u matričnim primjerima automorfizmi i antiautomorfizmi asocijativne algebre prirodno pojavljuju kao Jordanovi automorfizmi.

Definicija 2.5. Jordanova algebra zove se *specijalna* ako je izomorfna Jordanovoj podalgebri neke algebre oblika $\mathcal{A}^+$, gdje je $\mathcal{A}$ asocijativna algebra. Jordanova algebra koja nije specijalna zove se *iznimna*.

Definicija 2.6. Za element x Jordanove algebre $\mathcal{J}$ definiramo *kvadratni operator*

$$\mathcal{U}_x : \mathcal{J} \to \mathcal{J}, \qquad \mathcal{U}_x := 2\mathcal{L}_x^2 - \mathcal{L}_{x^2}. \tag{2.5}$$

Ovdje je $\mathcal{L}_x^2 = \mathcal{L}_x\mathcal{L}_x$ kompozicija operatora.

[15] Nathan Jacobson (1910.–1999.), američki matematičar.
[16] Charles Earl Rickart (1913.–2002.), američki matematičar.
[17] Israel Nathan Herstein (1923.–1988.), poljsko-američki matematičar.

Propozicija 2.7. *Neka je $\mathcal{A}$ asocijativna algebra nad $\mathbb{F}$. U specijalnoj Jordanovoj algebri $\mathcal{A}^+$ vrijedi*

$$\mathcal{U}_a(b) = aba, \qquad a, b \in \mathcal{A}. \tag{2.6}$$

Dokaz. U algebri $\mathcal{A}^+$ vrijedi $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$. Zato je

$$\begin{aligned} a \circ (a \circ b) &= \frac{1}{2}\left(a\frac{1}{2}(ab + ba) + \frac{1}{2}(ab + ba)a\right) \\ &= \frac{1}{4}(a^2b + 2aba + ba^2). \end{aligned}$$

S druge strane, $a^2 \circ b = \frac{1}{2}(a^2b + ba^2)$. Prema tome,

$$\mathcal{U}_a(b) = 2a \circ (a \circ b) - a^2 \circ b = aba.$$

□

Napomena 2.8. Najvažniji konačnodimenzionalni primjer iznimne Jordanove algebre je Albertova algebra, koju ćemo opisati u odjeljku 3, u sklopu formalno realnih prostih Jordanovih algebri. Njezina iznimnost dubok je strukturni rezultat.

Napomena 2.9. Neke od prethodnih tvrdnji vrijede i za alternativne algebre. Ako je $\mathcal{A}$ alternativna algebra nad poljem $\mathbb{F}$ karakteristike različite od 2, tada simetrizirani produkt (2.4) definira Jordanovu algebru na vektorskom prostoru $\mathcal{A}$. Doista, bilinearnost i komutativnost dokazuju se kao u Propoziciji 2.3, a Jordanov identitet za zadane elemente $x, y \in \mathcal{A}$ provjerava se u podalgebri generiranoj s x i y. Prema Artinovom teoremu za alternativne algebre ta je podalgebra asocijativna, pa se u njoj primjenjuje isti račun kao u dokazu Propozicije 2.3. Ako je $\mathcal{A}$ unitalna, jedinica ostaje ista.

Uz simetrizirani produkt (2.4) vrijedi i formula (2.6) za kvadratni operator. Naime, za zadane elemente $a, b \in \mathcal{A}$ račun se odvija u podalgebri generiranoj s a i b, koja je ponovno asocijativna prema Artinovom teoremu. Zato u alternativnom slučaju dobivamo istu formulu $\mathcal{U}_a(b) = aba$.

Također, homomorfizmi i antihomomorfizmi alternativnih algebri daju Jordanove homomorfizme za pripadne simetrizirane produkte. Pritom se pojam specijalne Jordanove algebre iz Definicije 2.5 ne mijenja. Naime, simetrizacija alternativne algebre je specijalna: u unitalnom slučaju to se dobiva ulaganjem $a \mapsto \mathcal{R}_a$ u asocijativnu algebru $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$, a u neunitalnom slučaju nakon dodavanja jedinice. Stoga svaka Jordanova algebra koja se ulaže u simetrizaciju alternativne algebre ostaje specijalna u smislu Definicije 2.5.

2.2 Potencijska asocijativnost Jordanovih algebri

U neasocijativnoj algebri treba biti oprezan s potencijama: izraz x^4 može značiti, primjerice, $(x^2)(x^2)$ ili $x(x(xx))$. Prisjetimo se Definicije 1.8: algebra je *potencijski asocijativna* ako je podalgebra generirana jednim elementom asocijativna. Tada potencije pojedinog elementa ne ovise o načinu postavljanja zagrada. Sljedeći teorem pokazuje da Jordanove algebre imaju to važno svojstvo.

Teorem 2.10 (Albertov teorem o potencijskoj asocijativnosti)**.** *Neka je $\mathcal{J}$ Jordanova algebra nad poljem $\mathbb{F}$ karakteristike 0. Tada je $\mathcal{J}$ potencijski asocijativna. Preciznije, za svaki $x \in \mathcal{J}$ potencije x^m su jednoznačno definirane i vrijedi*

$$x^r \circ x^s = x^{r+s}, \qquad r, s \geq 1.$$

Dokaz. Fiksirajmo $x \in \mathcal{J}$ i koristimo linearizirani oblik Jordanovog identiteta iz Leme 2.2. Dok ne dokažemo potencijsku asocijativnost, potencije definiramo desno rekurzivno:

$$x^1 := x, \qquad x^{m+1} := x^m \circ x.$$

Za $m \geq 1$ stavimo $\Lambda_m := \mathcal{L}_{x^m}$.

Istodobnom indukcijom po $N \geq 2$ dokazujemo da za sve $r, s \geq 1$ takve da je $r+s \leq N$ vrijedi

$$x^r \circ x^s = x^{r+s} \quad \text{i} \quad [\Lambda_r, \Lambda_s] = 0.$$

Za $N = 2$ tvrdnje su neposredne. Za $N = 3$ produktna formula slijedi iz rekurzivne definicije potencija i komutativnosti Jordanovog produkta, a jedina nova operatorska jednakost jest $[\Lambda_1, \Lambda_2] = 0$, što je Jordanov identitet u operatorskom obliku za element x.

Pretpostavimo da tvrdnje vrijede do nekog stupnja $N \geq 3$. Najprije dokažimo produktnu formulu za $r + s = N + 1$. Ako je $r = 1$ ili $s = 1$, tvrdnja slijedi iz rekurzivne definicije i komutativnosti produkta. Neka su zato $r, s \geq 2$. Tada je $r + 1 \leq N$, pa prema pretpostavci indukcije vrijedi $[\Lambda_r, \Lambda_1] = 0$. Budući da je $x^s = \Lambda_1^{s-1}(x)$, dobivamo

$$x^r \circ x^s = \Lambda_r \Lambda_1^{s-1}(x) = \Lambda_1^{s-1}\Lambda_r(x) = \Lambda_1^{s-1}(x^{r+1}) = x^{r+s}.$$

Preostaje dokazati komutiranje operatora u stupnju $N + 1$. Označimo

$$C_N := [\Lambda_1, \Lambda_N], \qquad D_m := [\Lambda_m, \Lambda_{N+1-m}] \quad (1 \leq m \leq N).$$

Neka je $2 \leq m \leq N - 1$ i neka je $n = N + 1 - m$. Primjenom (2.2) na

$$a = x^{m-1}, \qquad b = x^n, \qquad c = x$$

i korištenjem već dokazane produktne formule u stupnju $N + 1$ dobivamo

$$[\Lambda_{m-1}, \Lambda_{n+1}] + [\Lambda_n, \Lambda_m] + [\Lambda_1, \Lambda_N] = 0,$$

odnosno

$$D_{m-1} - D_m + C_N = 0.$$

Kako je $D_1 = C_N$, slijedi $D_{N-1} = (N-1)C_N$.

S druge strane, primjenom (2.2) na $a = x$, $b = x$ i $c = x^{N-1}$ dobivamo

$$2C_N + D_{N-1} = 0.$$

Uvrštavanjem prethodne jednakosti slijedi $(N + 1)C_N = 0$. Budući da je $\operatorname{char} \mathbb{F} = 0$, imamo $C_N = 0$. Iz relacije $D_m = D_{m-1} + C_N$ sada slijedi $D_m = 0$ za $1 \leq m \leq N - 1$, a iz $[\Lambda_N, \Lambda_1] = -C_N = 0$ dobivamo

$$[\Lambda_m, \Lambda_{N+1-m}] = 0, \qquad 1 \leq m \leq N.$$

Time je indukcija završena.

Dakle, za sve $r, s \geq 1$ vrijedi $x^r \circ x^s = x^{r+s}$. Sada indukcijom po m slijedi da svaki produkt od m kopija elementa x, bez obzira na postavljanje zagrada, ima vrijednost x^m: svaki takav produkt rastavlja se na produkt dva kraćih monoma, recimo s r i s kopija elementa x, pa je po pretpostavci indukcije jednak

$$x^r \circ x^s = x^{r+s} = x^m.$$

Potencije su stoga jednoznačno definirane.

Naposljetku, podalgebra generirana elementom x razapeta je potencijama od x, a za potencije vrijedi

$$(x^r \circ x^s) \circ x^t = x^{r+s+t} = x^r \circ (x^s \circ x^t).$$

Po bilinearnosti, produkt je asocijativan na cijeloj podalgebri generiranoj elementom x. Budući da je x bio proizvoljan, algebra $\mathcal{J}$ je potencijski asocijativna. $\square$

Napomena 2.11. U dokazu je pretpostavka $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$ korištena u dva koraka: pri uspoređivanju koeficijenata u Lemi 2.2 i pri zaključku iz $(N+1)C_N = 0$ da je $C_N = 0$. Za standardne prikaze ovog rezultata vidjeti [2, 14, 13]. U nastavku ćemo koristiti da se u Jordanovoj algebri nad poljem karakteristike 0 potencije x^m mogu pisati bez dvosmislenosti.

2.3 Jordanova algebra $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})^+$

U ovom pododjeljku proučavamo osnovni specijalni primjer iz Propozicije 2.3: Jordanovu algebru $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})^+$ sa simetriziranim produktom $\circ$. Njezina je jedinica jedinična matrica.

Teorem 2.12. *Neka je* $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$. *Za svaki* $n \geq 1$ *Jordanova algebra* $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})^+$ *je prosta.*

Dokaz. Za $n = 1$ algebra $\mathrm{M}_1(\mathbb{F})^+$ jednaka je polju $\mathbb{F}$, pa je tvrdnja očita. Pretpostavimo $n \geq 2$. Budući da je jedinična matrica jedinica za $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})^+$, produkt nije identički jednak nuli. Preostaje pokazati da nema netrivijalnih Jordanovih ideala.

Neka je $\mathcal{I} \neq 0$ Jordanov ideal u $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})^+$ i neka je $0 \neq A = [a_{ij}] \in \mathcal{I}$. Odaberimo indekse p, q takve da je $a_{pq} \neq 0$. Budući da je $\mathcal{I}$ Jordanov ideal, iz $Y \in \mathcal{I}$ slijedi

$$\mathcal{U}_X(Y) = 2X \circ (X \circ Y) - X^2 \circ Y \in \mathcal{I}, \qquad X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F}).$$

Prema Propoziciji 2.7 vrijedi

$$\mathcal{U}_{E_{qp}}(A) = E_{qp} A E_{qp} = a_{pq} E_{qp}.$$

Kako je $a_{pq} \neq 0$, dobivamo $E_{qp} \in \mathcal{I}$.

Ako je $q = p$, već imamo dijagonalnu matričnu jedinicu $E_{pp} \in \mathcal{I}$. Ako je $q \neq p$, tada iz $E_{qp} \in \mathcal{I}$ slijedi

$$\mathcal{U}_{E_{pq}}(E_{qp}) = E_{pq} E_{qp} E_{pq} = E_{pq} \in \mathcal{I}.$$

Zatim je

$$E_{pq} \circ E_{qp} = \frac{1}{2}(E_{pp} + E_{qq}) \in \mathcal{I},$$

pa primjenom kvadratnog operatora $\mathcal{U}_{E_{pp}}$ dobivamo

$$\mathcal{U}_{E_{pp}}\left(\frac{1}{2}(E_{pp} + E_{qq})\right) = \frac{1}{2} E_{pp} \in \mathcal{I}.$$

Budući da je $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$, slijedi $E_{pp} \in \mathcal{I}$. Dakle, u svakom slučaju postoji indeks ℓ takav da je $E_{\ell\ell} \in \mathcal{I}$.

Sada pokažimo da tada sve matrične jedinice pripadaju $\mathcal{I}$. Za $X, Z, Y \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ iz Propozicije 2.7 slijedi polarizacijska formula

$$\mathcal{U}_{X+Z}(Y) - \mathcal{U}_X(Y) - \mathcal{U}_Z(Y) = XYZ + ZYX.$$

Uzmimo $X = E_{i\ell}$, $Z = E_{\ell j}$ i $Y = E_{\ell\ell}$. Budući da je $Y \in \mathcal{I}$, lijeva strana pripada $\mathcal{I}$. Ako je $(i,j) \neq (\ell,\ell)$, desna strana jednaka je E_{ij}, a slučaj $(i,j) = (\ell,\ell)$ već znamo. Stoga je $E_{ij} \in \mathcal{I}$ za sve i,j. Matrične jedinice čine bazu prostora $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, pa je $\mathcal{I} = \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. Time je prostost dokazana. $\square$

Napomena 2.13. Prethodni teorem nije poseban fenomen matričnih algebri. Općenitije, Herstein je dokazao da ako je $\mathcal{A}$ prosta asocijativna algebra nad poljem karakteristike različite od 2, tada je i pripadna specijalna Jordanova algebra $\mathcal{A}^+$ prosta. Mi ćemo u nastavku koristiti samo slučaj $\mathcal{A} = \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, pa smo ga dokazali izravno. Za opći rezultat vidjeti [7].

Sada nam je cilj opisati sve Jordanove automorfizme algebre $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})^+$. Najprije se prisjetimo odgovarajuće tvrdnje za asocijativni produkt. Prema Teoremu 1.23, svaki automorfizam asocijativne algebre $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ je unutarnji, tj. ima oblik $X \mapsto SXS^{-1}$ za neku matricu $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. Takvo preslikavanje očito čuva i simetrizirani produkt $X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$, pa daje Jordanov automorfizam algebre $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})^+$.

Međutim, za Jordanov produkt pojavljuje se još jedna prirodna mogućnost. Naime, antiautomorfizmi asocijativne algebre obrću poredak množenja, ali zbog simetrije produkta $\circ$ ipak čuvaju Jordanov produkt:

$$\theta(X \circ Y) = \frac{1}{2}\big(\theta(XY) + \theta(YX)\big) = \frac{1}{2}\big(\theta(Y)\theta(X) + \theta(X)\theta(Y)\big) = \theta(X) \circ \theta(Y).$$

Prema Korolaru 1.25, svaki antiautomorfizam algebre $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ ima oblik

$$X \mapsto SX^tS^{-1}.$$

Sljedeći teorem pokazuje da Jordanovi automorfizmi algebre $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})^+$ ne daju ništa treće: svi dolaze ili od automorfizama ili od antiautomorfizama asocijativne matrične algebre. Za općenitiji kontekst Jordanovih homomorfizama vidjeti [8, 10].

Teorem 2.14. *Neka je* $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$ *i* $n \geq 2$. *Svaki Jordanov automorfizam algebre* $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})^+$ *ima jedan od sljedećih oblika:*

$$\phi(X) = SXS^{-1} \qquad \text{ili} \qquad \phi(X) = SX^tS^{-1}, \tag{2.7}$$

gdje je $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. *Obratno, svako preslikavanje jednog od ta dva oblika je Jordanov automorfizam algebre* $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})^+$.

Dokaz. Najprije provjerimo da preslikavanja navedenih oblika doista jesu Jordanovi automorfizmi. Preslikavanje $X \mapsto SXS^{-1}$ čuva asocijativni produkt, pa čuva i Jordanov produkt. Za preslikavanje $X \mapsto SX^tS^{-1}$ koristimo

$$(X \circ Y)^t = \left(\frac{1}{2}(XY + YX)\right)^t = \frac{1}{2}(Y^tX^t + X^tY^t) = X^t \circ Y^t.$$

Oba preslikavanja su linearna i bijektivna, pa su Jordanovi automorfizmi.

Obratno, neka je ϕ Jordanov automorfizam algebre $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})^+$. Budući da je ϕ surjektivan Jordanov homomorfizam, $\phi(I)$ je jedinica algebre $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})^+$, pa je $\phi(I) = I$.

Idempotent P zvat ćemo *primitivnim* ako se ne može zapisati kao zbroj dva nenul ortogonalna idempotenata. Ovdje ortogonalnost znači $P \circ Q = 0$. Jordanov automorfizam čuva idempotente, ortogonalnost i primitivnost.

U $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})^+$ primitivni idempotenti upravo su idempotenti ranga 1. Doista, ako idempotent P ima rang $r > 1$, tada je prema Lemi 1.22 konjugiran s matricom $\mathrm{diag}(I_r, 0)$. Zato se P rastavlja u zbroj barem dva nenul međusobno ortogonalnih idempotenata, pa nije primitivan.

Obratno, neka je P idempotent ranga 1 i neka je $P = Q + R$, gdje su Q i R ortogonalni idempotenti. Iz $Q \circ R = 0$ slijedi $QR + RQ = 0$. Množenjem slijeva s Q, odnosno zdesna s Q, dobivamo

$$QR + QRQ = 0, \qquad QRQ + RQ = 0.$$

Zato je $QR = RQ$, pa iz $QR + RQ = 0$ i $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$ slijedi $QR = RQ = 0$. Sada je

$$\operatorname{Im} P = \operatorname{Im} Q \oplus \operatorname{Im} R.$$

Doista, iz $P = Q + R$ i $QR = RQ = 0$ slijedi da su $\operatorname{Im} Q$ i $\operatorname{Im} R$ sadržane u $\operatorname{Im} P$, a svaki element iz $\operatorname{Im} P$ zapisuje se kao zbroj elementa iz $\operatorname{Im} Q$ i elementa iz $\operatorname{Im} R$. Ako je $w \in \operatorname{Im} Q \cap \operatorname{Im} R$, tada je $Qw = w$ i $Qw = 0$, pa je $w = 0$. Budući da je $\operatorname{rang} P = 1$, jedan od prostora $\operatorname{Im} Q$ i $\operatorname{Im} R$ mora biti nula. Dakle, jedan od idempotenata Q, R jednak je nuli, pa je P primitivan.

Stavimo $P_i := \phi(E_{ii})$ za $1 \leq i \leq n$. Tada su $P_1, \ldots, P_n$ međusobno ortogonalni primitivni idempotenti i njihov je zbroj I. Iz $P_i \circ P_j = 0$ za $i \neq j$ slijedi $P_iP_j + P_jP_i = 0$. Kao u prethodnom odlomku dobivamo

$$P_iP_j = P_jP_i = 0, \qquad i \neq j.$$

Odaberimo nenul vektor $v_i \in \operatorname{Im} P_i$ za svaki i. Ako je $\sum_i \alpha_i v_i = 0$, tada primjenom P_k dobivamo $\alpha_k v_k = 0$, pa je $\alpha_k = 0$. Dakle, $v_1, \ldots, v_n$ čine bazu prostora $\mathbb{F}^n$. Neka je $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ matrica koja standardnu bazu šalje u tu bazu, tj. $Se_i = v_i$. Budući da P_i djeluje kao identitet na pravcu $\mathbb{F}v_i$ i kao nula na pravcima $\mathbb{F}v_j$ za $j \neq i$, vrijedi

$$P_i = SE_{ii}S^{-1}, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Zamjenom ϕ s automorfizmom $X \mapsto S^{-1}\phi(X)S$ možemo pretpostaviti da je

$$\phi(E_{ii}) = E_{ii}, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Neka su $i \neq j$ i stavimo

$$V_{ij} := \operatorname{span}_{\mathbb{F}}\{E_{ij}, E_{ji}\}.$$

Taj je prostor opisan jednadžbama

$$E_{ii} \circ X = \frac{1}{2}X, \qquad E_{jj} \circ X = \frac{1}{2}X, \qquad E_{kk} \circ X = 0 \quad (k \notin \{i, j\}).$$

Budući da ϕ čuva Jordanov produkt i fiksira sve E_{kk}, slijedi $\phi(V_{ij}) = V_{ij}$. Zato možemo pisati

$$\phi(E_{ij}) = \alpha E_{ij} + \beta E_{ji}.$$

Iz $E_{ij}^2 = 0$ i čuvanja kvadrata dobivamo

$$0 = \phi(E_{ij})^2 = \alpha\beta(E_{ii} + E_{jj}),$$

pa je $\alpha = 0$ ili $\beta = 0$. Budući da je ϕ injektivan, vrijedi $\phi(E_{ij}) \neq 0$, pa točno jedan od skalara α i β nije nula. Primijenimo isti zaključak na E_{ji}. Kako ϕ čuva jednakost

$$E_{ij} \circ E_{ji} = \frac{1}{2}(E_{ii} + E_{jj}),$$

slike elemenata E_{ij} i E_{ji} moraju ležati na suprotnim pravcima u V_{ij}. Zato za svaki par $i \neq j$ vrijedi jedna od dviju mogućnosti:

$$\phi(E_{ij}) = \alpha_{ij} E_{ij}, \qquad \phi(E_{ji}) = \alpha_{ij}^{-1} E_{ji},$$

ili

$$\phi(E_{ij}) = \alpha_{ij} E_{ji}, \qquad \phi(E_{ji}) = \alpha_{ij}^{-1} E_{ij},$$

gdje je $\alpha_{ij} \in \mathbb{F}^{\times}$. Ako je $n = 2$, prethodni opis odmah daje jedan od dva oblika iz tvrdnje. U prvom slučaju uzmemo $D = \operatorname{diag}(\alpha_{12}, 1)$, pa je $\phi(X) = DXD^{-1}$. U drugom slučaju $\tau \circ \phi$, gdje je $\tau(X) = X^t$, pripada prvom slučaju, pa je

$$\phi(X) = (DXD^{-1})^t = (D^{-1})^t X^t D^t.$$

To je oblik $X \mapsto SX^tS^{-1}$. Zato u nastavku pretpostavljamo $n \geq 3$.

Za neuređeni par $\{i, j\}$ kažemo da je tipa $+$ ako $\phi(E_{ij})$ leži u $\mathbb{F}E_{ij}$, a tipa $-$ ako $\phi(E_{ij})$ leži u $\mathbb{F}E_{ji}$. To ne ovisi o redoslijedu para, jer isto vrijedi i za sliku E_{ji}. Neka su i, j, k međusobno različiti. Budući da je $E_{ij} \circ E_{jk} = \frac{1}{2}E_{ik}$, slike elemenata E_{ij} i E_{jk} ne mogu biti različitih tipova: u tom bi slučaju njihov Jordanov produkt bio 0, dok je $\phi(E_{ik}) \neq 0$. Ako su oba para tipa $+$, tada je i par $\{i, k\}$ tipa $+$; ako su oba para tipa $-$, tada je i par $\{i, k\}$ tipa $-$.

Doista, fiksiramo indeks 1. Za svaka dva indeksa $i, j \neq 1$ parovi $\{1, i\}$ i $\{1, j\}$ ne mogu biti različitih tipova, jer bismo mogli primijeniti prethodni zaključak na trojku $i, 1, j$. Zato svi parovi koji sadrže 1 imaju isti tip, a zatim iz trojke $1, i, j$ slijedi da i svaki par $\{i, j\}$ ima taj isti tip.

Pretpostavimo najprije da svi parovi imaju tip $+$. Tada iz jednakosti $E_{ij} \circ E_{jk} = \frac{1}{2}E_{ik}$, za međusobno različite i, j, k, dobivamo relacije tranzitivnosti

$$\alpha_{ij}\alpha_{jk} = \alpha_{ik}.$$

Odaberimo $d_1 := 1$ i $d_i := \alpha_{i1}$ za $i \geq 2$. Tada je $\alpha_{ij} = d_i/d_j$. Za $D := \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ slijedi

$$\phi(E_{ij}) = DE_{ij}D^{-1}, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Budući da matrične jedinice čine bazu prostora $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, dobivamo $\phi(X) = DXD^{-1}$ za sve X.

Ako svi parovi imaju tip $-$, tada $\tau \circ \phi$, gdje je $\tau(X) = X^t$, pripada prethodnom slučaju. Zato postoji invertibilna dijagonalna matrica D takva da je

$$\tau(\phi(X)) = DXD^{-1}, \qquad X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F}).$$

Prema tome,

$$\phi(X) = (DXD^{-1})^t = (D^{-1})^t X^t D^t,$$

što je oblik SX^tS^{-1} za prikladnu matricu $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. Vraćanjem početne konjugacije dobivamo opći oblik iz tvrdnje. □

Korolar 2.15. *Neka je $n \geq 2$ i neka je $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$. Svaki nenul Jordanov homomorfizam $\phi : \mathrm{M}_n(\mathbb{F})^+ \to \mathrm{M}_n(\mathbb{F})^+$ je Jordanov automorfizam. Posebno, ϕ ima jedan od oblika iz* (2.7) *za neku matricu $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$.*

Dokaz. Prema Napomeni 1.15, jezgra $\ker \phi$ je Jordanov ideal u $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})^+$. Budući da je $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})^+$ prosta Jordanova algebra i $\phi \neq 0$, prema Teoremu 2.12 vrijedi $\ker \phi = 0$. Dakle, ϕ je injektivno linearno preslikavanje.

Prema Teoremu o rangu i defektu, injektivan linearni operator između dva konačnodimenzionalna vektorska prostora iste dimenzije je surjektivan. Zato je ϕ Jordanov automorfizam algebre $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})^+$. Sada tvrdnja slijedi iz Teorema 2.14. □

2.4 Peirceova dekompozicija za jedan idempotent

Peirceova[18] dekompozicija je Jordanov analogon rastava prostora određenog idempotentom. U matričnom slučaju takav je rastav već opisan u Lemi 1.22: ako je $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ idempotent, tada je $\mathbb{F}^n = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Ker} P$, a nakon prikladne promjene baze možemo pretpostaviti da je, za $r := \operatorname{rang} P$,

$$P = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle, idempotent P rastavlja prostor $\mathbb{F}^n$ na dva dijela: na slici djeluje kao identiteta, a na jezgri djeluje kao nuloperator.

U apstraktnoj Jordanovoj algebri idempotent e promatramo preko operatora množenja

$$\mathcal{L}_e : \mathcal{J} \to \mathcal{J}, \qquad \mathcal{L}_e(x) = e \circ x.$$

Peirceova dekompozicija je svojstveni rastav tog operatora. Ona rastavlja algebru na dijelove na kojima $\mathcal{L}_e$ djeluje redom kao množenje skalarom 1, $\frac{1}{2}$ i 0.

Pogledajmo najprije kako to izgleda u matričnom primjeru. Promatramo specijalnu Jordanovu algebru $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})^+$ i idempotent

$$P = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ako matricu $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ zapišemo kao blok-matricu usklađenu s istim rastavom prostora,

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

gdje je $A \in \mathrm{M}_r(\mathbb{F})$, $D \in \mathrm{M}_{n-r}(\mathbb{F})$, $B \in \mathrm{M}_{r,n-r}(\mathbb{F})$ i $C \in \mathrm{M}_{n-r,r}(\mathbb{F})$, tada se uobičajenim blok-matričnim množenjem dobiva

$$\mathcal{L}_P(X) = P \circ X = \frac{1}{2}(PX + XP) = \begin{bmatrix} A & \frac{1}{2}B \\ \frac{1}{2}C & 0 \end{bmatrix}.$$

Ovdje $\mathrm{M}_{r,n-r}(\mathbb{F})$ i $\mathrm{M}_{n-r,r}(\mathbb{F})$ označavaju skupove pravokutnih matrica odgovarajućih dimenzija.

Dakle, operator $\mathcal{L}_P$ ima tri moguća svojstvena djelovanja: na gornjem dijagonalnom bloku djeluje kao identiteta, na donjem dijagonalnom bloku kao nuloperator, a na izvandijagonalnim blokovima kao množenje skalarom $\frac{1}{2}$. Pripadni svojstveni potprostori

[18] Charles Sanders Peirce (1839.–1914.), američki logičar, filozof i matematičar.

su

$$\mathcal{J}_1(P) = \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : A \in \mathrm{M}_r(\mathbb{F}) \right\},$$

$$\mathcal{J}_{1/2}(P) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix} : B \in \mathrm{M}_{r,n-r}(\mathbb{F}),\ C \in \mathrm{M}_{n-r,r}(\mathbb{F}) \right\},$$

$$\mathcal{J}_0(P) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} : D \in \mathrm{M}_{n-r}(\mathbb{F}) \right\}.$$

U rubnim slučajevima $r = 0$ ili $r = n$ ove zapise razumijemo s očitim izostavljanjem blokova dimenzije 0. Zato se vektorski prostor $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ rastavlja kao

$$\mathrm{M}_n(\mathbb{F}) = \mathcal{J}_1(P) \oplus \mathcal{J}_{1/2}(P) \oplus \mathcal{J}_0(P).$$

Opća Peirceova dekompozicija kaže da se isti fenomen pojavljuje u svakoj Jordanovoj algebri: svaki idempotent određuje svojstveni rastav s mogućim svojstvenim vrijednostima 1, $\frac{1}{2}$ i 0.

U nastavku ovog pododjeljka radimo nad poljem $\mathbb{F}$ karakteristike 0. Neka je $\mathcal{J}$ Jordanova algebra i neka je $e \in \mathcal{J}$ idempotent, tj. $e^2 = e$. Za $\lambda \in \{1, \frac{1}{2}, 0\}$ definiramo *Peirceov prostor* s obzirom na idempotent e formulom

$$\mathcal{J}_\lambda(e) := \{x \in \mathcal{J} : e \circ x = \lambda x\}.$$

Dakle, $\mathcal{J}_\lambda(e)$ je svojstveni potprostor operatora $\mathcal{L}_e$ za svojstvenu vrijednost λ. Kada je idempotent e jasan iz konteksta, pisat ćemo kraće $\mathcal{J}_\lambda$ umjesto $\mathcal{J}_\lambda(e)$.

Propozicija 2.16. *Neka je $\mathcal{J}$ Jordanova algebra nad poljem karakteristike 0 i neka je $e \in \mathcal{J}$ idempotent. Tada vrijedi direktan rastav vektorskih prostora*

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_1(e) \oplus \mathcal{J}_{1/2}(e) \oplus \mathcal{J}_0(e).$$

Pritom nije potrebna pretpostavka konačnodimenzionalnosti i neki od pribrojnika mogu biti jednaki nuli. Nadalje, vrijede Peirceova pravila množenja. Ako radi kraćeg zapisa pišemo $\mathcal{J}_\lambda = \mathcal{J}_\lambda(e)$, tada je

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 \circ \mathcal{J}_1 &\subseteq \mathcal{J}_1, & \mathcal{J}_0 \circ \mathcal{J}_0 &\subseteq \mathcal{J}_0, \\ \mathcal{J}_1 \circ \mathcal{J}_0 &= 0, & \mathcal{J}_1 \circ \mathcal{J}_{1/2} &\subseteq \mathcal{J}_{1/2}, \\ \mathcal{J}_0 \circ \mathcal{J}_{1/2} &\subseteq \mathcal{J}_{1/2}, & \mathcal{J}_{1/2} \circ \mathcal{J}_{1/2} &\subseteq \mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_0. \end{aligned}$$

Posebno, $\mathcal{J}_1(e)$ i $\mathcal{J}_0(e)$ su Jordanove podalgebre, a e je jedinica u podalgebri $\mathcal{J}_1(e)$.

Dokaz. Stavimo $T = \mathcal{L}_e$. Najprije ćemo dokazati da T zadovoljava polinomijalnu relaciju

$$T(2T - \mathrm{id}_{\mathcal{J}})(T - \mathrm{id}_{\mathcal{J}}) = 0. \tag{2.8}$$

Koristimo linearizirani Jordanov identitet (2.2). Uvrstimo u njega $a = z$, $b = e$ i $c = e$. Budući da je $e \circ e = e$, dobivamo

$$[\mathcal{L}_z, T] + 2[T, \mathcal{L}_{Tz}] = 0.$$

Primjenom ove operatorske jednakosti na element e slijedi

$$\begin{aligned}0 &= \big(\mathcal{L}_z T - T\mathcal{L}_z + 2T\mathcal{L}_{Tz} - 2\mathcal{L}_{Tz}T\big)e \\ &= Tz - T^2 z + 2T^3 z - 2T^2 z = (2T^3 - 3T^2 + T)z.\end{aligned}$$

Budući da je $z \in \mathcal{J}$ bio proizvoljan, vrijedi $2T^3 - 3T^2 + T = 0$, što je upravo (2.8).

Polinom $t(2t-1)(t-1)$ ima tri različita korijena: 0, $\frac{1}{2}$ i 1. Zato, kao u linearnoj algebri, projektore na pripadne svojstvene potprostore možemo zapisati kao polinome u operatoru T. Riječ je o Lagrangeovim interpolacijskim polinomima: za svaku od vrijednosti 1, $\frac{1}{2}$ i 0 uzima se polinom koji je na toj vrijednosti jednak 1, a na preostale dvije vrijednosti jednak 0. U našem slučaju to su

$$p_1(t) := 2t^2 - t, \qquad p_{1/2}(t) := 4t - 4t^2, \qquad p_0(t) := 1 - 3t + 2t^2.$$

Odgovarajući projektori dobivaju se uvrštavanjem operatora T u te polinome:

$$\begin{aligned}\pi_1 &:= p_1(T) = 2T^2 - T, \\ \pi_{1/2} &:= p_{1/2}(T) = 4T - 4T^2, \\ \pi_0 &:= p_0(T) = \mathrm{id}_{\mathcal{J}} - 3T + 2T^2.\end{aligned}$$

Iz relacije (2.8) slijedi da su $\pi_1, \pi_{1/2}, \pi_0$ međusobno ortogonalni projektori sa zbrojem $\mathrm{id}_{\mathcal{J}}$. Njihove slike redom su $\mathcal{J}_1(e)$, $\mathcal{J}_{1/2}(e)$ i $\mathcal{J}_0(e)$. Zato dobivamo direktan rastav

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_1(e) \oplus \mathcal{J}_{1/2}(e) \oplus \mathcal{J}_0(e).$$

Ovaj je argument potpuno algebarski i ne koristi konačnodimenzionalnost.

Preostaje dokazati pravila množenja. Neka je $x \in \mathcal{J}_\lambda$, tj. $Tx = \lambda x$. Uvrstimo u (2.2) elemente $a = e$, $b = e$ i $c = x$. Dobivamo

$$2[T, \mathcal{L}_{Tx}] + [\mathcal{L}_x, T] = 0.$$

Budući da je $Tx = \lambda x$, ova jednakost postaje

$$(2\lambda - 1)[T, \mathcal{L}_x] = 0.$$

Ako je $\lambda = 1$ ili $\lambda = 0$, slijedi $[T, \mathcal{L}_x] = 0$. Dakle, za $x \in \mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_0$ operator $\mathcal{L}_x$ komutira s T.

Iz toga slijedi da množenje elementom iz $\mathcal{J}_1$ ili $\mathcal{J}_0$ čuva svaki Peirceov prostor. Doista, ako je $Ty = \mu y$ i ako $\mathcal{L}_x T = T\mathcal{L}_x$, tada je

$$T(x \circ y) = T\mathcal{L}_x(y) = \mathcal{L}_x T(y) = \mu(x \circ y).$$

Zato vrijedi

$$\mathcal{J}_1 \circ \mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{J}_1, \qquad \mathcal{J}_0 \circ \mathcal{J}_0 \subseteq \mathcal{J}_0, \qquad \mathcal{J}_1 \circ \mathcal{J}_{1/2} \subseteq \mathcal{J}_{1/2}, \qquad \mathcal{J}_0 \circ \mathcal{J}_{1/2} \subseteq \mathcal{J}_{1/2}.$$

Ako je $x \in \mathcal{J}_1$ i $y \in \mathcal{J}_0$, tada iz komutiranja s $\mathcal{L}_x$ slijedi $x \circ y \in \mathcal{J}_0$, a iz komutiranja s $\mathcal{L}_y$ slijedi $x \circ y \in \mathcal{J}_1$. Budući da je rastav direktan, dobivamo $x \circ y = 0$.

Ostaje pravilo za produkt dva elemenata iz $\mathcal{J}_{1/2}$. Neka su općenito $x \in \mathcal{J}_\lambda$ i $y \in \mathcal{J}_\mu$ te stavimo $u = x \circ y$. Uvrstimo u (2.2) elemente $a = e$, $b = x$ i $c = y$. Dobivamo

$$[T, \mathcal{L}_u] + [\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_{e\circ y}] + [\mathcal{L}_y, \mathcal{L}_{e\circ x}] = 0.$$

Budući da je $e \circ x = \lambda x$ i $e \circ y = \mu y$, to je

$$[T, \mathcal{L}_u] + (\mu - \lambda)[\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_y] = 0.$$

Primjenom ove jednakosti na e dobivamo

$$T^2 u - Tu + (\mu - \lambda)^2 u = 0.$$

Ako su $x, y \in \mathcal{J}_{1/2}$, tada je $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$, pa vrijedi $T^2u - Tu = 0$. Zapišimo $u = u_1 + u_{1/2} + u_0$ prema Peirceovoj dekompoziciji. Budući da T na prostorima $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_{1/2}$ i $\mathcal{J}_0$ djeluje redom množenjem skalarima 1, $\frac{1}{2}$ i 0, slijedi

$$T^2 u - Tu = -\frac{1}{4} u_{1/2}.$$

Kako je karakteristika polja 0, dobivamo $u_{1/2} = 0$. Dakle,

$$\mathcal{J}_{1/2} \circ \mathcal{J}_{1/2} \subseteq \mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_0.$$

Dokazana su sva Peirceova pravila. Iz prva dva pravila slijedi da su $\mathcal{J}_1(e)$ i $\mathcal{J}_0(e)$ Jordanove podalgebre. Ako je $x \in \mathcal{J}_1(e)$, tada je $e \circ x = x$, pa je e jedinica u podalgebri $\mathcal{J}_1(e)$. $\square$

Napomena 2.17. Peirceova dekompozicija bit će važna u daljnjem proučavanju idempotenata i formalno realnih Jordanovih algebri. Za općenitiju Peirceovu teoriju i Peirceova pravila uz sustav ortogonalnih idempotenata vidjeti [14, 13].

3 Formalno realne proste Jordanove algebre

U ovom se odjeljku vraćamo motivaciji s početka: Jordanove algebre nastale su iz matričnog modela kvantne mehanike, gdje su opservable opisane hermitskim matricama. Obični produkt dviju hermitskih matrica ne mora biti hermitski, ali simetrizirani produkt jest. Formalna realnost bilježi još jedno važno svojstvo tog modela: zbroj kvadrata može biti jednak nuli samo ako su svi pribrojnici jednaki nuli. Ta će nas ideja dovesti do važnog Jordan–von Neumann–Wignerovog klasifikacijskog teorema za konačnodimenzionalne proste formalno realne Jordanove algebre.

3.1 Formalna realnost i realni trag

Definicija 3.1. Realna Jordanova algebra $\mathcal{J}$ zove se *formalno realna* ako za sve $m \in \mathbb{N}$ i sve $x_1, \ldots, x_m \in \mathcal{J}$ iz jednakosti

$$x_1^2 + \cdots + x_m^2 = 0$$

slijedi

$$x_1 = \cdots = x_m = 0.$$

Formalna realnost je algebarski oblik pozitivnosti: zbroj kvadrata može biti jednak nuli samo ako su svi pribrojnici jednaki nuli. U matričnim primjerima ta se pozitivnost vidi pomoću realnog traga kvadrata.

Neka je $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$. Na $\mathbb{K}$ koristimo standardnu konjugaciju $a \mapsto \overline{a}$; za $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ konjugacija je identiteta. Za matricu $X = [x_{ij}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ definiramo adjungiranu matricu

$$X^* := \overline{X}^t = [\overline{x_{ji}}].$$

S $H_n(\mathbb{K})$ označavamo realni vektorski prostor hermitskih matrica nad $\mathbb{K}$:

$$H_n(\mathbb{K}) := \{X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) : X^* = X\}.$$

Ekvivalentno, $X = [x_{ij}]$ pripada $H_n(\mathbb{K})$ ako i samo ako je

$$x_{ji} = \overline{x_{ij}}, \qquad \text{za sve } 1 \leq i, j \leq n.$$

Za $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dobivamo realne simetrične matrice, pa pišemo i

$$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) := H_n(\mathbb{R}).$$

Za $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ definiramo *realni trag*

$$\tau(A) := \mathrm{Re} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}. \tag{3.1}$$

Ako je A hermitska, tada su njezini dijagonalni elementi realni, pa je $\tau(A)$ običan zbroj dijagonalnih elemenata.

Lema 3.2. *Za $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ i sve $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ vrijedi*

$$\tau(AB) = \tau(BA). \tag{3.2}$$

Dokaz. Uzmimo $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$. Pritom u kvaternionskom slučaju pazimo na redoslijed faktora; koristimo samo činjenicu da za $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ i $\mathbb{H}$ vrijedi $\mathrm{Re}(uv) = \mathrm{Re}(vu)$. Tada je

$$\tau(AB) = \mathrm{Re} \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} b_{ji} = \mathrm{Re} \sum_{1 \leq i,j \leq n} b_{ji} a_{ij} = \tau(BA).$$

□

3.2 Hermitske matrične Jordanove algebre

Budući da su $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ i $\mathbb{H}$ asocijativne realne algebre, i $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ je asocijativna realna algebra. Stoga je $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})^+$ specijalna Jordanova algebra s produktom

$$X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX).$$

Za $1 \leq i < j \leq n$ i $u \in \mathbb{K}$ označimo s $h_{ij}(u)$ hermitsku matricu koja na mjestu (i, j) ima u, na mjestu (j, i) ima $\overline{u}$, a na svim ostalim mjestima ima nulu. Budući da su dijagonalni elementi hermitske matrice realni, matrice $E_{11}, \ldots, E_{nn}$ i matrice $h_{ij}(u)$, gdje $i < j$ i u prolazi realnom bazom algebre $\mathbb{K}$, čine realnu bazu prostora $H_n(\mathbb{K})$. Posebno,

$$\dim_{\mathbb{R}} H_n(\mathbb{K}) = n + \frac{n(n-1)}{2} \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}.$$

Dakle,

$$\dim_{\mathbb{R}} H_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \dim_{\mathbb{R}} H_n(\mathbb{C}) = n^2, \qquad \dim_{\mathbb{R}} H_n(\mathbb{H}) = n(2n-1).$$

Propozicija 3.3. *Za svaki $n \geq 1$ i svaki $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ prostor $H_n(\mathbb{K})$ je unitalna realna Jordanova podalgebra od $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})^+$ s jedinicom I. Ta je algebra formalno realna i prosta.*

Dokaz. Neka su $X, Y \in H_n(\mathbb{K})$. Budući da je $\mathbb{K}$ asocijativna i da je konjugacija antimultiplikativna na $\mathbb{H}$, vrijedi

$$(XY)^* = Y^*X^*.$$

Zato je

$$(X \circ Y)^* = \left(\frac{1}{2}(XY + YX)\right)^* = \frac{1}{2}(Y^*X^* + X^*Y^*) = \frac{1}{2}(YX + XY) = X \circ Y.$$

Dakle, $X \circ Y \in H_n(\mathbb{K})$, pa je $H_n(\mathbb{K})$ Jordanova podalgebra od $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})^+$. Nadalje, $I = I^*$ i za svaki $X \in H_n(\mathbb{K})$ vrijedi $I \circ X = X$, pa je $H_n(\mathbb{K})$ unitalna Jordanova algebra s jedinicom I.

Dokažimo formalnu realnost. Neka je $X = [x_{ij}] \in H_n(\mathbb{K})$. Tada je i X^2 hermitska matrica, pa su dijagonalni elementi matrice X^2 realni. Budući da je $X^2 = X \circ X$, iz definicije realnog traga dobivamo

$$\tau(X^2) = \sum_{i=1}^{n}(X^2)_{ii} = \sum_{1\le i,j\le n} x_{ij}x_{ji} = \sum_{1\le i,j\le n} x_{ij}\overline{x_{ij}} = \sum_{1\le i,j\le n} \|x_{ij}\|^2 \ge 0. \tag{3.3}$$

Ovdje je $\|a\|^2 = a\overline{a}$ standardna kvadratna norma na $\mathbb{K}$. Jednakost u (3.3) vrijedi ako i samo ako je $x_{ij} = 0$ za sve i, j, odnosno ako i samo ako je $X = 0$.

Ako su $X_1, \dots, X_m \in H_n(\mathbb{K})$ i ako vrijedi

$$X_1^2 + \cdots + X_m^2 = 0,$$

onda primjenom realnog traga τ i formule (3.3) dobivamo

$$0 = \sum_{r=1}^{m}\tau(X_r^2) = \sum_{r=1}^{m}\sum_{1\le i,j\le n} \|(X_r)_{ij}\|^2.$$

Svi pribrojnici su nenegativni realni brojevi. Zato su svi jednaki nuli, pa je $X_r = 0$ za svaki r. Prema tome, $H_n(\mathbb{K})$ je formalno realna.

Preostaje dokazati prostost. Za $n = 1$ imamo $H_1(\mathbb{K}) = \mathbb{R}$, pa je tvrdnja očita. Neka je zato $n \ge 2$. Budući da je $H_n(\mathbb{K})$ unitalna, dovoljno je pokazati da nema netrivijalnih Jordanovih ideala.

Neka je $\mathcal{I} \ne 0$ ideal u $H_n(\mathbb{K})$ i odaberimo $0 \ne A = [a_{ij}] \in \mathcal{I}$.

Najprije ćemo pokazati da $\mathcal{I}$ sadrži barem jedan dijagonalni idempotent E_{pp}. Ako je $a_{pp} \ne 0$ za neki p, tada je, po formuli (2.6) za kvadratni operator u specijalnim Jordanovim algebrama,

$$\mathcal{U}_{E_{pp}}(A) = E_{pp}AE_{pp} = a_{pp}E_{pp}.$$

Budući da je $\mathcal{I}$ ideal, vrijedi $\mathcal{L}_{E_{pp}}(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I}$, pa iz definicije (2.5) slijedi i $\mathcal{U}_{E_{pp}}(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I}$. Zato je $a_{pp}E_{pp} \in \mathcal{I}$. Kako je $a_{pp} \ne 0$, dobivamo $E_{pp} \in \mathcal{I}$.

Pretpostavimo sada da su svi dijagonalni elementi od A jednaki nuli. Budući da je $A \ne 0$, postoji indeks p takav da je neki izvandijagonalni element u p-tom retku nenul. Stavimo

$$B := 2(E_{pp} \circ A) - 2\mathcal{U}_{E_{pp}}(A).$$

Tada je $B \in \mathcal{I}$ i B je upravo izvandijagonalni dio matrice A koji dodiruje p-ti redak i p-ti stupac. Zato je $B \ne 0$. Budući da je $B \in \mathcal{I}$, imamo $B^2 \in \mathcal{I}$, pa opet primjenom kvadratnog operatora dobivamo

$$\mathcal{U}_{E_{pp}}(B^2) = E_{pp}B^2E_{pp} = \left(\sum_{j\neq p} \|b_{pj}\|^2\right) E_{pp} \in \mathcal{I}.$$

Zbroj u zagradi je strogo pozitivan, jer je barem jedan b_{pj} nenul. Dakle, $E_{pp} \in \mathcal{I}$.

Sada neka je $E_{pp} \in \mathcal{I}$. Za $q \neq p$ stavimo

$$K_{pq} := h_{\min\{p,q\},\max\{p,q\}}(1).$$

Tada je

$$E_{pp} \circ K_{pq} = \frac{1}{2}K_{pq},$$

pa je $K_{pq} \in \mathcal{I}$. Budući da je

$$K_{pq}^2 = E_{pp} + E_{qq},$$

slijedi $E_{qq} = K_{pq}^2 - E_{pp} \in \mathcal{I}$. Dakle, svi dijagonalni idempotenti $E_{11}, \ldots, E_{nn}$ leže u $\mathcal{I}$.

Zatim za sve $i < j$ i sve $u \in \mathbb{K}$ iz

$$E_{ii} \circ h_{ij}(u) = \frac{1}{2}h_{ij}(u)$$

dobivamo $h_{ij}(u) \in \mathcal{I}$. Time $\mathcal{I}$ sadrži realnu bazu prostora $H_n(\mathbb{K})$, pa je $\mathcal{I} = H_n(\mathbb{K})$. Prostost je dokazana. □

Napomena 3.4. Za $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ prostor $H_n(\mathbb{C})$ promatramo kao realni, a ne kao kompleksni vektorski prostor. Naime, ako je $X = X^*$, tada općenito $(iX)^* \neq iX$. Isto vrijedi i za $H_n(\mathbb{H})$. Budući da je $\mathbb{H}$ asocijativna, $H_n(\mathbb{H})$ je specijalna Jordanova algebra, kao podalgebra od $\mathrm{M}_n(\mathbb{H})^+$.

U oktonionskom slučaju ne koristimo punu matričnu algebru $\mathrm{M}_n(\mathbb{O})$ na isti način kao u asocijativnim slučajevima. Prema Napomeni 1.30, algebra $\mathrm{M}_n(\mathbb{O})$ s uobičajenim matričnim produktom nije alternativna za $n \geq 2$. Ipak, hermitske oktonionske matrice reda 2 i 3 imaju posebno značenje: algebra $H_2(\mathbb{O})$ pojavit će se kao spin faktor, dok je $H_3(\mathbb{O})$ Albertova algebra.

3.3 Spin faktori

U ovom pododjeljku uvodimo novu klasu formalno realnih Jordanovih algebri: spin faktore. Njihova je definicija izravno povezana s euklidskom geometrijom, jer produkt spin faktora u sebi sadrži skalarni produkt na realnom vektorskom prostoru. Zbog toga spin faktori čine važan most između matričnih primjera i opće klasifikacije.

Neka je V konačnodimenzionalni realni vektorski prostor sa skalarnim produktom $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Kao i obično, induciranu normu označavano s $\|\cdot\|$, tj.

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u\rangle}, \qquad u \in V.$$

Realni vektorski prostor

$$\mathrm{Spin}(V) := \mathbb{R} \oplus V$$

opskrbljen s produktom

$$(\alpha, u) \circ (\beta, v) := (\alpha\beta + \langle u, v\rangle, \alpha v + \beta u) \tag{3.4}$$

zove se *spin faktor* pridružen prostoru V.

Propozicija 3.5. *Spin faktor* $\mathrm{Spin}(V)$ *je realna unitalna Jordanova algebra s jedinicom* $(1,0)$*. Nadalje,* $\mathrm{Spin}(V)$ *je formalno realna. Ako je* $\dim V \geq 2$*, tada je* $\mathrm{Spin}(V)$ *prosta Jordanova algebra.*

Dokaz. Bilinearnost produkta slijedi iz bilinearnosti skalarnog produkta i linearnih operacija u V, a komutativnost iz simetričnosti skalarnog produkta. Za svaki $(\alpha, u) \in \mathrm{Spin}(V)$ vrijedi

$$(1,0) \circ (\alpha, u) = (\alpha, u),$$

pa je $(1,0)$ jedinica u $\mathrm{Spin}(V)$.

Dokažimo Jordanov identitet. Neka je

$$x = (\alpha, u), \qquad y = (\beta, v).$$

Stavimo

$$\rho; = \langle u, u \rangle, \qquad s := \langle u, v \rangle.$$

Tada je

$$x^2 = (\alpha^2 + \rho, 2\alpha u), \qquad x \circ y = (\alpha\beta + s, \alpha v + \beta u).$$

Iz formule (3.4) dobivamo

$$\begin{aligned} x^2 \circ (x \circ y) &= \big((\alpha^2 + \rho)(\alpha\beta + s) + 2\alpha\langle u, \alpha v + \beta u\rangle, \\ &\qquad (\alpha^2 + \rho)(\alpha v + \beta u) + 2\alpha(\alpha\beta + s)u\big) \\ &= \big(\alpha\beta(\alpha^2 + 3\rho) + (3\alpha^2 + \rho)s, \\ &\qquad \alpha(\alpha^2 + \rho)v + (\beta(3\alpha^2 + \rho) + 2\alpha s)u\big). \end{aligned}$$

S druge strane,

$$x^2 \circ y = ((\alpha^2 + \rho)\beta + 2\alpha s, (\alpha^2 + \rho)v + 2\alpha\beta u),$$

tako da je

$$\begin{aligned} x \circ (x^2 \circ y) &= \big(\alpha((\alpha^2 + \rho)\beta + 2\alpha s) + \langle u, (\alpha^2 + \rho)v + 2\alpha\beta u\rangle, \\ &\qquad \alpha((\alpha^2 + \rho)v + 2\alpha\beta u) + ((\alpha^2 + \rho)\beta + 2\alpha s)u\big) \\ &= \big(\alpha\beta(\alpha^2 + 3\rho) + (3\alpha^2 + \rho)s, \\ &\qquad \alpha(\alpha^2 + \rho)v + (\beta(3\alpha^2 + \rho) + 2\alpha s)u\big). \end{aligned}$$

Dakle vrijedi Jordanov identitet.

Dokažimo formalnu realnost. Neka su $x_r = (\alpha_r, u_r) \in \mathrm{Spin}(V)$ i pretpostavimo da je

$$x_1^2 + \cdots + x_m^2 = 0.$$

Budući da je

$$x_r^2 = (\alpha_r^2 + \langle u_r, u_r\rangle, 2\alpha_r u_r),$$

iz skalarne komponente dobivamo

$$\sum_{r=1}^{m} (\alpha_r^2 + \langle u_r, u_r\rangle) = 0.$$

Svi pribrojnici su nenegativni realni brojevi. Zato je svaki od njih jednak 0, pa je $\alpha_r = 0$ i $u_r = 0$ za svaki r. Dakle $x_r = 0$ za svaki r.

Preostaje dokazati prostost za $\dim V \geq 2$. Budući da je $\mathrm{Spin}(V)$ unitalna, trebamo dokazati da nema netrivijalnih ideala. Neka je $\mathcal{I} \neq 0$ ideal u $\mathrm{Spin}(V)$ i neka je $(\alpha, u) \in \mathcal{I}$ nenul element.

Ako je $u = 0$, tada je $\alpha \neq 0$ i

$$\frac{1}{\alpha}(\alpha, 0) = (1, 0) \in \mathcal{I},$$

pa je $\mathcal{I} = \mathrm{Spin}(V)$. Ako je $\alpha = 0$, tada je $u \neq 0$ i $(0, u)^2 = (\langle u, u\rangle, 0)$. Kako je $\langle u, u\rangle > 0$, slijedi $(1, 0) \in \mathcal{I}$, pa je opet $\mathcal{I} = \mathrm{Spin}(V)$.

Naposljetku pretpostavimo da su $\alpha \neq 0$ i $u \neq 0$. Budući da je $\dim V \geq 2$, postoji nenul vektor $v \in V$ takav da je $\langle u, v\rangle = 0$. Tada je

$$(\alpha, u) \circ (0, v) = (0, \alpha v) \in \mathcal{I}.$$

Budući da je $\alpha v \neq 0$, prethodni slučaj pokazuje da je $(1, 0) \in \mathcal{I}$. Zato je $\mathcal{I} = \mathrm{Spin}(V)$. $\square$

Za $x = (\alpha, u) \in \mathrm{Spin}(V)$ definiramo

$$\mathrm{Tr}(x) = 2\alpha, \qquad \det(x) = \alpha^2 - \langle u, u\rangle.$$

Tada vrijedi kvadratna jednadžba

$$x^2 - \mathrm{Tr}(x)x + \det(x)(1, 0) = 0. \tag{3.5}$$

Doista, budući da je

$$x^2 = (\alpha^2 + \langle u, u\rangle, 2\alpha u),$$

neposrednim uvrštavanjem dobivamo nulu.

Napomena 3.6. Za spin faktor pridružen prostoru V prirodno se pojavljuje skup

$$L(V) := \{(\alpha, u) \in \mathbb{R} \oplus V : \alpha \geq \|u\|\}.$$

Taj skup zovemo *Lorentzovim*[19] *stošcem* pridruženim prostoru V.

U spin faktoru Lorentzov stožac ima jednostavno algebarsko značenje: to je upravo skup svih kvadrata u $\mathrm{Spin}(V)$. Doista, ako je $(\alpha, u) = (\beta, v)^2$, tada je

$$\alpha = \beta^2 + \langle v, v\rangle, \qquad u = 2\beta v.$$

Zato je $\alpha \geq 0$ i

$$\alpha^2 - \langle u, u\rangle = \left(\beta^2 - \langle v, v\rangle\right)^2 \geq 0.$$

Dakle $\alpha \geq \|u\|$, pa je $(\alpha, u) \in L(V)$.

Obratno, neka je $(\alpha, u) \in L(V)$. Ako je $u = 0$, tada je $\alpha \geq 0$, pa je $(\alpha, 0) = (\sqrt{\alpha}, 0)^2$. Ako je $u \neq 0$, odaberimo $\beta > 0$ tako da je

$$\beta^2 = \frac{1}{2}\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \langle u, u\rangle}\right), \qquad v = \frac{1}{2\beta}u.$$

Tada je

$$\langle v, v\rangle = \frac{\langle u, u\rangle}{4\beta^2} = \frac{1}{2}\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \langle u, u\rangle}\right),$$

[19] Hendrik Antoon Lorentz (1853.–1928.), nizozemski fizičar.

pa vrijedi

$$\beta^2 + \langle v, v\rangle = \alpha, \qquad 2\beta v = u.$$

Dakle $(\beta, v)^2 = (\alpha, u)$.

Naziv dolazi iz geometrije specijalne relativnosti. Ako α shvatimo kao vremensku koordinatu, a u kao prostorni dio, uvjet $\alpha \geq \|u\|$ opisuje budući kauzalni stožac; njegov rub $\alpha = \|u\|$ je svjetlosni stožac, u jedinicama u kojima je brzina svjetlosti jednaka 1; vidjeti npr. [11].

Automorfizmi spin faktora

Definicija 3.7. Linearni operator $Q : V \to V$ zove se *ortogonalan* ako je

$$\langle Qu, Qv\rangle = \langle u, v\rangle, \qquad \text{za sve } u, v \in V.$$

Skup svih ortogonalnih operatora na V označavamo s $O(V)$.

Ako je A matrica operatora Q u nekoj ortonormiranoj bazi za V, tada je Q ortogonalan ako i samo ako je $A^t A = I$.

Propozicija 3.8. *Svaki Jordanov automorfizam ϕ spin faktora* $\mathrm{Spin}(V)$ *ima oblik*

$$\phi(\alpha, u) = (\alpha, Qu),$$

gdje je $Q \in O(V)$. Obratno, svaki $Q \in O(V)$ definira Jordanov automorfizam spin faktora formulom

$$\phi_Q(\alpha, u) = (\alpha, Qu).$$

Dokaz. Najprije primijetimo da Jordanov automorfizam čuva jedinicu. Doista, ako je ϕ automorfizam, tada za svaki $y \in \mathrm{Spin}(V)$ postoji $x \in \mathrm{Spin}(V)$ takav da je $y = \phi(x)$, pa vrijedi

$$\phi(1, 0) \circ y = \phi(1, 0) \circ \phi(x) = \phi((1, 0) \circ x) = \phi(x) = y.$$

Dakle $\phi(1, 0)$ je jedinica u $\mathrm{Spin}(V)$. Zbog jedinstvenosti jedinice zaključujemo $\phi(1, 0) = (1, 0)$.

Zbog linearnosti postoje linearno preslikavanje $\lambda : V \to \mathbb{R}$ i linearni operator $Q : V \to V$ takvi da je

$$\phi(0, u) = (\lambda(u), Qu), \qquad \text{za sve } u \in V.$$

Za $u, v \in V$ vrijedi

$$(0, u) \circ (0, v) = (\langle u, v\rangle, 0).$$

Primjenom ϕ dobivamo

$$(\lambda(u), Qu) \circ (\lambda(v), Qv) = (\langle u, v\rangle, 0).$$

Usporedbom vektorskih komponenti slijedi

$$\lambda(u)Qv + \lambda(v)Qu = 0, \qquad \text{za sve } u, v \in V.$$

Pretpostavimo da postoji $u \in V$ takav da je $\lambda(u) \neq 0$. Uvrštavanjem $v = u$ dobivamo $2\lambda(u)Qu = 0$, pa je $Qu = 0$. Tada je

$$\phi\big((0, u) - \lambda(u)(1, 0)\big) = (\lambda(u), Qu) - \lambda(u)(1, 0) = 0.$$

Budući da je ϕ injektivna, slijedi $(0, u) - \lambda(u)(1, 0) = 0$, što je nemoguće jer je $\lambda(u) \neq 0$. Dakle $\lambda = 0$.

Sada iz usporedbe skalarnih komponenti dobivamo

$$\langle Qu, Qv \rangle = \langle u, v \rangle, \qquad \text{za sve } u, v \in V.$$

Dakle Q je ortogonalan. Time je dokazano da svaki automorfizam ima navedeni oblik.

Obratno, neka je $Q \in O(V)$ i definirajmo

$$\phi_Q(\alpha, u) = (\alpha, Qu).$$

Preslikavanje ϕ_Q je linearno i bijektivno, jer je Q linearan i bijektivan. Za $x = (\alpha, u)$ i $y = (\beta, v)$ imamo

$$\begin{aligned} \phi_Q(x \circ y) &= \phi_Q(\alpha\beta + \langle u, v \rangle, \alpha v + \beta u) \\ &= (\alpha\beta + \langle u, v \rangle, \alpha Qv + \beta Qu), \end{aligned}$$

a s druge strane

$$\begin{aligned} \phi_Q(x) \circ \phi_Q(y) &= (\alpha, Qu) \circ (\beta, Qv) \\ &= (\alpha\beta + \langle Qu, Qv \rangle, \alpha Qv + \beta Qu) \\ &= (\alpha\beta + \langle u, v \rangle, \alpha Qv + \beta Qu). \end{aligned}$$

Dakle $\phi_Q(x \circ y) = \phi_Q(x) \circ \phi_Q(y)$, pa je ϕ_Q Jordanov automorfizam. □

Matrične realizacije spin faktora

Najprije zabilježimo jednodimenzionalni slučaj. Preslikavanje

$$\mathrm{Spin}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \qquad (\alpha, t) \mapsto (\alpha + t, \alpha - t)$$

je izomorfizam realnih Jordanovih algebri, gdje na $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ uzimamo komponentno množenje. Doista, ako $x = (\alpha, t)$ i $y = (\beta, s)$, tada je

$$x \circ y = (\alpha\beta + ts, \alpha s + \beta t),$$

a komponentno množenje slika daje

$$((\alpha + t)(\beta + s), (\alpha - t)(\beta - s)),$$

što je upravo slika elementa $x \circ y$.

Ako je $V = \mathbb{R}^2$, preslikavanje

$$\Phi_2 : \mathrm{Spin}(\mathbb{R}^2) \to H_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Sym}_2(\mathbb{R}), \qquad \Phi_2(\alpha, x, y) := \begin{bmatrix} \alpha + x & y \\ y & \alpha - x \end{bmatrix}$$

je izomorfizam realnih Jordanovih algebri. Doista, Φ_2 je realno linearno bijektivno preslikavanje i izravnim računom dobivamo

$$\Phi_2(z^2) = \Phi_2(z)^2, \qquad \text{za sve } z \in \mathrm{Spin}(\mathbb{R}^2).$$

Prema polarizacijskoj formuli (2.3), čuvanje kvadrata ekvivalnetno je čuvanju Jordanovog produkta.

Općenitije, neka je $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$. Na realnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}\oplus\mathbb{K}$ uzimamo skalarni produkt

$$\langle (t,u),(s,v)\rangle := ts + \mathrm{Re}(u\overline{v}).$$

S $H_2(\mathbb{K})$ označimo realni vektorski prostor svih matrica oblika

$$\begin{bmatrix} \alpha + t & u \\ \overline{u} & \alpha - t \end{bmatrix}, \qquad \alpha, t \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{K}.$$

Na tom prostoru definiramo produkt $\frac{1}{2}(XY + YX)$. Za $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ taj se izraz računa jednoznačno, jer se u produktu dvije 2×2 matrice pojavljuju samo produkti dva oktoniona, pa nije potrebno birati zagrade u trostrukim produktima.

Definirajmo preslikavanje

$$\Psi_{\mathbb{K}} : \mathrm{Spin}(\mathbb{R}\oplus\mathbb{K}) \to H_2(\mathbb{K}), \qquad \Psi_{\mathbb{K}}(\alpha, t, u) := \begin{bmatrix} \alpha + t & u \\ \overline{u} & \alpha - t \end{bmatrix}$$

Očito je $\Psi_{\mathbb{K}}$ bijektivan $\mathbb{R}$-linearni operator. Dokažimo da je $\Psi_{\mathbb{K}}$ Jordanov izomorfizam. Prema polarizacijskoj formuli (2.3), dovoljno je dokazati da $\Psi_{\mathbb{K}}$ čuva kvadrate. Zaista, za

$$X = \begin{bmatrix} \alpha + t & u \\ \overline{u} & \alpha - t \end{bmatrix} \in H_2(\mathbb{K})$$

vrijedi

$$X^2 = \begin{bmatrix} \alpha^2 + t^2 + \|u\|^2 + 2\alpha t & 2\alpha u \\ 2\alpha\overline{u} & \alpha^2 + t^2 + \|u\|^2 - 2\alpha t \end{bmatrix}.$$

S druge strane, kvadrat elementa $(\alpha, (t,u))$ u spin faktoru jednak je

$$(\alpha, (t,u))^2 = \big(\alpha^2 + t^2 + \|u\|^2,\, (2\alpha t, 2\alpha u)\big).$$

Zato je $\Psi_{\mathbb{K}}\big((\alpha,(t,u))^2\big) = X^2$. Dakle, $\Psi_{\mathbb{K}}$ je Jordanov izomorfizam.

Posebno dobivamo sljedeće izomorfizme:

spin faktor	izomorfna Jordanova algebra
$\mathrm{Spin}(\{0\})$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{Spin}(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$
$\mathrm{Spin}(\mathbb{R}^2)$	$H_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})$
$\mathrm{Spin}(\mathbb{R}^3)$	$H_2(\mathbb{C})$
$\mathrm{Spin}(\mathbb{R}^5)$	$H_2(\mathbb{H})$
$\mathrm{Spin}(\mathbb{R}^9)$	$H_2(\mathbb{O})$

Tablica 2: Niskodimenzionalni izomorfizmi spin faktora.

3.4 Albertova algebra $H_3(\mathbb{O})$

Promotrimo realni vektorski prostor $H_3(\mathbb{O})$ svih 3×3 hermitskih matrica nad oktonionima. Njegovi elementi imaju oblik

$$X = \begin{bmatrix} \alpha_1 & x_3 & \overline{x_2} \\ \overline{x_3} & \alpha_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x_1} & \alpha_3 \end{bmatrix}, \qquad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad x_i \in \mathbb{O}.$$

Dijagonalni dio ima tri realna parametra, a tri izvandijagonalna para daju po jednu kopiju realnog prostora $\mathbb{O}$. Zato je

$$\dim_{\mathbb{R}} H_3(\mathbb{O}) = 3 + 3 \cdot 8 = 27.$$

Matrični produkt u $\mathrm{M}_3(\mathbb{O})$ definiramo kao u Primjeru 1.10 (e). Za razliku od slučajeva nad $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ i $\mathbb{H}$, algebra $\mathrm{M}_3(\mathbb{O})$ s tim produktom nije asocijativna; prema Napomeni 1.30, nije čak ni alternativna. Zato se tvrdnja da simetrizirani produkt daje Jordanovu algebru ovdje ne može dobiti iz Propozicije 2.3. Na prostoru $H_3(\mathbb{O})$ ipak definiramo

$$X \circ Y := \frac{1}{2}(XY + YX) \tag{3.6}$$

Sljedeći teorem kaže da se time doista dobiva Jordanova algebra. Ta se algebra zove *Albertova algebra.* Povijesno, ovaj je primjer vezan uz Albertov rad o algebarskim aspektima kvantne mehanike; vidjeti [1].

Teorem 3.9 (Albertova algebra)**.** *Prostor $H_3(\mathbb{O})$ sa simetriziranim produktom* (3.6) *je realna unitalna prosta formalno realna Jordanova algebra dimenzije* 27*, s jedinicom I. Ta algebra nije specijalna.*

Skica dokaza. Najprije pokažimo da je produkt zatvoren na $H_3(\mathbb{O})$. Za matrični produkt dva faktora vrijedi $(XY)^* = Y^*X^*$, što slijedi iz antimultiplikativnosti oktonionskog konjugiranja. Ako su $X, Y \in H_3(\mathbb{O})$, tada je $X^* = X$ i $Y^* = Y$, pa

$$(X \circ Y)^* = \left(\frac{1}{2}(XY + YX)\right)^* = \frac{1}{2}(YX + XY) = X \circ Y.$$

Dakle, $X \circ Y \in H_3(\mathbb{O})$. Jedinica je matrica I, jer je $I = I^*$ i $I \circ X = X$ za svaki $X \in H_3(\mathbb{O})$.

Činjenica da produkt $\circ$ zadovoljava Jordanov identitet klasičan je rezultat o Albertovoj algebri. Dokaz se oslanja na alternativnost oktoniona i na Artinov teorem za alternativne algebre, ali je računski dug; potpuni dokazi nalaze se u [9, 13, 14].

Formalna realnost provjerava se kao u hermitskim matričnim primjerima nad $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ i $\mathbb{H}$. Neka je $X = [x_{ij}] \in H_3(\mathbb{O})$. Budući da je $x_{ji} = \overline{x_{ij}}$, za matrični kvadrat $X^2 = XX$ vrijedi

$$\sum_{i=1}^{3}(X^2)_{ii} = \sum_{1 \le i,j \le 3} x_{ij}x_{ji} = \sum_{1 \le i,j \le 3} x_{ij}\overline{x_{ij}} = \sum_{1 \le i,j \le 3} \|x_{ij}\|^2.$$

Desna strana je nenegativna i jednaka je nuli ako i samo ako je $X = 0$. Ako su $X_1, \ldots, X_m \in H_3(\mathbb{O})$ i

$$X_1^2 + \cdots + X_m^2 = 0,$$

zbrajanjem dijagonalnih elemenata dobivamo

$$0 = \sum_{r=1}^{m} \sum_{1 \le i,j \le 3} \|(X_r)_{ij}\|^2.$$

Svi pribrojnici su nenegativni, pa je $X_r = 0$ za svaki r. Time je dokazana formalna realnost.

Prostost se dokazuje Peirceovom dekompozicijom s obzirom na idempotente

$$P_1 = E_{11}, \qquad P_2 = E_{22}, \qquad P_3 = E_{33}.$$

Dijagonalne Peirceove komponente su jednodimenzionalne, a svaka izvandijagonalna komponenta prirodno je izomorfna realnom vektorskom prostoru $\mathbb{O}$. Iz Peirceovih pravila slijedi da svaki nenul ideal sadrži jednu od tih komponenti, a zatim i sve ostale. Zato su jedini Jordanovi ideali 0 i cijela algebra; za detalje vidjeti [9, 13, 14].

Nespecijalnost se dokazuje pomoću specijalnih Jordanovih identiteta. Glennie[20] je konstruirao identitete koji vrijede u svim specijalnim Jordanovim algebrama, ali ne vrijede u Albertovoj algebri. Stoga $H_3(\mathbb{O})$ nije specijalna; vidjeti [6, 9, 13, 14]. $\square$

Napomena 3.10. Albertova algebra je osnovni konačnodimenzionalni primjer iznimne Jordanove algebre. Njezina pojava u klasifikacijskom teoremu objašnjava zašto oktonioni imaju posebno mjesto u teoriji Jordanovih algebri: hermitske matrice nad $\mathbb{O}$ daju novu prostu formalno realnu Jordanovu algebru upravo u dimenziji 3, a taj primjer nije specijalan.

3.5 Jordan–von Neumann–Wignerov klasifikacijski teorem

Prethodni pododjeljci opisali su osnovne modele konačnodimenzionalnih formalno realnih Jordanovih algebri: hermitske matrične algebre nad $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ i $\mathbb{H}$, spin faktore i Albertovu algebru. Sljedeći teorem kaže da, uz pretpostavku prostosti, drugih primjera nema.

Prije iskaza kratko naznačimo ideju dokaza. Potpuni dokaz zahtijeva razvijeniju teoriju idempotenata, Peirceovih dekompozicija i koordinatnih algebri; vidjeti [9, 12, 13, 14]. U konačnodimenzionalnoj realnoj prostoj formalno realnoj Jordanovoj algebri postoji jedinica i može se odabrati maksimalna familija međusobno ortogonalnih primitivnih idempotenata

$$p_1, \ldots, p_r, \qquad p_1 + \cdots + p_r = 1.$$

Kao i ranije, idempotent $p \neq 0$ zovemo *primitivnim* ako se ne može zapisati kao zbroj dva nenul ortogonalna idempotenta. Broj r zove se *rang* algebre. Peirceova dekompozicija s obzirom na takav sustav rastavlja algebru na dijagonalne dijelove $\mathbb{R}p_i$ i izvandijagonalne komponente, a Peirceova pravila određuju njihovo međusobno množenje.

U rangu 2 dobivaju se spin faktori. U rangu barem 3 Peirceova pravila vode do koordinatizacije izvandijagonalnih komponenti pomoću realnih algebri s dijeljenjem. Asocijativni slučajevi daju hermitske matrične Jordanove algebre nad $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ i $\mathbb{H}$, dok se oktonionski slučaj pojavljuje samo u rangu 3 i daje Albertovu algebru $H_3(\mathbb{O})$. U pozadini tog koraka stoje klasični rezultati o realnim algebrama s dijeljenjem, uključujući Frobeniusov teorem u asocijativnom slučaju i Zornov teorem u alternativnom slučaju; vidjeti [5, 9, 13, 14, 15].

Teorem 3.11 (Jordan–von Neumann–Wignerova klasifikacija)**.** *Svaka konačnodimenzionalna realna prosta formalno realna Jordanova algebra izomorfna je jednoj od sljedećih algebri:*

(1) *jednodimenzionalnoj algebri* $\mathbb{R}$*;*

(2) *algebri* $H_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$*, gdje je* $n \geq 3$*;*

(3) *algebri* $H_n(\mathbb{C})$ *kompleksnih hermitskih matrica, gdje je* $n \geq 3$*;*

(4) *algebri* $H_n(\mathbb{H})$ *kvaternionskih hermitskih matrica, gdje je* $n \geq 3$*;*

[20] Charles M. Glennie, autor rada o specijalnim identitetima u Jordanovim algebrama iz 1966. godine.

(5) *spin faktoru* $\mathrm{Spin}(\mathbb{R}^m)$*, gdje je* $m \geq 2$*;*

(6) *Albertovoj algebri* $H_3(\mathbb{O})$.

Napomena 3.12. U popisu iz Teorema 3.11 nema preklapanja među navedenim slučajevima. Jednodimenzionalna algebra $\mathbb{R}$ izdvojena je posebno. Hermitske familije $H_n(\mathbb{R})$, $H_n(\mathbb{C})$ i $H_n(\mathbb{H})$ počinju od $n = 3$, jer su slučajevi reda 2 već obuhvaćeni spin faktorima; vidjeti Tablicu 2. Isto vrijedi i za $H_2(\mathbb{O})$. Slučaj $\mathrm{Spin}(\mathbb{R})$ ne pojavljuje se u teoremu, jer je $\mathrm{Spin}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ i ta algebra nije prosta. Albertova algebra $H_3(\mathbb{O})$ ostaje jedini iznimni slučaj.

Klasifikacijski teorem pokazuje da uvjeti konačnodimenzionalnosti, prostosti i formalne realnosti vrlo snažno ograničavaju strukturu Jordanove algebre: svaka takva algebra mora biti izomorfna jednom od konkretnih modela opisanih u prethodnim pododjeljcima. To su hermitske matrične algebre nad $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ i $\mathbb{H}$, spin faktori i iznimni oktonionski model reda 3. Važnost teorema je u tome što mnoge probleme o konačnodimenzionalnim formalno realnim Jordanovim algebrama svodi na te modele. U izvornom kvantnomehaničkom motivu oni opisuju algebarske prostore opservabli. U geometriji i analizi pozitivni elementi tih algebri vode do važnih konveksnih stožaca, primjerice do stožaca pozitivno semidefinitnih hermitskih matrica i do Lorentzovog stošca spin faktora.

4 Zadaci

Zadatak 1. Neka je $\mathcal{A}$ algebra nad poljem $\mathbb{F}$. Na istom vektorskom prostoru definiramo novo množenje $a * b := ba$, za $a, b \in \mathcal{A}$. Tako dobivenu algebru označavamo s $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ i zovemo *suprotna algebra*.

(a) Dokažite da je asocijator u $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ dan formulom

$$\langle a, b, c\rangle_{\mathrm{op}} = -\langle c, b, a\rangle, \qquad a, b, c \in \mathcal{A}.$$

(b) Zaključite da je $\mathcal{A}$ asocijativna ako i samo ako je $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ asocijativna.

(c) Dokažite da je $\mathcal{A}$ alternativna ako i samo ako je $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ alternativna.

(d) Ako su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ algebre nad $\mathbb{F}$, dokažite da je antihomomorfizam $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ isto što i homomorfizam algebri $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}^{\mathrm{op}}$.

Zadatak 2. Neka je $\mathcal{A}$ asocijativna algebra nad poljem $\mathbb{F}$ karakteristike različite od 2 i neka je $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ involutivni antiautomorfizam, tj. neka je $\theta^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$. Definiramo

$$H(\mathcal{A}, \theta) := \{a \in \mathcal{A} : \theta(a) = a\}.$$

(a) Dokažite da je $H(\mathcal{A}, \theta)$ vektorski potprostor od $\mathcal{A}$.

(b) Dokažite da je $H(\mathcal{A}, \theta)$ zatvoren s obzirom na simetrizirani produkt (2.4).

(c) Zaključite da je $H(\mathcal{A}, \theta)$ Jordanova podalgebra od $\mathcal{A}^+$.

(d) Primijenite to na realne asocijativne algebre $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ i $\mathrm{M}_n(\mathbb{H})$ i preslikavanje $\theta(X) := X^*$: ponovo zaključite da hermitske kompleksne i kvaternionske matrice čine realne Jordanove algebre s obzirom na simetrizirani produkt.

Zadatak 3. Neka je i kompleksna imaginarna jedinica.

(a) Dokažite da preslikavanje

$$\Phi : \mathbb{H} \to \mathrm{M}_2(\mathbb{C}), \qquad \Phi(a + bi + cj + dk) := \begin{bmatrix} a + b\mathrm{i} & c + d\mathrm{i} \\ -c + d\mathrm{i} & a - b\mathrm{i} \end{bmatrix}$$

definira injektivni homomorfizam realnih asocijativnih algebri. Nadalje, izračunajte $\det \Phi(a + bi + cj + dk)$ i usporedite dobiveni izraz s normom kvaterniona.

(b) Postoji li injektivni homomorfizam realnih algebri $\mathbb{H} \to \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$? Obrazložite odgovor.

Zadatak 4. Neka je $\mathcal{A}$ asocijativna algebra nad poljem $\mathbb{F}$ karakteristike različite od 2 i 3, promatrana kao specijalna Jordanova algebra $\mathcal{A}^+$ sa simetriziranm produktom (2.4). Kao i prije, komutator označavamo s $[x, y] = xy - yx$.

(a) Dokažite da za sve $x, y, z \in \mathcal{A}$ vrijedi

$$(x \circ y) \circ z - x \circ (y \circ z) = \frac{1}{4}[y, [x, z]].$$

(b) Zaključite da je $\mathcal{A}^+$ asocijativna ako i samo ako je $[y, [x, z]] = 0$ za sve $x, y, z \in \mathcal{A}$.

(c) Dokažite da je $\mathcal{A}^+$ alternativna ako i samo ako je $\mathcal{A}^+$ asocijativna.

(d) Zaključite da $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})^+$ nije alternativna.

Napomena. Pretpostavka $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 3$ koristi se samo u trećem dijelu zadatka. U glavnim primjerima $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ i $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ta je pretpostavka automatski ispunjena.

Zadatak 5. Neka su $\mathcal{J}$ i $\mathcal{K}$ unitalne Jordanove algebre nad istim poljem $\mathbb{F}$ karakteristike različite od 2. Za $x, y, z \in \mathcal{J}$ definiramo *Jordanov trostruki produkt*

$$\{x, y, z\} := (x \circ y) \circ z + (z \circ y) \circ x - (x \circ z) \circ y.$$

Istu oznaku koristimo i za Jordanov trostruki produkt u $\mathcal{K}$. Linearno preslikavanje $\phi : \mathcal{J} \to \mathcal{K}$ zove se *Jordanov trostruki homomorfizam* ako vrijedi

$$\phi(\{x, y, z\}) = \{\phi(x), \phi(y), \phi(z)\}, \qquad x, y, z \in \mathcal{J}.$$

Dokažite da je linearno preslikavanje $\phi : \mathcal{J} \to \mathcal{K}$ koje zadovoljava $\phi(1_{\mathcal{J}}) = 1_{\mathcal{K}}$ Jordanov homomorfizam ako i samo ako je Jordanov trostruki homomorfizam.

Zadatak 6. Neka je $\mathcal{A}$ algebra nad poljem $\mathbb{F}$. *Derivacija* algebre $\mathcal{A}$ je $\mathbb{F}$-linearni operator $\delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ takav da za sve $a, b \in \mathcal{A}$ vrijedi

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b).$$

U ovom zadatku taj pojam primjenjujemo na Jordanovu algebru $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})^+$, gdje je $n \geq 2$ i $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$, s obzirom na simetrizirani produkt. Dakle, derivacija Jordanove algebre $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})^+$ je linearni operator $\delta : \mathrm{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ takav da za sve $X, Y \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ vrijedi

$$\delta(X \circ Y) = \delta(X) \circ Y + X \circ \delta(Y).$$

(a) Dokažite da za svaku matricu $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ linearni operator

$$\delta_A : \mathrm{M}_n(\mathbb{F})^+ \to \mathrm{M}_n(\mathbb{F})^+, \qquad \delta_A(X) := AX - XA,$$

definira derivaciju Jordanove algebre $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})^+$.

(b) Dokažite da je $\delta_A = 0$ ako i samo ako je $A \in \mathbb{F}I$.

(c) Neka je δ proizvoljna derivacija od $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})^+$. Dokažite da je $\delta(I) = 0$ i da za svaki idempotent $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ vrijedi

$$\delta(P) = P\delta(P) + \delta(P)P.$$

(d) Stavimo $P_i := E_{ii}$. Dokažite da postoji matrica $A_0 \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ takva da derivacija

$$\delta' := \delta - \delta_{A_0}$$

zadovoljava

$$\delta'(P_i) = 0, \qquad 1 \le i \le n.$$

(e) Pretpostavimo da derivacija δ' zadovoljava $\delta'(P_i) = 0$ za sve i. Dokažite da tada za $i \neq j$ postoji skalar $\alpha_{ij} \in \mathbb{F}$ takav da je

$$\delta'(E_{ij}) = \alpha_{ij} E_{ij}.$$

(f) Dokažite da postoji dijagonalna matrica $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ takva da je

$$\delta'(X) = BX - XB, \qquad X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F}).$$

Za $n \ge 3$ koristite jednakosti

$$E_{ij} \circ E_{jk} = \frac{1}{2} E_{ik}$$

za međusobno različite indekse i, j, k. Za slučaj $n = 2$ posebno koristite jednakost

$$E_{12} \circ E_{21} = \frac{1}{2}(E_{11} + E_{22}).$$

(g) Zaključite da svaka derivacija Jordanove algebre $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})^+$ ima oblik

$$\delta(X) = AX - XA, \qquad X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F}),$$

za neku matricu $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. Pritom je matrica A određena jedinstveno do dodavanja skalarne matrice.

Zadatak 7. Neka je $\mathcal{J}$ konačnodimenzionalna realna Jordanova algebra i neka je $\delta : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ Jordanova derivacija. Odaberimo bilo koju normu na $\mathcal{J}$ i pripadnu operatorsku normu. Budući da su na konačnodimenzionalnom realnom vektorskom prostoru sve norme ekvivalentne, konvergencija reda u nastavku ne ovisi o izboru norme. Za $t \in \mathbb{R}$ definiramo

$$e^{t\delta} := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \delta^m,$$

pri čemu red apsolutno konvergira u operatorskoj normi, pa stoga i konvergira.

(a) Dokažite da je $e^{t\delta}$ dobro definiran linearni automorfizam vektorskog prostora $\mathcal{J}$ i da je njegov inverz $e^{-t\delta}$.

(b) Dokažite da je $e^{t\delta}$ Jordanov automorfizam algebre $\mathcal{J}$, tj. da vrijedi

$$e^{t\delta}(x \circ y) = e^{t\delta}x \circ e^{t\delta}y, \qquad x, y \in \mathcal{J}.$$

(c) Primijenite prethodni rezultat na derivacije realne Jordanove algebre $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})^+$ oblika $\delta_A(X) = AX - XA$ i pokažite da je

$$e^{t\delta_A}(X) = e^{tA}Xe^{-tA}.$$

Zadatak 8. Neka je $\mathcal{A}$ unitalna asocijativna algebra nad poljem $\mathbb{F}$ karakteristike različite od 2, promatrana kao specijalna Jordanova algebra $\mathcal{A}^+$.

(a) Ako je $a \in \mathcal{A}$ invertibilan, dokažite da je kvadratni operator $\mathcal{U}_a : \mathcal{A}^+ \to \mathcal{A}^+$ bijektivan i da mu je inverz $\mathcal{U}_{a^{-1}}$.

(b) Ako su $a, b \in \mathcal{A}$ invertibilni, dokažite da je $\mathcal{U}_a(b)$ invertibilan u asocijativnoj algebri $\mathcal{A}$ i da vrijedi

$$\mathcal{U}_a(b)^{-1} = a^{-1}b^{-1}a^{-1}.$$

(c) Zaključite da kvadratni operatori $\mathcal{U}_a$, za invertibilne elemente $a \in \mathcal{A}$, daju linearne automorfizme vektorskog prostora $\mathcal{A}$.

Zadatak 9. Neka je $\mathcal{A}$ unitalna asocijativna algebra nad poljem $\mathbb{F}$ karakteristike različite od 2 i neka je $p \in \mathcal{A}$ idempotent. Stavimo $f := 1 - p$.

(a) Dokažite da su p i f ortogonalni idempotenti, tj.

$$p^2 = p, \qquad f^2 = f, \qquad pf = fp = 0.$$

(b) Dokažite da vrijedi direktan rastav vektorskih prostora

$$\mathcal{A} = p\mathcal{A}p \oplus p\mathcal{A}f \oplus f\mathcal{A}p \oplus f\mathcal{A}f.$$

(c) Promatrajmo $\mathcal{A}$ kao specijalnu Jordanovu algebru $\mathcal{A}^+$. Dokažite da su Peirceovi prostori za idempotent p jednaki

$$\mathcal{A}_1^+(p) = p\mathcal{A}p, \qquad \mathcal{A}_{1/2}^+(p) = p\mathcal{A}f \oplus f\mathcal{A}p, \qquad \mathcal{A}_0^+(p) = f\mathcal{A}f.$$

Zadatak 10. Neka je $\mathcal{J}$ unitalna Jordanova algebra nad poljem $\mathbb{F}$ karakteristike 0 i neka je $e \in \mathcal{J}$ idempotent. Promotrimo Peirceovu dekompoziciju

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_1(e) \oplus \mathcal{J}_{1/2}(e) \oplus \mathcal{J}_0(e).$$

Definiramo linearni operator $\sigma_e : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ tako da za rastav

$$x = x_1 + x_{1/2} + x_0, \qquad x_\lambda \in \mathcal{J}_\lambda(e),$$

stavimo

$$\sigma_e(x) = x_1 - x_{1/2} + x_0.$$

(a) Dokažite da je $\sigma_e^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{J}}$.

(b) Koristeći Peirceova pravila, dokažite da je σ_e Jordanov automorfizam algebre $\mathcal{J}$.

(c) U posebnom slučaju $\mathcal{J} = \mathrm{M}_n(\mathbb{F})^+$ i $e = \mathrm{diag}(I_r, 0)$ opišite djelovanje operatora σ_e na blok-matrice.

Zadatak 11. Neka je $\mathcal{J}$ unitalna Jordanova algebra nad poljem $\mathbb{F}$ karakteristike 0 i neka je $e \in \mathcal{J}$ idempotent. Stavimo $f := 1 - e$ i promotrimo Peirceovu dekompoziciju

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_1(e) \oplus \mathcal{J}_{1/2}(e) \oplus \mathcal{J}_0(e).$$

(a) Dokažite da je $\mathcal{U}_e$ projekcija na $\mathcal{J}_1(e)$ duž $\mathcal{J}_{1/2}(e) \oplus \mathcal{J}_0(e)$.

(b) Dokažite da je $\mathcal{U}_f$ projekcija na $\mathcal{J}_0(e)$ duž $\mathcal{J}_1(e) \oplus \mathcal{J}_{1/2}(e)$.

(c) Dokažite da je

$$\mathrm{id}_{\mathcal{J}} - \mathcal{U}_e - \mathcal{U}_f$$

projekcija na $\mathcal{J}_{1/2}(e)$ duž $\mathcal{J}_1(e) \oplus \mathcal{J}_0(e)$.

(d) Dokažite da su Peirceovi projektori dani formulama

$$\pi_1 = 2\mathcal{L}_e^2 - \mathcal{L}_e, \qquad \pi_{1/2} = 4\mathcal{L}_e - 4\mathcal{L}_e^2, \qquad \pi_0 = \mathrm{id}_{\mathcal{J}} - 3\mathcal{L}_e + 2\mathcal{L}_e^2.$$

(e) Neka je $\mathcal{I}$ Jordanov ideal u $\mathcal{J}$. Dokažite da $\mathcal{L}_e(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I}$ i da projektori $\pi_1, \pi_{1/2}, \pi_0$ preslikavaju $\mathcal{I}$ u $\mathcal{I}$.

(f) Zaključite da vrijedi direktan rastav

$$\mathcal{I} = (\mathcal{I} \cap \mathcal{J}_1(e)) \oplus (\mathcal{I} \cap \mathcal{J}_{1/2}(e)) \oplus (\mathcal{I} \cap \mathcal{J}_0(e)).$$

Zadatak 12. Neka je $\mathcal{J}$ unitalna Jordanova algebra nad poljem $\mathbb{F}$ karakteristike 0 i neka je $e \in \mathcal{J}$ idempotent. Pretpostavimo da je $\mathcal{J}_{1/2}(e) = 0$.

(a) Dokažite da je

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_1(e) \oplus \mathcal{J}_0(e)$$

direktan rastav Jordanove algebre na Jordanove ideale.

(b) Dokažite da za sve $x \in \mathcal{J}_1(e)$ i $y \in \mathcal{J}_0(e)$ vrijedi $x \circ y = 0$.

(c) Ako je $\mathcal{J}$ prosta, zaključite da je $e = 0$ ili $e = 1$.

Zadatak 13. Neka je $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ i neka je τ realni trag iz (3.1). Na $H_n(\mathbb{K})$ definiramo

$$\langle X, Y \rangle_\tau := \tau(X \circ Y).$$

Dokažite da je $\langle \cdot, \cdot \rangle_\tau$ realni skalarni produkt. Zatim dokažite Jordanovu asocijativnost tog skalarnog produkta:

$$\langle X \circ Y, Z \rangle_\tau = \langle X, Y \circ Z \rangle_\tau, \qquad X, Y, Z \in H_n(\mathbb{K}).$$

Zadatak 14. Neka je $n \geq 3$. Opišite sve Jordanove automorfizme algebre $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$. Preciznije, dokažite da svaki automorfizam ima oblik

$$X \mapsto UXU^t,$$

gdje je $U \in O(n)$, i odredite kada dvije ortogonalne matrice induciraju isti automorfizam.

Zadatak 15. Neka je $n \geq 3$. Opišite sve Jordanove automorfizme realne Jordanove algebre $H_n(\mathbb{C})$. Dokažite da svaki automorfizam ima jedan od oblika

$$X \mapsto UXU^*, \qquad X \mapsto U\overline{X}U^*,$$

gdje je U unitarna matrica. Objasnite zašto su ta preslikavanja realno linearna i zašto čuvaju Jordanov produkt.

Zadatak 16. Neka je $n \geq 2$ i neka je $U \in \mathrm{M}_n(\mathbb{H})$ kvaternionska unitarna matrica, tj. $U^*U = I$. Dokažite da formula

$$\phi_U(X) = UXU^*$$

definira Jordanov automorfizam algebre $H_n(\mathbb{H})$. Odredite kada dvije kvaternionske unitarne matrice U i V induciraju isti automorfizam ovog oblika.

Zadatak 17. Opišite sve Jordanove derivacije algebre $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 3$. Dokažite da su to upravo preslikavanja

$$\delta_A(X) = AX - XA,$$

gdje je $A^t = -A$. Objasnite zašto je tada $\delta_A(X)$ opet simetrična matrica za svaki $X \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$.

Zadatak 18. Opišite sve Jordanove derivacije realne Jordanove algebre $H_n(\mathbb{C})$, $n \geq 3$. Dokažite da su to upravo preslikavanja

$$\delta_A(X) = AX - XA,$$

gdje je $A^* = -A$. Koje matrice A induciraju istu derivaciju?

Zadatak 19. Neka je $n \geq 2$ i neka je $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{H})$ antihermitska matrica, tj. $A^* = -A$. Dokažite da

$$\delta_A(X) = AX - XA$$

definira Jordanovu derivaciju algebre $H_n(\mathbb{H})$. Dokažite da je $\delta_A = 0$ ako i samo ako je $A = 0$. Posebno opišite derivacije koje nastaju iz matrica oblika $A = aI$, gdje je $a \in \mathbb{H}$ čisto imaginaran kvaternion.

Zadatak 20. Odredite sve idempotente u spin faktoru $\mathrm{Spin}(V)$. Dokažite da su, osim 0 i $(1, 0)$, svi idempotenti oblika

$$p_v = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}v\right), \qquad \|v\| = 1.$$

Dokažite da je $p_v + p_{-v} = (1, 0)$ i da je $p_v \circ p_{-v} = 0$.

Zadatak 21. Opišite sve Jordanove derivacije spin faktora $\mathrm{Spin}(V)$. Dokažite da svaka derivacija ima oblik

$$\delta(\alpha, u) = (0, Au),$$

gdje je $A : V \to V$ antisimetrični linearni operator u odnosu na dani skalarni produkt, tj.

$$\langle Au, v\rangle + \langle u, Av\rangle = 0, \qquad \text{za sve } u, v \in V.$$

Dokažite i obrat.

Zadatak 22. U spin faktoru $\mathrm{Spin}(V)$ odredite sve invertibilne elemente. Dokažite da je element $x = (\alpha, u)$ invertibilan ako i samo ako je

$$\det(x) = \alpha^2 - \langle u, u\rangle \neq 0,$$

i tada vrijedi

$$x^{-1} = \frac{1}{\det(x)}(\alpha, -u).$$

Objasnite kako se taj zaključak može čitati iz kvadratne jednadžbe (3.5).

Zadatak 23. U Albertovoj algebri $H_3(\mathbb{O})$ neka je, za $1 \leq i < j \leq 3$ i $u \in \mathbb{O}$, matrica $h_{ij}(u)$ definirana tako da na mjestu (i, j) ima u, na mjestu (j, i) ima $\overline{u}$, a na svim ostalim mjestima ima nulu. U ovom zadatku pojavljuju se samo produkti dviju oktonionskih matrica, pa nema nejasnoća oko postavljanja zagrada.

(a) Dokažite da za $i < j$ i $u, v \in \mathbb{O}$ vrijedi

$$h_{ij}(u) \circ h_{ij}(v) = \mathrm{Re}(u\overline{v})(E_{ii} + E_{jj}).$$

(b) Dokažite da za međusobno različite indekse $i < j < k$ i $u, v \in \mathbb{O}$ vrijedi

$$h_{ij}(u) \circ h_{jk}(v) = \frac{1}{2} h_{ik}(uv).$$

(c) Objasnite kako formule iz (a) i (b) konkretno pokazuju Peirceova pravila za tri standardna dijagonalna idempotenta u $H_3(\mathbb{O})$.

Zadatak 24. Koristeći Jordan–von Neumann–Wignerov klasifikacijski teorem, odredite, do izomorfizma, sve konačnodimenzionalne realne proste formalno realne Jordanove algebre dimenzije najviše 5.

Literatura

[1] A. A. Albert, *On a Certain Algebra of Quantum Mechanics*, Annals of Mathematics, Second Series **35** (1934), no. 1, 65–73. DOI: 10.2307/1968118.

[2] A. A. Albert, *Power-associative rings*, Transactions of the American Mathematical Society **64** (1948), no. 3, 552–593. DOI: 10.1090/S0002-9947-1948-0027750-7.

[3] J. C. Baez, *The Octonions*, Bulletin of the American Mathematical Society, New Series **39** (2002), no. 2, 145–205. Erratum: Bulletin of the American Mathematical Society, New Series **42** (2005), no. 2, 213. DOI: 10.1090/S0273-0979-01-00934-X; erratum DOI: 10.1090/S0273-0979-05-01052-9.

[4] M. Brešar, *Introduction to Noncommutative Algebra*, 2nd ed., Universitext, Springer, Cham, 2025. DOI: 10.1007/978-3-031-96296-7.

[5] F. G. Frobenius, *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **84** (1878), 1–63. DOI: 10.1515/crelle-1878-18788403.

[6] C. M. Glennie, *Some identities valid in special Jordan algebras but not valid in all Jordan algebras*, Pacific Journal of Mathematics **16** (1966), no. 1, 47–59. DOI: 10.2140/pjm.1966.16.47.

[7] I. N. Herstein, *On the Lie and Jordan rings of a simple associative ring*, American Journal of Mathematics **77** (1955), no. 2, 279–285. DOI: 10.2307/2372531.

[8] I. N. Herstein, *Jordan homomorphisms*, Transactions of the American Mathematical Society **81** (1956), no. 2, 331–341. DOI: 10.1090/S0002-9947-1956-0076751-6.

[9] N. Jacobson, *Structure and Representations of Jordan Algebras*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 39, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1968.

[10] N. Jacobson and C. E. Rickart, *Jordan homomorphisms of rings*, Transactions of the American Mathematical Society **69** (1950), no. 3, 479–502. DOI: 10.1090/S0002-9947-1950-0038335-X.

[11] S. Janardhan and R. V. Saraykar, *Causal cones, cone preserving transformations and causal structure in special and general relativity*, Gravitation and Cosmology **19** (2013), 42–53. Also available as arXiv:1208.4580 (2012). DOI: 10.1134/S0202289313010052.

[12] P. Jordan, J. von Neumann and E. Wigner, *On an Algebraic Generalization of the Quantum Mechanical Formalism*, Annals of Mathematics, Second Series **35** (1934), no. 1, 29–64. DOI: 10.2307/1968117.

[13] K. McCrimmon, *A Taste of Jordan Algebras*, Universitext, Springer, New York, 2004. DOI: 10.1007/b97489.

[14] R. D. Schafer, *An Introduction to Nonassociative Algebras*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 22, Academic Press, New York–London, 1966.

[15] M. Zorn, *Theorie der alternativen Ringe*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg **8** (1931), 123–147. DOI: 10.1007/BF02940993.