

# Poglavlje 5

## Aritmetičke funkcije

Kažemo da je funkcija  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  multiplikativna ako je  $f(mn) = f(m)f(n)$  za sve relativno proste  $m, n \in \mathbb{N}$ . Primjeri multiplikativnih funkcija su (pretpostavljamo da je  $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ )

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \quad (\text{broj brojeva od 1 do } n \text{ relativno prostih s } n),$$

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_k + 1) \quad (\text{broj pozitivnih djelitelja broja } n),$$

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \dots \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1} \quad (\text{zbroj pozitivnih djelitelja broja } n),$$

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & : n \text{ nije kvadratno slobodan,} \\ (-1)^k & : n \text{ je kvadratno slobodan.} \end{cases} \quad (\text{Möbiusova funkcija}),$$

$$\omega(n) = k \quad (\text{broj različitih prostih djelitelja broja } n).$$

**Teorem:** Ako je funkcija  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  multiplikativna, tada je i funkcija  $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$

također multiplikativna.

**Teorem (Möbiusova formula inverzije):** Neka je  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  proizvoljna funkcija i  $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$ . Tada je

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right).$$

**Zadatak 5.1.** Neka je  $n \in \mathbb{N}$ . Dokažite da  $2 \nmid \tau(n)$  ako i samo ako je  $n$  potpun kvadrat.

*Rješenje.* Neka je  $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ . Tada je  $\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$  što je neparno ako i samo ako  $2 \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k$ , tj. ako i samo ako je  $n = x^2$ .

**Zadatak 5.2.** Odredite sve  $n \in \mathbb{N}$  takve da je  $\tau(9n) = 10$ .

*Rješenje.* Iz definicije funkcije  $\tau$  vidimo da, ako je  $\tau(k) = 10 = 2 \cdot 5$ , tada je  $k = p^9$  ili  $k = pq^4$  za neke proste  $p, q$ . Kako je  $k = 9n$ , tada je  $n = 3^7$  ili  $n = 3^2p$ ,  $p \neq 3$  i lako se vidi da su svi ti brojevi rješenja zadatka.

**Zadatak 5.3.** Dokažite da broj oblika  $n = 12m + 9$ ,  $(m, 3) = 1$  ne može biti savršen.

*Rješenje.* Pretpostavimo da je  $\sigma(n) = 2n$ . Kako  $(4m + 3, 3) = 1$ , tada vrijedi

$$\sigma(n) = \sigma(3 \cdot (4m + 3)) = 4 \cdot \sigma(4m + 3) = 6 \cdot (4m + 3) = 2n.$$

Međutim, ovo nije moguće jer  $4 \nmid 6(4m + 3)$ .

**Zadatak 5.4.** Odredite jesu li sljedeće funkcije na skupu  $\mathbb{N}$  multiplikativne?

(a)  $F(n) = \sum_{d|n} (d, \mu(d))$ .

(b)  $G(n) = \sum_{d|n} (d, d + 2)$ .

(c)  $H(n) = \varphi(n^2)$ .

(d)  $S(n) = \begin{cases} n, & n = x^2, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$

(e)  $\omega(n) = \sum_{p|n \text{ prost}} 1$ .

(f)  $f(n) = \lfloor \sqrt{4n} \rfloor - \lfloor \sqrt{4n - 1} \rfloor$ .

*Rješenje.* (a) Primijetimo da je funkcija  $f(n) = (n, \mu(n))$  multiplikativna. Stoga je i funkcija  $F$  također multiplikativna.

(b) Primijetimo da je funkcija  $g(n) = (n, n + 2) = (n, 2)$  multiplikativna. Stoga je i funkcija  $G$  također multiplikativna.

(c) Ako je  $(a, b) = 1$ , tada je i  $(a^2, b^2) = 1$ . Dakle,  $H(ab) = \phi(a^2 b^2) = \phi(a^2) \phi(b^2) = H(a)H(b)$ .

(d) Ako je  $ab = x^2$  i  $(a, b) = 1$ , tada  $a, b$  moraju biti potpuni kvadrati. Stoga je funkcija  $S$  multiplikativna.

(e) Funkcija  $\omega(n)$  broji koliko različitih prostih djelitelja ima prirodan broj  $n$ . Nije teško provjeriti da za relativno proste  $a, b$  vrijedi  $\omega(ab) = \omega(a) + \omega(b)$  i stoga funkcija nije multiplikativna.

(f) Ideja ovdje je da su brojevi  $\lfloor \sqrt{4n} \rfloor$  i  $\lfloor \sqrt{4n - 1} \rfloor$  vrlo često jednaki. Preciznije, ako je  $a^2 \leq 4n < (a+1)^2$ , tada je  $\lfloor \sqrt{4n} \rfloor = a$  i  $a^2 - 1 \leq 4n - 1 < a^2 + 2a < (a+1)^2$ . Izraz  $\lfloor \sqrt{4n} \rfloor - \lfloor \sqrt{4n - 1} \rfloor$  je veći od 0 ako i samo ako je  $4n = a^2$  i u tom slučaju je jednak 1. Dakle,

$$f(n) = \begin{cases} 1 & : n = x^2, \\ 0 & : \text{inače,} \end{cases}$$

a to je multiplikativna funkcija.

**Zadatak 5.5.** Dokažite da za sve  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi  $\sigma(n) < n\sqrt{2\tau(n)}$ .

*Rješenje.* Funkcija  $\frac{\sigma(n)}{n\sqrt{\tau(n)}}$  je multiplikativna što nam daje ideju da provjerimo što se događa kad je  $n = p^k$ . Vrijedi

$$\frac{\sigma(p^k)}{p^k \tau(p^k)} = \frac{1 + p + \dots + p^k}{p^k \cdot \sqrt{k+1}} = \frac{p^{k+1} - 1}{p^k(p-1) \cdot \sqrt{k+1}} < \frac{1}{(1 - \frac{1}{p})\sqrt{k+1}}$$

Ova gornja ograda je skoro uvijek manja ili jednaka 1. Preciznije, ako je  $p \geq 5$ , tada je  $\frac{1}{(1 - \frac{1}{p})\sqrt{k+1}} \leq \frac{5}{4\sqrt{2}} < 1$ . Također, ako je  $k \geq 3$ , tada je  $\frac{1}{(1 - \frac{1}{p})\sqrt{k+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{4}} = 1$ .

Za  $p = 3$  imamo

$$\frac{\sigma(3^k)}{3^k \tau(3^k)} \begin{cases} \leq 1, & k \geq 3, \\ = \frac{1+3+9}{9 \cdot \sqrt{3}} = \frac{13}{9\sqrt{3}} < 1, & k = 2, \\ = \frac{1+3}{3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} < 1, & k = 1, \\ = 1, & k = 0. \end{cases}$$

U svakom slučaju je gornja ograda ovdje najviše 1. Za  $p = 2$  imamo

$$\frac{\sigma(2^k)}{2^k \tau(2^k)} \begin{cases} \leq 1, & k \geq 3, \\ = \frac{1+2+4}{4 \cdot \sqrt{3}} = \frac{7}{4\sqrt{3}}, & k = 2, \\ = \frac{1+2}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}, & k = 1, \\ = 1, & k = 0. \end{cases}$$

Ovdje je gornja ograda najviše  $\frac{3}{2\sqrt{2}}$ . Dakle,

$$\frac{\sigma(n)}{n\sqrt{\tau(n)}} \leq \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot 1 \dots \cdot 1 < \sqrt{2}.$$

**Zadatak 5.6.** Dokažite sljedeće identitete.

(a)  $\prod_{d|n} d = n^{\frac{\tau(n)}{2}}$ .

(b)  $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ .

(c)  $\sum_{d|n} \mu(d)\tau(d) = (-1)^{\omega(n)}$ .

(d)  $\sum_{d|n} |\mu(d)| = 2^{\omega(n)}$ .

(e)  $\sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)} = \frac{n}{\varphi(n)}$ .

*Rješenje.* (a) Osnovna ideja ovdje je uparivanje djelitelja  $d$  s  $\frac{n}{d}$ . Vrijedi

$$\prod_{d|n} d \cdot \prod_{d|n} d = \prod_{d|n} \left(d \cdot \frac{n}{d}\right) = n^{\tau(n)} \implies \prod_{d|n} d = n^{\frac{\tau(n)}{2}}.$$

(b) Funkcija  $\varphi$  je multiplikativna pa je tvrdnju dovoljno dokazati u slučaju  $n = p^k$ . Vrijedi

$$\sum_{d|p^k} \varphi(d) = 1 + (p-1) + p(p-1) + \dots + p^{k-1}(p-1) = 1 + p^k - 1 = p^k.$$

- (c) Primijetimo da je funkcija  $f(n) = \mu(d)\tau(d)$  multiplikativna pa je tvrdnju dovoljno dokazati u slučaju  $n = p^k$ . Vrijedi

$$\sum_{d|p^k} \mu(d)\tau(d) = \tau(1) - \tau(p) = 1 - 2 = -1.$$

iz čega po definiciji funkcije  $\omega(n)$  slijedi tvrdnja.

- (d) Primijetimo da je funkcija  $|\mu(n)|$  multiplikativna pa je tvrdnju dovoljno dokazati u slučaju  $n = p^k$ . Vrijedi

$$\sum_{d|p^k} |\mu(d)| = |\mu(1)| + |\mu(p)| = 2.$$

- (e) Primijetimo da je funkcija  $\frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)}$  multiplikativna pa je tvrdnju dovoljno dokazati u slučaju  $n = p^k$ . Vrijedi

$$\sum_{d|p^k} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)} = \frac{1}{\varphi(1)} + \frac{1}{\varphi(p)} = 1 + \frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1} = \frac{p^k}{\varphi(p^k)}.$$

**Zadatak 5.7.** Definirajmo funkciju  $H : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $H(n) = \frac{\tau(n)}{\sum_{d|n} \frac{1}{d}}$ . Odredite sve  $n$  za koje je  $H(n) \leq 2$ .

*Rješenje.* Znamo da je  $\sum_{d|n} \frac{1}{d} = \sum_{d|n} \frac{\frac{n}{d}}{n} = \frac{\sum_{d|n} d}{n} = \frac{\sigma(n)}{n}$ . Stoga je  $H(n) = \frac{\tau(n) \cdot n}{\sigma(n)}$ . To je multiplikativna funkcija pa pogledajmo što se događa kad je  $n = p^k$ . Vrijedi

$$H(p^k) = \frac{(k+1)p^k}{p^k + p^{k-1} + \dots + 1} = \frac{k+1}{1 + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^k}} = \frac{(k+1)(1 - \frac{1}{p})}{1 - \frac{1}{p^{k+1}}} > (k+1) \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Ova donja ograda je skoro uvijek barem 2 (što implicira da je  $H(p^k) > 2$ ). To nije istina samo za  $k = 1$  i za  $(k, p) = (2, 2)$ . Uz to, vrijedi  $H(p) = \frac{2p}{p+1}$ ,  $H(4) = \frac{12}{7}$ . Funkcija  $f(x) = \frac{2x}{x+1}$  je strogo rastuća na  $\mathbb{N}$  te je  $f(2) = \frac{4}{3}$ ,  $f(3) = \frac{3}{2}$ ,  $f(5) = \frac{5}{3}, \dots$  Također je

$$H(p^k) = \frac{(k+1)p^k}{p^k + \dots + 1} > 1$$

za sve proste brojeve  $p$  i  $k \geq 1$ .

Sada nije teško vidjeti da je  $H(4p_1 \dots p_m) > 2$  (jer je  $H(4)H(3) = \frac{12}{7} \cdot \frac{3}{2} > 2$ ) i da je  $H(p_1 \dots p_m) \geq H(p_1)H(p_2) \geq 2$  uz jednakost samo za  $m = 2, p_1 = 2, p_2 = 3$ . Stoga su sva rješenja  $n = p, 4, 6$ .

**Zadatak 5.8.** Dokažite da je  $p\sigma(p) \equiv 2 \pmod{\varphi(p)}$  za sve proste brojeve  $p$  i odredite sve složene brojeve  $n$  za koje je  $n\sigma(n) \equiv 2 \pmod{\varphi(n)}$ .

*Rješenje.* Za proste brojeve  $p$  vrijedi  $p\sigma(p) = p(p+1) \equiv 2 \pmod{p-1}$ . Pretpostavimo sada da je  $n$  složen i da vrijedi  $n\sigma(n) \equiv 2 \pmod{\varphi(n)}$ .

Ako postoji neparan prost broj  $p$  takav da  $p^2 | n$ , tada  $p | n, \varphi(n)$  pa tražena relacija nije moguća.

Ako  $4 \mid n$ , tada  $\varphi(n)$  ne smije biti djeljivo s 4. To je moguće jedino za  $n = 4$  i lako se provjeri da je to jedno rješenje.

Sada možemo pretpostaviti da je  $n = p_1 \dots p_k$  kvadratno slobodan. Tražena relacija postaje

$$p_1 \dots p_k \cdot (p_1 + 1) \dots (p_k + 1) \equiv 2 \pmod{(p_1 - 1) \dots (p_k - 1)}.$$

Ako  $n$  ima bar 2 neparna prosta djelitelja, tada  $4 \mid \sigma(n), \varphi(n)$  pa tražena relacija nije moguća. Ostaje nam još jedino mogućnost  $n = 2p$ . U tom slučaju je

$$2p \cdot 3(p + 1) \equiv 2 \pmod{p - 1} \iff 2 \cdot 6 \equiv 2 \pmod{p - 1} \iff p - 1 \mid 10.$$

Iz toga slijedi da su jedine mogućnosti  $p = 3, 11$ . Dakle, sva rješenja su  $n = 4, 6, 22$ .

**Zadatak 5.9.** Odredite najveći broj  $n < 1000$  takav da je  $\sigma(\varphi(n))$  prost broj.

*Rješenje.* Ako  $\varphi(n)$  ima bar 2 različita prosta faktora, broj  $\sigma(\varphi(n))$  je automatski složen zbog multiplikativnosti funkcija  $\varphi, \sigma$ . Nadalje, znamo da  $2 \mid \varphi(n)$  za sve  $n \geq 3$  pa stoga  $\varphi(n)$  mora biti oblika  $2^k$ , što je moguće samo ako je  $n$  produkt neke potencije broja 2 i različitih neparnih prostih brojeva oblika  $2^{2^m} + 1$ . Svi Fermatovi prosti brojevi manji od 1000 su 3, 5, 17, 257.

Također, znamo da je  $\varphi(n) \leq n \leq 1000$  i  $\sigma(2^k) = 2^{k+1} - 1$  pa je

$$\varphi(n) \in \{2, 4, 16, 64\}$$

(brojevi 8, 32, 128, 256, 512 otpadaju jer za njih broj  $2^{k+1} - 1$  nije prost). Nakon malo računanja po slučajevima može se dobiti

$$\varphi(n) = 2 \implies n \in \{3, 4, 6\},$$

$$\varphi(n) = 4 \implies n \in \{5, 8, 10, 12\},$$

$$\varphi(n) = 16 \implies n \in \{17, 32, 34, 40, 48\},$$

$$\varphi(n) = 64 \implies n \in \{85, 128, 136, 160, 170, 192, 204, 240\}.$$

Dakle, rješenje je  $n = 240$ .

**Zadatak 5.10.** Odredite sve  $n \in \mathbb{N}$  takve da je

(a)  $\varphi(n)\sigma(n) = n^2$ .

(b)  $\varphi(n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ .

(c)  $\varphi(n^2) + \varphi((n+1)^2) \geq 2n^2$ .

(d)  $\sigma(n) + \varphi(n) = n\tau(n)$ .

(e)  $n + \tau(n) = 2\varphi(n)$ .

(f)  $\varphi(n) \mid n - 1, \omega(n) \leq 2$ .

(g) (IMO shortlist 2000 \*)  $\tau(n)^3 = 4n$ .

Rješenje. (a) Funkcija  $\frac{\varphi(n)\sigma(n)}{n^2}$  je multiplikativna pa pogledajmo što se događa za  $n = p^k$ . Vrijedi

$$\frac{\varphi(p^k)\sigma(p^k)}{p^{2k}} = \frac{p^{k-1}(p-1) \cdot \frac{p^{k+1}-1}{p-1}}{p^{2k}} = \frac{p^{2k} - p^{k-1}}{p^{2k}} < 1.$$

Stoga dobivamo nejednakost  $\varphi(n)\sigma(n) \leq n^2$ , uz jednakost samo za  $n = 1$ .

(b) Funkcija  $\frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}}$  je multiplikativna pa pogledajmo što se događa za  $n = p^k$ . Vrijedi

$$\frac{\varphi(p^k)}{\sqrt{p^k}} = \frac{p^{k-1}(p-1)}{p^{\frac{k}{2}}}.$$

Primijetimo da je ovaj izraz skoro uvijek veći od 1. Preciznije, ako je  $k \geq 2$ , tada je  $k-1 \geq \frac{k}{2}$  pa je  $\frac{\varphi(p^k)}{\sqrt{p^k}} \geq p-1 \geq 1$ . Također je  $\frac{\varphi(p)}{\sqrt{p}} = \frac{p-1}{\sqrt{p}}$  što je veće od 1 za  $p \geq 3$ . Dakle, imamo

$$\frac{\varphi(p^k)}{\sqrt{p^k}} \begin{cases} = \frac{1}{\sqrt{2}} & : p^k = 2, \\ \geq p-1 \geq 1 & : k \geq 2, \\ \geq \frac{p-1}{\sqrt{p}} \geq \sqrt{2} & : p \geq 3, k = 1. \end{cases}$$

Iz ovoga zaključujemo da je  $\varphi(n) < \sqrt{n}$  samo za  $n = 2, 6$  i da je  $\varphi(n) = \sqrt{n}$  samo za  $n = 1, 4$ . Nije teško provjeriti da su  $n = 1, 2, 4, 6$  rješenja zadatka.

(c) Ako  $2 \mid n$ , tada je  $\varphi(n^2) \leq \frac{n^2}{2}$ , a ako  $2 \nmid n$ , tada je  $\varphi((n+1)^2) \leq \frac{(n+1)^2}{2}$ . U svakom slučaju vrijedi

$$\varphi(n^2) + \varphi((n+1)^2) \leq \max\left(\frac{n^2}{2} + (n+1)^2, n^2 + \frac{(n+1)^2}{2}\right) = \frac{n^2}{2} + (n+1)^2.$$

Ova gornja ograda je manja od  $2n^2$  za sve  $n \geq 5$ . Ručnom provjerom vidimo da su jedina rješenja  $n = 1, 2$ .

(d) I u ovom zadatku glavna ideja je ocjenjivanje veličina. Po definiciji je  $\sigma(n) = \sum_{d \mid n} d$ ,  $\varphi(n) = \sum_{(d,n)=1} 1$ . Stoga je

$$\sigma(n) \leq 1 + \sum_{1 < d \mid n} n = 1 + (\tau(n) - 1)n.$$

Također je  $\varphi(n) \leq n - \tau(n) + 1$  jer jedino broj 1 istovremeno djelitelj  $n$  i relativno prost s  $n$ . Dakle,

$$\sigma(n) + \varphi(n) \leq 1 + (\tau(n) - 1)n + n - \tau(n) + 1 = n\tau(n) - \tau(n) + 2$$

što je manje od  $n\tau(n)$  ako je  $n$  složen. Za  $n = 1$  je  $\sigma(1) + \varphi(1) = 2 > 1 = \tau(1)$ , a za  $n = p$  prost je  $\sigma(p) + \varphi(p) = 2p = p\tau(p)$ . Dakle, rješenje su svi prosti brojevi  $p$ .

- (e) Ako je  $n$  paran, tada je  $\varphi(n) \leq \frac{n}{2}$ . Stoga  $n$  i  $\tau(n)$  moraju biti neparni. Broj  $\tau(n)$  je neparan ako i samo ako je  $n$  potpun kvadrat. Stoga je  $n = x^2$ , gdje je  $x$  neparan.

Međutim, sada  $x \mid n, \varphi(n)$  pa mora vrijediti  $x \mid \tau(x^2)$ . Neka je  $x = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ . To znači da

$$p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \mid (2\alpha_1 + 1) \dots (2\alpha_k + 1).$$

Međutim, nije teško dokazati da je  $p_i^{\alpha_i} \geq 3^{\alpha_i} \geq 2\alpha_i + 1$  s jednakošću ako i samo ako je  $p_i = 3, \alpha_i = 1$ .

Dakle, jedini kandidati su  $n = 1^2, 3^2$  i lako se da su to zaista rješenja.

- (f) Ako  $p^2 \mid n$ , tada bi moralo vrijediti  $p \mid \varphi(n) \mid n - 1$  što nije moguće jer  $p \nmid n - 1$ . Dakle,  $n$  mora biti kvadratno slobodan. Primijetimo da su  $n = 1$  i prosti brojevi  $n = p$  rješenja zadatka. Pretpostavimo sad da je  $n = pq$  produkt 2 različita prosta broja jer je zbog uvjeta  $\omega(n) \leq 2$  to jedina preostala mogućnost.

Tada vrijedi  $(p - 1)(q - 1) \mid pq - 1$ . Zato  $p - 1 \mid pq - 1 \implies p - 1 \mid q - 1$ . Analogno se dobije  $q - 1 \mid p - 1$ . Iz ove dvije djeljivosti se dobije da mora vrijediti  $p = q$  što je nemoguće jer su  $p, q$  različiti. Dakle, sva rješenja su  $n = 1$  i  $n = p$ .

- (g) Primijetimo da  $n$  mora biti oblika  $n = 2k^3$  pa jednadžba postaje  $\tau(2k^3) = 2k$ . Pretpostavimo da je  $k = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}, 2 < p_1 < \dots < p_k$ . Tada imamo

$$(3\alpha + 2)(3\alpha_1 + 1) \dots (3\alpha_k + 2) = 2^{\alpha+1} p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}.$$

Iz ovoga možemo zaključiti da je  $p_1 \geq 5$ . Ključna ideja u ovom zadatku je da su s lijeve strane jednakosti linearne, a s desne eksponencijalne funkcije. Stoga je lijeva strana skoro uvijek manja od desne.

Preciznije, nije teško pokazati indukcijom da je  $2^{\alpha+1} > 3\alpha + 2$  za  $\alpha \geq 3$  i  $p_i^{\alpha_i} \geq 5^{\alpha_i} > 3\alpha_i + 1$  za  $\alpha_i \geq 1$ . Dakle,  $\alpha \leq 2$ .

Za  $\alpha = 0$  i  $\alpha = 2$  vrijedi  $2^{\alpha+1} = 3\alpha + 2$  pa je  $k = 0$  (zbog nejednakosti  $p_i^{\alpha_i} > 3\alpha_i + 1$ ). Lako se vidi da su  $k = 1, 4$  rješenja. Neka je sada  $\alpha = 1$ . Jednadžba postaje

$$5 \cdot (3\alpha_1 + 1) \dots (3\alpha_k + 2) = 4 \cdot p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}.$$

Indukcijom nije teško pokazati da je  $p_i^{\alpha_i} \geq 5^{\alpha_i} \geq \frac{5}{4}(3\alpha_i + 1)$  uz jednakost samo za  $p_i = 5, \alpha_i = 1$ . Stoga je jedino rješenje u ovom slučaju  $k = 10$ .

Dakle, sva rješenja su  $n = 2, 128, 2000$ .

**Zadatak 5.11.** Dokažite da za sve  $a, b \in \mathbb{N}$  vrijedi  $\tau(ab) \leq \tau(a)\tau(b)$ .

*Rješenje.* Funkcija  $\tau$  je multiplikativna pa možemo pretpostaviti  $a = p^k, b = p^l$ . Tada vrijedi

$$\tau(ab) = k + l + 1 < (k + 1)(l + 1) = \tau(a)\tau(b).$$

**Zadatak 5.12.** (\*) Odredite sve multiplikativne strogo rastuće funkcije  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  takve da je  $f(2) = 2$ .

*Rješenje.* Prvo odredimo  $f(3)$ . Imamo sljedeći niz nejednakosti

$$f(3)f(5) = f(15) < f(18) = 2f(9) < 2f(10) = 4f(5) \implies f(3) < 4.$$

Zaključujemo da je  $f(3) = 3$ . Kako je onda  $f(6) = 6$ , automatski zaključujemo da je  $f(4) = 4$ ,  $f(5) = 5$ .

Sada je  $f(10) = 2f(5) = 10$  pa imamo i da je  $f(n) = n$  za sve  $n \leq 10$ . Tada je  $f(18) = 2f(9) = 18$  pa imamo da je  $f(n) = n$  za sve  $n \leq 18$ . Nastavljajući induktivno ovaj postupak dobit ćemo da je  $f(n) = n$  za sve  $n \in \mathbb{N}$  i lako se provjeri da je to stvarno rješenje ove funkcijske jednadžbe.

**Zadatak 5.13.** (\*) Odredite sve rastuće funkcije  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  takve da je  $f(2) = 2$  i  $f(mn) = f(m)f(n)$  za sve  $m, n \in \mathbb{N}$ .

*Rješenje.* Prvo vidimo da je  $f(2^n) = 2^n$  za sve  $n \in \mathbb{N}$ . Neka je  $p^k$  potencija prostog broja i  $n \in \mathbb{N}$  takav da je  $2^n \leq p^k < 2^{n+1}$ . Tada je

$$2^n \leq f(p)^k \leq 2^{n+1} \implies \frac{1}{2} \leq \frac{f(p)^k}{p^k} \leq 2.$$

Ako je  $f(p) \geq p + 1$ , izraz  $\frac{f(p)^k}{p^k}$  će za dovoljno veliki  $k$  biti veći od 2, a ako je  $f(p) \leq p - 1$ , izraz  $\frac{f(p)^k}{p^k}$  će za dovoljno veliki  $k$  biti manji od  $\frac{1}{2}$ . Stoga je  $f(p) = p$  i iz toga se lako dobije da mora biti  $f(n) = n$  za sve  $n \in \mathbb{N}$ . Lako se provjeri da je to zaista rješenje.

**Napomena:** Paul Erdős je 1946. dokazao teorem koji kaže da je svaka rastuća multiplikativna funkcija  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$  nužno oblika  $f(n) = n^a$  za neki  $a \geq 0$ . Dokaz teorema dijeli se na dva dijela.

**Teorem A:** Ako je  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$  rastuća i potpuno multiplikativna (tj.  $f(mn) = f(m)f(n)$  za sve  $m, n \in \mathbb{N}$ ). tada postoji  $a \geq 0$  takav da je  $f(n) = n^a$  za sve  $n \in \mathbb{N}$ .

**Teorem B:** Ako je  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$  rastuća i multiplikativna, tada je  $f$  potpuno multiplikativna.

Dokaz Teorema A je sličan rješenju zadatka 5.13. Dokazi oba teorema mogu se naći u [1].

# Bibliografija

- [1] E. Howe: *A new proof of Erdős's theorem on monotone multiplicative functions*, <https://services.artofproblemsolving.com/download.php?id=YXROYWNoWVudHMvMy91LzAzODljZWU3ZjI4M2VjMGUyZDc0OTFlZWZiODc5Njk1NDljM2MxLnBkZg=&rn=RXJkb3MgVGh1b3J1bS5wZGY=>

5