

Metoda Bellmanovih funkcija u analizi i vjerojatnosti

Kolegij na doktorskom studiju, predavanje #21

Bilinearno ulaganje u Orliczevim prostorima

V. Kovač (PMF–MO)

Prema članku: V. K., K. A. Škreb, *Bilinear embedding in Orlicz spaces for divergence-form operators with complex coefficients*, J. Funct. Anal. **284** (2023), article 109884, 32 pp.
17. svibnja 2024.

Kompleksni eliptički operatori

PONOVIMO: ELIPTIČKI OPERATORI U DIVERGENCIJSKOJ FORMI

Eliptički operator u divergencijskoj formi (kompleksni i ne-glatki) pridružen A je formalno definiran:

$$L_A f := -\operatorname{div}(A \nabla f),$$

tj.

$$(L_A f)(x) := - \sum_{i,j=1}^d \partial_i (a_{i,j}(x) \partial_j f(x)).$$

Ovo je klasično smisljeno samo ako su koeficijenti od A glatki. Općenito je od interesa slučaj kada su oni samo izmjerivi.

Gledat ćemo operatorsku polugrupu na $L^2(\mathbb{R}^d)$ generiranu s $-L_A$:

$$T_t^A := \exp(-tL_A).$$

PONOVIMO: p -ELIPTIČNOST

Carbonaro i Dragičević (2016) definirali su da je A p -eliptička za $p \in [1, \infty]$ ako vrijedi:

$$\Delta_p(A) := \operatorname{ess\,inf}_{x \in \mathbb{R}^d} \min_{\substack{\xi \in \mathbb{C}^d \\ |\xi|=1}} \operatorname{Re} \left\langle A(x)\xi, \xi + \left|1 - \frac{2}{p}\right| \bar{\xi} \right\rangle_{\mathbb{C}^d} > 0.$$

Za $2 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$ vrijedi

$$\lambda(A) = \Delta_2(A) \geq \Delta_{p_1}(A) \geq \Delta_{p_2}(A)$$

i imamo inkluzije

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{eliptičke} \\ \text{matrice} \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{2-eliptičke} \\ \text{matrice} \end{array} \right\} \supseteq \left\{ \begin{array}{l} p_1\text{-eliptičke} \\ \text{matrice} \end{array} \right\} \supseteq \left\{ \begin{array}{l} p_2\text{-eliptičke} \\ \text{matrice} \end{array} \right\} \\ &\supseteq \left\{ \begin{array}{l} \text{matrice koje su } p\text{-eliptičke} \\ \text{za svaki } 1 < p < \infty \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{realne eliptičke} \\ \text{matrice} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Orliczevi prostori

ORLICZEVI PROSTORI

Njihova ideja je poopćiti koncept L^p norme.

Motivacija su uglavnom funkcijski prostori “blizu” L^1 ili L^∞ , ali i (kao ovdje) “finija skala” funkcijskih prostora između L^1 i L^∞ .

$\Phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ je *Youngova funkcija* ako vrijedi

$$\Phi \text{ je konveksna, } \Phi(0) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(s)}{s} = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\Phi(s)}{s} = \infty.$$

Konjugirana Youngova funkcija je $\Psi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$,

$$\Psi(t) := \sup_{s \in (0, \infty)} (st - \Phi(s)) = \int_0^t (\Phi')^{-1}(r) \, dr.$$

Youngova nejednakost:

$$st \leq \Phi(s) + \Psi(t) \quad \text{za svake } s, t \in [0, \infty).$$

ORLICZEVI PROSTORI

Luksemburška norma $\|\cdot\|_{\Phi}$ definirana je za (klase g.s. jednakih) izmjerivih funkcija $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ kao

$$\|f\|_{\Phi} := \inf \left\{ \alpha \in \langle 0, \infty \rangle : \int_{\mathbb{R}^d} \Phi \left(\frac{|f(x)|}{\alpha} \right) dx \leq 1 \right\}.$$

Time dolazimo i do *Orliczevog prostora* $L^{\Phi}(\mathbb{R}^d)$.

Za neku konačnu konstantu K uvjet

$$\Phi(2s) \leq K\Phi(s) \quad \text{za svaki } s \in [0, \infty)$$

garantira da je

$$\|\cdot\|_{\Phi}^* \sim \|\cdot\|_{\Psi}$$

i

$$L^{\Phi}(\mathbb{R}^d)^* \cong L^{\Psi}(\mathbb{R}^d).$$

NAŠE DODATNE PRETPOSTAVKE

Mi dodatno pretpostavljamo (da su Φ i Ψ “poput” potencija):

- Φ i Ψ su međusobno konjugirane Youngove funkcije,
- Φ i Ψ su C^1 na $[0, \infty)$ i C^2 na $\langle 0, \infty \rangle$,
- $\Phi''(s), \Psi''(s) > 0$ za svaki $s \in \langle 0, \infty \rangle$,
- Φ' je strogo konveksna na $\langle 0, \infty \rangle$ i $\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\Phi'(s)}{s} = 0$,
- $\sup_{s \in (0, \infty)} \frac{s\Phi'(s)}{\Phi(s)} < \infty$,
- $1 < \inf_{s \in (0, \infty)} \frac{s\Phi''(s)}{\Phi'(s)} \leq \sup_{s \in (0, \infty)} \frac{s\Phi''(s)}{\Phi'(s)} < \infty$.

NAŠE DODATNE PRETPOSTAVKE

Posljedično:

Φ' i Ψ' su međusobno inverzne rastuće bijekcije na $[0, \infty)$.

Zadnja tri uvjeta su ekvivalentna s:

- Ψ' je strogo konkavna na $\langle 0, \infty \rangle$ i $\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\Psi'(s)}{s} = \infty$,
- $\inf_{s \in (0, \infty)} \frac{s\Psi'(s)}{\Psi(s)} > 1$,
- $0 < \inf_{s \in (0, \infty)} \frac{s\Psi''(s)}{\Psi'(s)} \leq \sup_{s \in (0, \infty)} \frac{s\Psi''(s)}{\Psi'(s)} < 1$.

Posljedično:

$$\|\cdot\|_{\Phi}^* \sim \|\cdot\|_{\Psi}.$$

PRIMJERI

Primjer 1. Lebesgueovi prostori L^p .

$$\Phi(s) = \frac{s^p}{p}, \quad \Psi(s) = \frac{s^q}{q} \quad \text{za } p \in \langle 2, \infty \rangle, \quad q \in \langle 1, 2 \rangle, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

$$\|\cdot\|_{\Phi} \sim \|\cdot\|_{L^p}, \quad \|\cdot\|_{\Psi} \sim \|\cdot\|_{L^q}.$$

Primjer 2. Zygmundovi prostori $L^r \log L$.

$$\Phi(s) = s^r \log(s + e) \quad \text{za } r \in \langle 2, \infty \rangle.$$

PRIMJERI

Primjer 3. Superpozicija potencija s eksponentima iz $\langle 2, \infty \rangle$.

$$\Phi(s) = s^p + s^r \quad \text{za } 2 < r < p < \infty.$$

$$\Phi(s) = \int s^t d\mu(t)$$

za pozitivnu Borelovu mjeru μ s kompaktnim nosačem u $\langle 2, \infty \rangle$.

Primjer 4. Superpozicija potencija s eksponentima iz $\langle 1, 2 \rangle$.

$$\Psi(s) = s^q + s^r \quad \text{za } 1 < q < r < 2.$$

$$\Psi(s) = \int s^t d\mu(t)$$

za pozitivnu Borelovu mjeru μ s kompaktnim nosačem u $\langle 1, 2 \rangle$.

Glavni rezultat

PONOVIMO: BILINEARNO ULAGANJE ZA ELIPTIČKE OPERATORE

U daljnjem pretpostavljamo da su $A, B: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}^{d \times d}$ eliptičke matrične funkcije s L^∞ koeficijentima.

Teorem [Carbonaro i Dragičević (2016)]. Ako su $A, B: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}^{d \times d}$ p -eliptičke, tada vrijedi ocjena

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} |(\nabla T_t^A f)(x)| |(\nabla T_t^B g)(x)| \, dx \, dt \leq 20 C_p(A, B) \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Pritom je

$$C_p(A, B) := \frac{\max\{\Lambda(A), \Lambda(B)\}}{\min\{\Delta_p(A), \Delta_p(B)\} \min\{\lambda(A), \lambda(B)\}}.$$

ŠTO BI BILA Φ -ELIPTIČNOST?

Za Youngovu funkciju Φ ima smisla definirati:

$$\Delta_{\Phi}(A) := \operatorname{ess\,inf}_{x \in \mathbb{R}^d} \inf_{\substack{\xi \in \mathbb{C}^d, |\xi|=1 \\ s \in (0, \infty)}} \operatorname{Re} \left\langle A(x)\xi, \xi + \frac{s\Phi''(s) - \Phi'(s)}{s\Phi''(s) + \Phi'(s)} \bar{\xi} \right\rangle_{\mathbb{C}^d}.$$

U posebnom slučaju $\Phi(s) = s^p/p$ izraz postaje $\Delta_p(A)$.

Ipak, kod nas je naprosto

$$\Delta_{\Phi}(A) = \Delta_p(A)$$

za $p \in [2, \infty]$ t.d. je

$$\sup_{s \in (0, \infty)} \left| \frac{s\Phi''(s) - \Phi'(s)}{s\Phi''(s) + \Phi'(s)} \right| = 1 - \frac{2}{p}, \quad \text{tj. } p = \sup_{s \in (0, \infty)} \frac{s\Phi''(s)}{\Phi'(s)} + 1.$$

VEZA S NEDAVNOM LITERATUROM

Cialdea i Maz'ya (2021) uveli su pojam izvjesne Φ -disipativnosti, kao pokušaj u smjeru karakterizacije L^{Φ} -kontraktivnosti.

Uz dodatnu pretpostavku da je $\operatorname{Im} A$ simetrična potom su pokazali da je taj koncept ekvivalentan s uvjetom

$$\left| \Phi''(s) - \frac{\Phi'(s)}{s} \right| \left| \langle \operatorname{Im} A(x)\xi, \xi \rangle_{\mathbb{R}^d} \right| \leq 2 \left(\frac{\Phi'(s)\Phi''(s)}{s} \right)^{1/2} \langle \operatorname{Re} A(x)\xi, \xi \rangle_{\mathbb{R}^d}$$

za svaki $s \in (0, \infty)$, g.s. $x \in \mathbb{R}^d$ i svaki $\xi \in \mathbb{R}^d$.

U posebnoj slučaju $\Phi(s) = s^p/p$ taj uvjet postaje njihova prethodno spomenuta karakterizacija L^p -disipativnosti, tj. L^p -kontraktivnosti.

BILINEARNO ULAGANJE U ORLICZEVIM PROSTORIMA

U daljnjem pretpostavljamo da Φ i Ψ zadovoljavaju sve pretpostavke iz prethodnog odjeljka te da je

$$p = \sup_{s \in (0, \infty)} \frac{s\Phi''(s)}{\Phi'(s)} + 1.$$

Teorem [K. i Škreb (2021)]. Ako su $A, B: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}^{d \times d}$ p -eliptičke, tada vrijedi ocjena

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} |(\nabla T_t^A f)(x)| |(\nabla T_t^B g)(x)| \, dx \, dt \leq 40 C_p(A, B) D(\Phi, \Psi) \|f\|_\Phi \|g\|_\Psi.$$

Pritom je $C_p(A, B)$ ista kao ranije te

$$D(\Phi, \Psi) := \max \left\{ 1, \frac{M}{\tilde{m}} \right\} \left(\frac{\tilde{m}}{\tilde{M}} \frac{\tilde{M} - 1}{\tilde{m} - 1} \right)^{1/2}$$

uz

$$M := \sup_{s \in (0, \infty)} \frac{s\Phi'(s)}{\Phi(s)}, \quad \tilde{m} := \inf_{s \in (0, \infty)} \frac{s\Phi''(s)}{\Phi'(s)}, \quad \tilde{M} := \sup_{s \in (0, \infty)} \frac{s\Phi''(s)}{\Phi'(s)}.$$

Dokaz

PONOVIMO: GENERALIZIRANI HESSIJAN

Definiramo *generalizirani Hessijan* funkcije $\mathfrak{X}: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ obzirom na matrice $A, B \in M_d(\mathbb{C})$, u oznaci

$$H_{\mathfrak{X}}^{A,B}[(u, v); (\zeta, \eta)],$$

kao skalarni produkt vektora

$$(\text{Hess}(\mathfrak{X}; (u, v)) \otimes I_d) \begin{bmatrix} \text{Re } \zeta \\ \text{Im } \zeta \\ \text{Re } \eta \\ \text{Im } \eta \end{bmatrix} \in (\mathbb{R}^d)^4$$

i

$$\begin{bmatrix} \text{Re } A & -\text{Im } A & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \text{Im } A & \text{Re } A & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \text{Re } B & -\text{Im } B \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \text{Im } B & \text{Re } B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Re } \zeta \\ \text{Im } \zeta \\ \text{Re } \eta \\ \text{Im } \eta \end{bmatrix} \in (\mathbb{R}^d)^4.$$

MANJE-VIŠE PONOVI MO: SKICA DOKAZA

Neka je $\mathfrak{X}: \mathbb{C}^2 \rightarrow [0, \infty)$ zasad nepoznata funkcija.

Za $R > 0$ označimo $\psi_R(x) := \psi(x/R)$ i definirajmo

$$\mathcal{E}_R(t) := \int_{\mathbb{R}^d} \psi_R(x) \mathfrak{X}((T_t^A f)(x), (T_t^B g)(x)) \, dx.$$

S jedne strane:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_R(0) - \mathcal{E}_R(\tau) &\leq \mathcal{E}_R(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi_R(x) \mathfrak{X}(f(x), g(x)) \, dx \\ &\lesssim_{\Phi, \Psi} \int_{\mathbb{R}^d} \psi_R(x) (\Phi(|f(x)|) + \Psi(|g(x)|)) \, dx. \end{aligned}$$

S druge strane:

$$-\int_0^\tau \mathcal{E}'_R(t) \, dt = -\int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^d} \psi_R(x) \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{X}((T_t^A f)(x), (T_t^B g)(x)) \, dx \, dt.$$

MANJE-VIŠE PONOVI MO: SKICA DOKAZA

Nastavak:

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^\tau \mathcal{E}'_R(t) dt \\
 & = \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^d} \psi_R(x) H_{\mathfrak{X}}^{A(x), B(x)} [((T_t^A f)(x), (T_t^B g)(x)); ((\nabla T_t^A f)(x), (\nabla T_t^B g)(x))] dx dt + \mathcal{R}_{R, \tau} \\
 & \gtrsim_{A, B, \Phi, \Psi} \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^d} \psi_R(x) |(\nabla T_t^A f)(x)| |(\nabla T_t^B g)(x)| dx dt + \mathcal{R}_{R, \tau},
 \end{aligned}$$

pri čemu je

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_{R, \tau} = 2 \operatorname{Re} \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^d} & \left((\partial_{\bar{u}} \mathfrak{X})((T_t^A f)(x), (T_t^B g)(x)) \langle (\nabla \psi_R)(x), A(x)(\nabla T_t^A f)(x) \rangle_{\mathbb{C}^d} \right. \\
 & \left. + (\partial_{\bar{v}} \mathfrak{X})((T_t^A f)(x), (T_t^B g)(x)) \langle (\nabla \psi_R)(x), B(x)(\nabla T_t^B g)(x) \rangle_{\mathbb{C}^d} \right) dx dt.
 \end{aligned}$$

Želimo

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathcal{R}_{R, \tau} = 0.$$

MANJE-VIŠE PONOVI MO: SKICA DOKAZA

Imamo

$$\int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^d} \psi_R(x) |(\nabla T_t^A f)(x)| |(\nabla T_t^B g)(x)| dx dt + \mathcal{R}_{R,\tau} \\ \lesssim_{A,B,\Phi,\Psi} \int_{\mathbb{R}^d} \psi_R(x) (\Phi(|f(x)|) + \Psi(|g(x)|)) dx.$$

Puštanjem $R \rightarrow \infty$ dobivamo

$$\int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^d} |(\nabla T_t^A f)(x)| |(\nabla T_t^B g)(x)| dx dt \lesssim_{A,B,\Phi,\Psi} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(|f(x)|) dx + \int_{\mathbb{R}^d} \Psi(|g(x)|) dx.$$

Konačno, puštanjem $\tau \rightarrow \infty$ pa “homogenizacijom”

$$f \rightarrow \alpha f, \quad g \rightarrow g/\alpha$$

slijedi

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} |(\nabla T_t^A f)(x)| |(\nabla T_t^B g)(x)| dx dt \lesssim_{A,B,\Phi,\Psi} \|f\|_\Phi \|g\|_\Psi.$$

SVOJSTVA TRAŽENE BELLMANOVE FUNKCIJE

Dokaz je “gotov” ako postoji funkcija $\mathfrak{X}: \mathbb{C}^2 \rightarrow [0, \infty)$ sa sljedećim svojstvima (tzv. *Bellmanova funkcija* za taj dokaz):

- \mathfrak{X} je klase C^1 na $\mathbb{C}^2 \equiv \mathbb{R}^4$ i “po dijelovima” klase C^2 s lokalno integrabilnim drugim parcijalnim derivacijama;
- $\mathfrak{X}(u, v) \lesssim_{\Phi, \Psi} \Phi(|u|) + \Psi(|v|)$;
- $H_{\mathfrak{X}}^{A(x), B(x)}[(u, v); (\zeta, \eta)] \gtrsim_{\Phi, \Psi} |\zeta||\eta|$;
- $|\partial_{\bar{u}} \mathfrak{X}(u, v)| \leq \max\{\Phi'(|u|), |v|\}$,
 $|\partial_{\bar{v}} \mathfrak{X}(u, v)| \leq \Psi'(|v|)$,
pri čemu je $\partial_{\bar{z}} = (\partial_x + i\partial_y)/2$.

PONOVIMO: N–T BELLMANOVA FUNKCIJA

Bellmanova funkcija Nazarova i Treila je ono što trebamo u specijalnom slučaju

$$\mathfrak{X}(u, v) := |u|^p + |v|^q + \delta \begin{cases} \frac{2}{p}|u|^p + \left(\frac{2}{q} - 1\right)|v|^q & \text{za } |u|^p \geq |v|^q, \\ |u|^2|v|^{2-q} & \text{za } |u|^p \leq |v|^q, \end{cases}$$

za pogodni $\delta > 0$.

POSTOJANJE TRAŽENE BELLMANOVE FUNKCIJE

Možemo \mathfrak{X} definirati formulom

$$\mathfrak{X}(u, v) := \begin{cases} (1 + \delta)(\Phi(|u|) + \Psi(|v|)) + \delta|u|^2 \int_0^{|u|} \frac{\Phi'(s) ds}{s^2} & \text{za } |v| \leq \Phi'(|u|), \\ \Phi(|u|) + \Psi(|v|) + \delta|u|^2 \int_0^{|v|} \frac{ds}{\Psi'(s)} & \text{za } |v| \geq \Phi'(|u|), \end{cases}$$

za pogodni $\delta > 0$.

Dobar izbor je

$$\delta := \frac{\tilde{m} - 1}{\tilde{m}} \min \left\{ \frac{\Delta_p(A)}{8\Lambda(A)}, \frac{\Delta_p(B)}{4\Lambda(B)}, \frac{\lambda(A)\Delta_p(B)}{100 \max\{\Lambda(A)^2, \Lambda(B)^2\}} \right\}.$$

Provjera svojstava je mukotrpa.