Aktuarska matematika II

Uputa: formule vrijede samo uz odgovarajuće uvjete na razdiobe, funkcije odn. parametre koji se u njima spominju.

Modeli teorije rizika

Osnovni model

- Zahtjevi stižu u vremenima $0 < T_1 \le T_2 \le T_3 \le \cdots$.
- Šteta koja stiže u vremenu T_i ima iznos X_i. Niz $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ je n.j.d.
- Procesi $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ su nezavisni.

Funkcija izvodnica momenata sl.var. X

$$m_X(s) = Ee^{sX}$$

Momenti sl.var. X

$$EX^n = \int x^n dF(x) = \frac{d^n}{ds^n} m_X(0).$$

$$E|X|^n = n \int x^{n-1} P(|X| > x) dx$$

Očekivanje i varijanca uvjetovanjem

$$ES = E(E(S|X))$$

$$\mathrm{var} S = E(\mathrm{var}(S|X)) + \mathrm{var}(E(S|X))$$

Miješanje razdioba

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} F_i(x)$$

Proces obnavljanja definiramo kao

$$N(t) = \mathrm{card}\{i \in \mathbb{N} : T_i \le t\}, t \ge 0,$$

za n.j.d. sl. varijable (W_i) te

$$T_0 = 0, T_n = T_{n-1} + W_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

$(N(t))$ je **homogeni Poissonov proces**, ako $W_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$
CGT za proces obnavljanja za $t \to \infty$, $\lambda = 1/EW_1$, $\mathrm{var} W_1 < \infty$

$$\frac{N(t) - \lambda t}{\sqrt{\mathrm{var} W_1\, t/(EW_1)^3}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Pareto razdioba

$$\overline{F}(t) = \left(\frac{\kappa}{\kappa + t}\right)^\alpha,\ t > 0$$

Očekivanje i varijanca $\mathrm{Par}(\alpha,\kappa)$

$$EX = \frac{\kappa}{\alpha - 1}, \mathrm{var} X = \frac{\alpha\kappa}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$$

Gama razdioba

$$f(t) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} \exp(-\beta t),\ t > 0,$$

Očekivanje i varijanca $X \sim \Gamma(\alpha,\beta)$

$$EX = \frac{\alpha}{\beta},\ \text{ i } \mathrm{var} X = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

Lognormalna razdioba $X \sim LN(\mu,\sigma^2)$
Očekivanje i varijanca

$$EX = e^{\mu+\sigma^2/2},\ \mathrm{var} X = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu+\sigma^2}$$

Weibullova razdioba

$$\overline{F}(t) = e^{-ct^\tau},\ t > 0.$$

Očekivani manjak (expected shortfall)
Za $EY < \infty$, $Y \sim F$ definiramo

$$y \mapsto e_F(u) = E(Y - y | Y > y)$$

CGT za proces ukupnih šteta za $t \to \infty$, $\mathrm{var} W_i < \infty$ i $\mathrm{var} X_i < \infty$

$$\frac{S(t) - ES(t)}{\sqrt{\mathrm{var} S(t)}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Teorija nesolventnosti

Proces rizika (risk process)

$$R(t) = u + ct - S(t),$$

Vjerojatnost propasti

$$\Psi(u) = P(\inf_{t>0} R(t) < 0)$$

Koeficijent prilagodbe $\xi > 0$ zadovoljava

$$m_{X-cW}(\xi) = Ee^{\xi(X-cW)} = 1$$

Za $W \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ posebno

$$\lambda m_X(\xi) = \lambda + c\xi$$

Ako $c = (1+\theta)\lambda\mu_1$, $\mu_1 = EX_1$, tada

$$m_X(\xi) = 1 + (1+\theta)\mu_1\xi$$

Bayesovska statistika

Bayesova formula

$$f(\theta|\mathbf{x}) = f(\theta) f(\mathbf{x}|\theta)/f(\mathbf{x})$$

Procjenitelj teorijom povjerenja za faktor povjerenja z je

$$z \cdot \overline{X} + (1-z) \cdot \mu$$

Empirijska Bayesovska teorija povjerenja
Procjena za $m(\theta)$ je obliku

$$z\overline{X} + (1-z)E[m(\theta)]$$

gdje

$$z = \frac{n}{n + E[s^2(\theta)]/\mathrm{var}(m(\theta))}.$$

$$m(\theta) = E(X_i|\theta)\ \text{ i }\ s^2(\theta) = \mathrm{var}(X_i|\theta).$$

Sustav bonusa

Stacionarna razdbioba Markovljevog lanca s matricom prijelaza P zadovoljava

$$\pi = \pi P$$

Vjerojatnost prijave štete

$$P(\text{ nezgoda })P(X > c_u | \text{ nezgoda }),$$

gdje je c_u ušteda premija osiguranika unutar njegovog vremenskog horizonta.

Analiza razvojnih trokuta

Za razvojne faktora $f(i)$ i završnu godina razvoja šteta k, definiramo

$$g(j) = f(j+1)\cdots f(k)$$

Bruto faktor = udio kumulativne štete do razvojne godine j u krajnjoj šteti:

$$\frac{1}{g(j)}$$

Udio još nerazvijenih šteta u krajnim štetama za godinu j:

$$1 - \frac{1}{g(j)}$$

Metode (sa ili bez prilagodbe za inflaciju): a) razvojnih faktora, b) prosječnog troška po šteti, c) Bornhuetter-Fergusonova...

Generalizirani linearni modeli

Eksponencijalne familije Gustoće su oblika

$$f(y;\theta,\varphi) = \exp\left[\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\varphi)} + c(y,\varphi)\right]$$

gdje je b' invertibilna na svojoj domeni, θ prirodni parametar, φ parametar disperzije ili skaliranja.

$$\mu = E[Y] = b'(\theta); \quad \theta = b'^{-1}(\mu).$$

$$\mathrm{var}(Y) = a(\varphi)b''(\theta) = a(\varphi)V(\mu)$$

Komponente GLM-a: eksponencijalna familija, koeficijenti β_i i funkcija veze g. Povezani su dijagramom

$$(\mathbf{x}_i) \longmapsto \eta_i = \beta_1 x_{i,1} + \cdots + \beta_r x_{i,r} \overset{h}{\longmapsto} \theta_i \overset{b'}{\longmapsto} \mu_i$$

Funkcija veze je $g = h^{-1} \circ b'^{-1}$. Ona je kanonska ako izaberemo $g = b'^{-1}$. Za dane kovarijate $\mathbf{x}_i$ i β_i vrijedi $EY_i = g^{-1}(\beta_1 x_{i,1} + \cdots + \beta_r x_{i,r})$
Test restringiranog modela (s q parametara) u odn. na veći model (s p parametara):
▷ Koristeći MLE procjenimo parametre u oba modela modela
▷ Nadjemo maksimalnu log-vjerodostojnost u većem i restringiranom modelu, $\hat{l}_M$ odn. $\hat{l}_0$
▷ Računamo **log–likelihood ratio statistics** (statistiku omjera vjerodostojnosti)

$$2(\hat{l}_M - \hat{l}_0).$$

Ako je ona iznad kritične vrijednosti za izabrani nivo značajnosti i razdiobu χ^2 sa $p-q$ stupnjeva slobode odbacujemo H_0. Testna statistika preko razlike devijanci

$$2(\hat{l}_M - \hat{l}_0) = d_{M_0} - d_M$$

Devijanca modela M, u odn. na zasićeni model

$$d_M = 2(\hat{l}_F - \hat{l}_M)$$

gdje je $\hat{l}_F$ maksimalna log-vjerodostojnost u zasićenom modelu.

Neki kvantili

razdiobaF	u	$q_u = F^{\leftarrow}(u)$
$N(0,1)$	0.90	1.282
$N(0,1)$	0.95	1.645
$N(0,1)$	0.975	1.960
$N(0,1)$	0.99	2.326
$\chi^2(1)$	0.90	2.706
$\chi^2(1)$	0.95	3.841
$\chi^2(1)$	0.975	5.024
$\chi^2(1)$	0.99	6.635
$\chi^2(2)$	0.90	4.605
$\chi^2(2)$	0.95	5.991
$\chi^2(2)$	0.975	7.378
$\chi^2(2)$	0.99	9.210