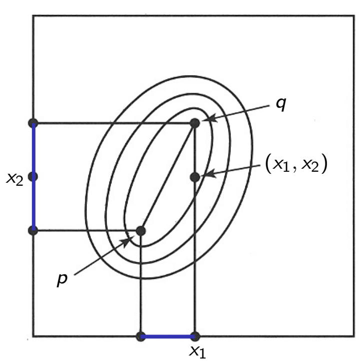
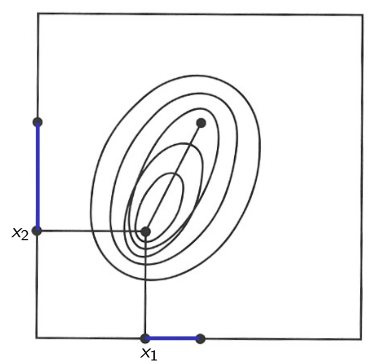
5 TIHONOVLJEV TEOREM

- Tihonovljev teorem
- Stone-Čechova kompaktifikacija

Što želimo i u čemu su poteškoće

Želimo dokazati da je proizvoljan produkt kompaktnih prostora kompaktan.
„Imitiranje" dokaza za produkt dva kompakta nije jednostavan: treba dobro urediti indeksni skup i koristiti se transfinitnom indukcijom.
Mi ćemo za dokaz rabiti centrirane familije, ali i tu ima poteškoća:





Postojanje maksimalne centrirane familije

Lema 37.1

Neka je X skup i $\mathcal{A}$ centrirana familija podskupova od X (ne moraju biti zatvoreni — X je samo skup!). Tada postoji maksimalna centrirana familija $\mathcal{M}$ podskupova od X koja sadrži $\mathcal{A}$.

Dokaz: Neka je $\mathfrak{A}$ kolekcija svih centriranih familija $\mathcal{B}$ podskupova od X koje sadrže familiju $\mathcal{A}$. Pomoću Zornove leme, pokazat ćemo da parcijalno uređena kolekcija $(\mathfrak{A}, \subsetneq)$ ima maksimalan element $\mathcal{M}$.
Pokažimo da svaka totalno uređena potkolekcija $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ ima u $\mathfrak{A}$ gornju među. Dovoljno je pokazati da je familija $\mathcal{C} := \bigcup_{\mathcal{B} \in \mathfrak{B}} \mathcal{B}$ centrirana — da sadrži $\mathcal{A}$ i da je gornja međa je očito.
Neka su $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{C}$ i neka su $\mathcal{B}_i \in \mathfrak{B}$ t.d. je $C_i \in \mathcal{B}_i$. $\{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n\} \subseteq \mathfrak{B}$, pa zbog totalne uređenosti postoji k t.d. je $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}_k$ za sve i. Stoga su $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{B}_k$, a kako je familija $\mathcal{B}_k$ centrirana, $C_1 \cap \dots \cap C_n \neq \emptyset$, tj. $\mathcal{C}$ je centrirana. □

Dva svojstva maksimalne centrirane familije $\mathcal{M}$

Lema 37.2

Neka je $\mathcal{M}$ neka maksimalna centrirana familija podskupova skupa X.

(a) Svaki je konačan presjek članova od $\mathcal{M}$ također član od $\mathcal{M}$.

(b) Ako neki $A \subseteq X$ siječe svaki član familije $\mathcal{M}$ onda je $A \in \mathcal{M}$.

Dokaz: (a) Neka je $B = M_1' \cap \dots \cap M_n'$, $M_i' \in \mathcal{M}$. Pokažemo li da je familija $\mathcal{M}^* := \mathcal{M} \cup \{B\}$ centrirana, zbog maksimalnosti bit će $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}$, tj. $B \in \mathcal{M}$. No za $M_1, \dots, M_k \in \mathcal{M}^*$ je $M_1 \cap \dots \cap M_k \neq \emptyset$ bez obzira je li neki M_i jednak B ili ne. ✓
(b) Pokažemo li da je familija $\mathcal{M}^* := \mathcal{M} \cup \{A\}$ centrirana, zbog maksimalnosti bit će $A \in \mathcal{M}$. Neka su $M_1, \dots, M_k \in \mathcal{M}^*$. Ako su svi $M_i \neq A$ onda je $M_1 \cap \dots \cap M_k \neq \emptyset$. Ako je neki od M_i jednak A, npr. $M_k = A$, onda je zbog (a), $M_1 \cap \dots \cap M_{k-1} \in \mathcal{M}$, pa je $(M_1 \cap \dots \cap M_{k-1}) \cap M_k = (M_1 \cap \dots \cap M_{k-1}) \cap A \neq \emptyset$. □

Proizvoljan produkt kompaktnih prostora je kompaktan

Teorem 37.3 (Tihonovljev teorem)

Proizvoljan produkt kompaktnih prostora je kompaktan prostor.

Dokaz: Neka je $X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$, gdje su svi X_α kompaktni, i neka je $\mathcal{A}$ centrirana familija podskupova od X. Dovoljno je pokazati da je $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \overline{A} \neq \emptyset$. Neka je $\mathcal{M}$ maksimalna centrirana familija podskupova od X koja sadrži $\mathcal{A}$ (takva postoji prema lemi 37.1). Dovoljno je pokazati da je $\bigcap_{M \in \mathcal{M}} \overline{M} \neq \emptyset$. Neka je $\alpha \in J$ i $\pi_\alpha \colon X \to X_\alpha$ projekcija. Familija $\{\pi_\alpha(M) : M \in \mathcal{M}\}$ je centrirana, pa je i familija $\{\overline{\pi_\alpha(M)} : M \in \mathcal{M}\}$ centrirana,

te zbog kompaktnosti od X_α postoji $x_\alpha \in \bigcap_{M \in \mathcal{M}} \overline{\pi_\alpha(M)}$.

Neka je $\mathbf{x} := (x_\alpha)_{\alpha \in J}$. Pokažimo da je $\mathbf{x} \in \overline{M}$ za sve $M \in \mathcal{M}$, i time će dokaz biti gotov.

dokaz (nastavak)

Tvrdnja: Ako je $\mathbf{x} \in \pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ za neki podbazni element, onda $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ siječe svaki $M \in \mathcal{M}$. Skup U_β je okolina točke x_β. Kako je, prema definiciji točke $\mathbf{x}$, $x_\beta \in \overline{\pi_\beta(M)}$, U_β siječe $\pi_\beta(M)$, pa postoji $\mathbf{y} \in M$ t.d. je $\pi_\beta(\mathbf{y}) \in U_\beta \cap \pi_\beta(M)$.
Stoga je $\mathbf{y} \in \pi_\beta^{-1}(U_\beta) \cap M$. ✓

Prema lemi 37.2 (b), svaka podbazna okolina točke $\mathbf{x}$ pripada familiji $\mathcal{M}$, pa onda zbog (a), i svaka bazna okolina točke $\mathbf{x}$ pripada familiji $\mathcal{M}$. Kako je familija $\mathcal{M}$ centrirana, zaključujemo da svaka bazna okolina točke $\mathbf{x}$ siječe svaki član familije $\mathcal{M}$, pa je $\mathbf{x} \in \overline{M}$ za sve $M \in \mathcal{M}$. □

Kompaktifikacija

Jednotočkovna kompaktifikacija koju smo ranije vidjeli, u izvjesnom je smislu „minimalna” kompaktifikacija.
Stone-Čechova kompaktifikacija je „maksimalna” kompaktifikacija, i osim za topologiju, vrlo je važna za analizu.

Definicija

Kompaktifikacija prostora X je kompaktan Hausdorffov prostor Y t.d. je X njegov gust potprostor, tj. $\overline{X} = Y$. Dvije kompaktifikacije Y_1 i Y_2 prostora X su ekvivalentne ako postoji homeomorfizam $h \colon Y_1 \to Y_2$ t.d. je $h(x) = x$ za sve $x \in X$.

Nema svaki prostor kompaktifikaciju. Ali ako X ima kompaktifikaciju Y, onda X mora biti potpuno regularan (jer je potprostor kompaktnog Hausdorffovog, dakle i potpuno regularnog prostora, a to je svojstvo *nasljedno*, vidi teorem 33.2).

Kompaktifikacija inducirana smještenjem

Ali vrijedi i obrat: ako je X potpuno regularan onda se može smjestiti u kompaktan Hausdorffov prostor $[0,1]^J$ za neki J (teorem 34.3), a kako pokazuje sljedeća lema, svako takvo smještenje daje jednu kompaktifikaciju.

Lema 38.1

Neka je X prostor a $h \colon X \to Z$ smještenje u neki kompaktan Hausdorffov prostor Z. Tada postoji pripadna kompaktifikacija Y od X i ona ima svojstvo da postoji smještenje $H \colon Y \hookrightarrow Z$ t.d. je $H|X = h$. Kompaktifikacija Y jedinstvena je do na ekvivalenciju.

Y nazivamo kompaktifikacijom inducirano smještenjem h.

Dokaz leme

Dokaz: Neka je $X_0 := h(X) \subseteq Z$ i neka je $Y_0 := \overline{X}_0$. Kako je Y_0 kompaktan Hausdorffov, Y_0 je kompaktifikacija od X_0.
Konstruirajmo prostor $Y \supseteq X$ t.d. je par (Y, X) homeomorfan paru (Y_0, X_0). Neka je A skup disjunktan s X za koji postoji bijekcija $k\colon A \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow Y_0 \setminus X_0$. Neka je $Y := X \cup A$ i definirajmo bijekciju $H\colon Y \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow Y_0$ s $H(x) := \begin{cases} h(x)\,, & x \in X \\ k(x)\,, & x \in A \end{cases}$.
Topologiju na Y definiramo t.d. je $U \subseteq Y$ otvoren akko je $H(U)$ otvoren u Y_0. H je automatski homeomorfizam, i X je potprostor od Y jer je $H|X = h$ koji je homeomorfizam $X \cong X_0$.
Kompozicija $Y \overset{H}{\hookrightarrow} Y_0 \hookrightarrow Z$ je traženo smještenje od Y u Z.

Dokaz leme (nastavak)

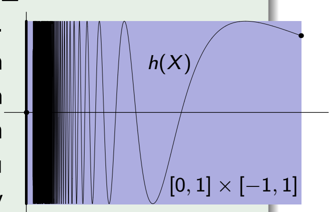
Jedinstvenost: Neka su Y_i kompaktifikacije od X a $H_i\colon Y_i \hookrightarrow Z$, $i = 1, 2$, smještenja koja proširuju h.
Kako su H_i neprekidna preslikavanja i $H_i(X) = h(X) = X_0$, mora biti $H_i(Y_i) = H_i(\overline{X}) \subseteq \overline{X_0}$. Ali $H_i(Y_i)$ sadrži X_0 i zatvoren je (zbog kompaktnosti), pa je $\overline{X_0} \subseteq H_i(Y_i)$. Stoga je $H_i(Y_i) = \overline{X_0}$ pa je $H_2^{-1} \circ H_1\colon Y_1 \to Y_2$ homeomorfizam koji je identiteta na X. □

Nekoliko kompaktifikacija intervala

Općenito postoji mnogo različitih kompaktifikacija nekog prostora.

Primjer: Tri kompaktifikacije intervala $X = \langle 0, 1\rangle$

1. Neka je $h\colon \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{S}^1$ definirano s $h(t) := (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. Kompaktifikacija inducirana smještenjem h ekvivalentna je jednotočkovnoj kompaktifikaciji $\langle 0, 1\rangle^\bullet$ intervala $\langle 0, 1\rangle$.
2. Segment $[0, 1]$ je „dvotočkovna” kompaktifikacija intervala $\langle 0, 1\rangle$.
3. Neka je $h\colon X = \langle 0, 1\rangle \hookrightarrow [0, 1]\times[-1, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$ smještenje dano s $h(x) := (x, \sin\frac{1}{x})$. Prostor $Y_0 = \overline{h(X)}$ je topološka sinusna krivulja. Kompaktifikacija Y intervala $\langle 0, 1\rangle$ inducirana smještenjem h sasvim je drugačija od prve dvije: desnom kraju dodana je jedna točka a lijevom — čitav segment.



Proširivost preslikavanja na kompaktifikaciju

Osnovno pitanje kod proučavanja kompaktifikacija je sljedeće:
„Pod kojim se uvjetima neprekidna realna funkcija definirana na prostoru X, može neprekidno proširiti na kompaktifikaciju Y?”
Omeđenost takve funkcije očito je nužna. Ali nije i dovoljna:

Mogućnost proširenja funkcije $f\colon X = \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$ na kompaktifikaciju

1. f se može neprekidno proširiti na jednotočkovnu kompaktifikaciju $\mathbb{S}^1$ akko postoje limesi $\lim_{x\to 0+} f(x)$ i $\lim_{x\to 1-} f(x)$ i jednaki su.
2. f se može neprekidno proširiti na dvotočkovnu kompaktifikaciju $[0, 1]$ akko postoje navedeni limesi (ali ne moraju biti jednaki).

Još o proširivosti preslikavanja na kompaktifikaciju

3. Ako navedeni limesi postoje onda se f može proširiti i na kompaktifikaciju Y u 3. primjeru (topološka sinusna krivulja). Ali postojanje tih limesa nije više nužno.
I funkcija $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ može se proširiti na kompaktifikaciju Y. Naime, ako na kompaktifikaciju intervala $X = \langle 0,1\rangle$ gledamo kao na $Y_0 = \overline{h(\langle 0,1\rangle)} \subseteq [0,1]\times[-1,1] \subseteq \mathbb{R}^2$, onda je funkcija f zapravo projekcija $\pi_2|h(\langle 0,1\rangle)$, i $\pi_2|Y_0$ je očito njezino neprekidno proširenje na Y_0.
Točnije, ako je $H\colon Y \hookrightarrow [0,1]\times[-1,1]$ smještenje kao u lemi 38.1, $H|X = h$, onda je kompozicija $Y \overset{H}{\hookrightarrow} [0,1]\times[-1,1] \overset{\pi_2}{\to} \mathbb{R}$ traženo proširenje funkcije f.

Ideja u pozadini Stone-Čechove kompaktifikacije

Kompaktifikacija u posljednjem primjeru bila je inducirana smještenjem $h\colon \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}^2$ čije su komponente bile funkcije $x \mapsto x$ i $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$. Pokazalo se da obje funkcije dopuštaju neprekidno proširenje na kompaktifikaciju Y.

To nam daje sljedeću ideju: ako imamo cijelu *familiju* omeđenih neprekidnih realnih funkcija na X, upotrijebimo ih kao komponente smještenja prostora X u $\mathbb{R}^J$ za neki J.
Tako ćemo dobiti kompaktifikaciju od X na koju će se svaka funkcija naše familije moći neprekidno proširiti.

Kako to točno napraviti, govori sljedeći teorem:

Kompaktifikacija s „univerzalnim” svojstvom proširenja

Teorem 38.2 (o kompaktifikaciji s univerzalnim svojstvom proširenja)

Neka je X potpuno regularan prostor. Postoji kompaktifikacija Y od X sa svojstvom da svaka omeđena neprekidna funkcija $f\colon X \to \mathbb{R}$ dopušta jedinstveno neprekidno proširenje $Y \to \mathbb{R}$.

Dokaz: Neka je $\{f_\alpha\}_{\alpha\in J}$ familija ***svih*** omeđenih neprekidnih realnih funkcija na X. Za svaki $\alpha \in J$ neka je $I_\alpha := [\inf f_\alpha, \sup f_\alpha] \supseteq f_\alpha(X)$.
Definirajmo $h\colon X \to \prod_{\alpha\in J} I_\alpha$ formulom $h(x) := (f_\alpha(x))_{\alpha\in J}$.
Kako je X potpuno regularan, familija $\{f_\alpha\}$ razdvaja točke od zatvorenih skupova pa je, prema teoremu 34.2, h smještenje.
$\prod I_\alpha$ je kompaktan Hausdorffov, pa neka je Y kompaktifikacija od X inducirana smještenjem h, i neka je $H\colon Y \to \prod I_\alpha$ smještenje t.d. je $H|X = h$. Neka je $f\colon X \to \mathbb{R}$ omeđena neprekidna funkcija.
Tada je $f = f_\beta$ za neki $\beta \in J$. Neka je $\pi_\beta\colon \prod I_\alpha \to I_\beta$ projekcija.

Dokaz postojanja i jedinstvenosti proširenja

Tvrdnja: Kompozicija $\pi_\beta \circ H\colon Y \to I_\beta$ je traženo proširenje od f.
Zaista, za $x \in X$ je $\pi_\beta(H(x)) = \pi_\beta(h(x)) = \pi_\beta((f_\alpha(x))_{\alpha\in J}) = f_\beta(x)$.

Jedinstvenost proširenja slijedi iz sljedeće leme koju „znamo” još iz Analize: □

Lema 38.3

Neka je $A \subseteq X$ i $f\colon A \to Z$ neprekidno preslikavanje u Hausdorffov prostor Z. Ako postoji neprekidno proširenje $g\colon \overline{A} \to Z$, ono je jedinstveno. □

Proširenje preslikavanja u kompakte

Prethodni je teorem govorio o proširivanju *realnih* funkcija.
A kako je s proširivanjem funkcija u kompakte?

Teorem 38.4

Neka je X potpuno regularan prostor a Y kompaktifikacija od X koja ima univerzalno svojstvo proširenja iz teorema 38.2. Tada svako neprekidno preslikavanje $f\colon X \to K$ u kompaktan Hausdorffov prostor K dopušta jedinstveno neprekidno proširenje $g\colon Y \to K$.

Dokaz: K je potpuno regularan pa se može smjestiti u $[0,1]^J$ za neki J, tj. možemo smatrati $K \subseteq [0,1]^J$. Tada je $f = (f_\alpha)_{\alpha\in J}$ i $f_\alpha\colon X \to \mathbb{R}$ su omeđene neprekidne funkcije, pa se po teoremu 38.2. mogu proširiti do neprekidnih funkcija $g_\alpha\colon Y \to \mathbb{R}$. Definirajmo $g(y) := (g_\alpha(y))_{\alpha\in J}$. $g\colon Y \to \mathbb{R}^J$ je neprekidna jer $\mathbb{R}^J$ ima produktnu topologiju. Ostaje pokazati da je $g(Y) \subseteq K$. No zbog neprekidnosti je $g(Y) = g(\overline{X}) \subseteq \overline{g(X)} = \overline{f(X)} \subseteq \overline{K} = K$. □

Jedinstvenost kompaktifikacije s univerzalnim svojstvom proširenja

Teorem 38.5

Neka je X potpuno regularan prostor. Ako su Y_1 i Y_2 dvije kompaktifikacije s univerzalnim svojstvom proširenja iz teorema 38.2, onda su one ekvivalentne.

Dokaz: Y_2 je kompaktan Hausdorffov i Y_1 ima svojstvo proširenja, pa inkluzija $j_2\colon X \hookrightarrow Y_2$ ima proširenje $f_2\colon Y_1 \to Y_2$. Slično, inkluzija $j_1\colon X \hookrightarrow Y_1$ ima neprekidno proširenje $f_1\colon Y_2 \to Y_1$. Kako je $(f_1(f_2(x)) = x$, $x \in X$, kompozicija $f_1 \circ f_2\colon Y_1 \to Y_1$ je neprekidno proširenje inkluzije j_1. Ali i identiteta $\mathbb{1}_{Y_1}\colon Y_1 \to Y_1$ proširuje j_1. Zbog jedinstvenosti proširenja je $f_1 \circ f_2 = \mathbb{1}_{Y_1}$. Analogno je $f_2 \circ f_1 = \mathbb{1}_{Y_2}$ pa su f_1 i f_2 homeomorfizmi. □

$$\begin{tikzcd}
 & & Y_1 & & \\
Y_1 \arrow[urr, "f_1\circ f_2"] \arrow[urr, equal, "\mathbb{1}_{Y_1}"'] \arrow[drr, dotted, "f_2"'] & \supseteq & X \arrow[u, hook, "j_1"'] \arrow[d, hook, "j_2"] & \subseteq & Y_2 \arrow[ull, dotted, "f_1"'] \arrow[dll, equal] \\
 & & Y_2 & &
\end{tikzcd}$$

Stone-Čechova kompaktifikacija

Definicija

Za svaki potpuno regularan prostor X odaberimo jednom za svagda jednu kompaktifikaciju koja ima univerzalno svojstvo proširenja iz teorema 38.2. Ta se kompaktifikacija naziva Stone-Čechova kompaktifikacija prostora X i označuje βX.

Ona je karakterizirana činjenicom da svako neprekidno preslikavanje $f\colon X \to K$ u kompaktan Hausdorffov prostor K ima neprekidno proširenje $g\colon \beta X \to K$.

Digresija: o univerzalnim svojstvima

- O univerzalnim svojstvima: definicija i egzistencija.
- Produkt u nekoj kategoriji.
- Produkt u kategoriji normalnih prostora.

6 TEOREMI METRIZACIJE I PARAKOMPAKTNOST

Lokalno konačne familije skupova

Urysonov teorem metrizacije dao je dovoljne uvjete metrizabilnosti topološkog prostora: regularnost i prebrojiva baza.
Međutim, ti uvjeti očito nisu i nužni.

Definicija

Familija $\mathcal{A}$ podskupova prostora X je lokalno konačna u X ako svaka točka ima okolinu koja siječe samo konačno mnogo članova familije $\mathcal{A}$.

Primjer

Familija intervala $\mathcal{A} = \{\langle n, n+1\rangle : n \in \mathbb{N}\}$ je lokalno konačna u $\mathbb{R}$.
Familije $\mathcal{B} = \{\langle 0, \frac{1}{n}\rangle : n \in \mathbb{N}\}$ i $\mathcal{C} = \{\langle \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\rangle : n \in \mathbb{N}\}$ su lokalno konačne na $\langle 0, 1\rangle$ ali ne i na $\mathbb{R}$.

Zatvorenje unije lokalno konačne familije

Kao što znamo, zatvorenje *konačne* unije jednako je uniji zatvorenja, dok za beskonačne unije to ne vrijedi. Ipak:

Lema 39.1

Neka je $\mathcal{A}$ lokalno konačna familija podskupova od X.
(a) *Svaka potfamilija od $\mathcal{A}$ je lokalno konačna.*
(b) *Familija zatvorenja $\mathcal{B} := \{\overline{A}\}_{A\in\mathcal{A}}$ je lokalno konačna.*
(c) $\overline{\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A} = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} \overline{A}$.

Dokaz: (b) Ako otvoren skup U siječe $\overline{A}$ onda siječe i A. ✓
(c) Označimo $Y := \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$. Očito je $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} \overline{A} \subseteq \overline{Y}$.
Obratno, za $x \in \overline{Y}$ neka je $U \ni x$ okolina koja siječe samo konačno mnogo članova od $\mathcal{A}$, kažimo $A_1, \ldots, A_n$. Da $x \notin \overline{A}_i$ niti za jedan $i \in \{1, \ldots, n\}$, skup $U \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i$ bio bi okolina točke x koja ne siječe niti jedan član familije $\mathcal{A}$, pa ne bi sijekla niti njihovu uniju Y $\Rightarrow\!\Leftarrow$ $x \in \overline{Y}$. □

Lokalno konačna *indeksirana* familija

U vezi s particijama jedinice trebat će nam pojam lokalno konačne indeksirane familija skupova. To je indeksirana familija $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ podskupova od X tako da svaka točka ima okolinu U za koju postoji samo konačno mnogo indeksa $\alpha \in J$ takvih da U siječe A_α.

Razlika prema „običnoj" lokalno konačnoj familiji je da se u indeksiranoj familiji isti skup može pojaviti s više različitih indeksa, tako da neka indeksirana familija može biti lokalno konačna *kao familija skupova* ali ne i kao *indeksirana familija skupova*.

σ-lokalno konačne familije skupova

Definicija

Familija $\mathcal{A}$ podskupova od X je σ-lokalno konačna ili prebrojivo lokalno konačna ako se može prikazati kao $\mathcal{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$, gdje su sve familije $\mathcal{A}_n$ lokalno konačne.

Svaka prebrojiva i svaka lokalno konačna familija je i σ-lokalno konačna.

Definicija

Familija $\mathcal{B}$ podskupova od X profinjuje familiju $\mathcal{A}$, oznaka $\mathcal{B} > \mathcal{A}$, ako za svaki $B \in \mathcal{B}$ postoji $A \in \mathcal{A}$ t.d. je $B \subseteq A$.

Ako su članovi familije $\mathcal{B}$ otvoreni (zatvoreni) skupovi govorimo o otvorenom (zatvorenom) profinjenju.

σ-lokalno konačno profinjenje otvorenog pokrivača metrizabilnog prostora

Lema 39.2

Svaki otvoren pokrivač metrizabilnog prostora ima σ-lokalno konačno otvoreno profinjenje.

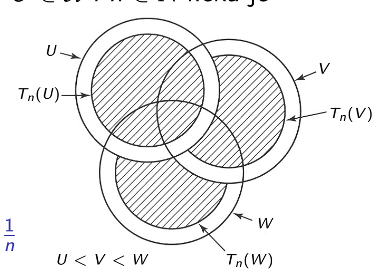
Dokaz: Neka je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač od X, odaberimo dobar uređaj $<$ na $\mathcal{U}$, i fiksirajmo metriku d. Za svaki $U \in \mathcal{U}$ i $n \in \mathbb{N}$ neka je $S_n(U) := \{x : B(x, \frac{1}{n}) \subseteq U\}$ (to nisu otvoreni skupovi!). Sada definiramo

$$T_n(U) := S_n(U) \setminus \bigcup_{V<U} V.$$

Ti su skupovi međusobno disjunktni, štoviše, vrijedi:

Tvrdnja:

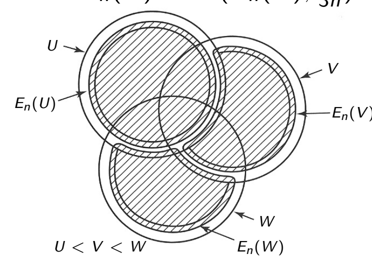
Za $V \neq W \in \mathcal{U}$ je $d(T_n(V), T_n(W)) \geq \frac{1}{n}$



nastavak dokaza leme 39.3

Zaista, neka je $V < W$. Za $x \in T_n(V)$ je $x \in S_n(V)$ pa je $B(x, \frac{1}{n}) \subseteq V$, dok za $y \in T_n(W)$, zbog $V < W$, $y \notin V$, tj. $y \notin B(x, \frac{1}{n})$. ✓

Skupovi $T_n(U)$ bi bili OK da su otvoreni, ali nisu. Zato definiramo $E_n(U) := B(T_n(U), \frac{1}{3n})$. Ti su skupovi međusobno disjunktni, štoviše $d(E_n(V), E_n(W)) \geq \frac{1}{3n}$, i za svaki $U \in \mathcal{U}$ je $E_n(U) \subseteq U$. Stoga familija $\mathcal{E}_n := \{E_n(U) : U \in \mathcal{U}\}$ profinjuje $\mathcal{U}$, i lokalno je konačna jer za svaki $x \in X$ okolina $B(x, \frac{1}{6n})$ siječe najviše jedan član od $\mathcal{E}_n$. Neka je $\mathcal{E} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_n$.
$\mathcal{E}$ je σ-lokalno konačna familija otvorenih skupova koja profinjuje $\mathcal{U}$.



Tvrdnja: $\mathcal{E}$ pokriva X. Zaista, za $x \in X$ neka je $U \in \mathcal{U}$ ***prvi*** član koji sadrži x, i neka je n t.d. je $B(x, \frac{1}{n}) \subseteq U$. Prema definiciji je $x \in S_n(U)$, a jer je U prvi koji sadrži x, to je $x \in T_n(U) \subseteq E_n(U)$. □

Nagata-Smirnovljev teorem metrizacije

Metrizabilni prostori su regularni i imaju σ-lokalno konačnu bazu.
Pokazat ćemo da vrijedi i obratno.
Dokaz „prati" 4 koraka našeg drugog dokaza Urysonova teorema:

▪ Regularan prostor s prebrojivom bazom je normalan.	▪ Regularan prostor sa σ-lokalno konačnom bazom je normalan.
▪ Konstruirati prebrojivu familiju realnih funkcija $\{f_n\}$ koje razdvajaju točke od zatvorenih skupova.	▪ Konstruirati familiju realnih funkcija $\{f_\alpha\}$ koje razdvajaju točke od zatvorenih skupova.
▪ Pomoću funkcija f_n konstruirati smještenje prostora X u $\mathbb{R}^\omega$.	▪ Pomoću funkcija f_α konstruirati smještenje od X u $\mathbb{R}^J$ za neki J.
▪ Pokazati da ako je $f_n(x) \leq \frac{1}{n}$ za sve x, onda se zaista radi o smještenju u $(\mathbb{R}^\omega, \bar{\rho})$.	▪ Pokazati da ako su funkcije f_α dovoljno male, onda se radi o smještenju u $(R^J, \bar{\rho})$.

Regularan sa σ-lokalno konačnom bazom je normalan

Definicija

$A \subseteq X$ je G_δ skup ako je presjek prebrojive familije otvorenih skupova.

Primjeri:

- Svaki zatvoren podskup A metričkog prostora X je G_δ skup: $$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(A, \tfrac{1}{n}).$$
- Jednočlan skup $\{\Omega\} \subseteq \overline{S_\Omega}$ *nije* G_δ skup.

Lema 40.1

Neka je X regularan prostor sa σ-lokalno konačnom bazom. Tada je X normalan i svaki je zatvoren podskup od X G_δ skup.

Dokaz: ide u 3 koraka:

1. i 2. korak

1. Za svaki otvoren skup $W \subseteq X$ postoji prebrojiva familija otvorenih skupova $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ t.d. je $W = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n}$.

   Neka je $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$ baza gdje su $\mathcal{B}_n$ lokalno konačne familije i neka je $\mathcal{C}_n := \{B \in \mathcal{B}_n : \overline{B} \subseteq W\}$. Familija $\mathcal{C}_n$ je lokalno konačna jer je potfamilija od $\mathcal{B}_n$. Neka je $U_n := \bigcup_{B\in\mathcal{C}_n} B$. Skupovi U_n su otvoreni i zbog lokalne konačnosti je $\overline{U_n} = \bigcup_{B\in\mathcal{C}_n} \overline{B}$.
   Zato je $\overline{U_n} \subseteq W$, pa je i $\bigcup U_n \subseteq \bigcup \overline{U_n} \subseteq W$.

   Obratno, zbog regularnosti, za $x \in W$ postoji $B \in \mathcal{B}$ t.d. je $x \in B \subseteq \overline{B} \subseteq W$. Kako je $B \in \mathcal{B}_n$ za neki n, to je $B \in \mathcal{C}_n$ pa je $x \in U_n$. Dakle $W \subseteq \bigcup U_n$. ✓
2. Svaki zatvoren skup $C \subseteq X$ je G_δ skup.

   Neka je $W := X \setminus C$. Prema 1. koraku postoje otvoreni skupovi U_n t.d. je $W = \bigcup \overline{U_n}$ pa je $C = X \setminus W = X \setminus \bigcup \overline{U_n} = \bigcap (X \setminus \overline{U_n})$. ✓

3. korak

3. X je normalan. Neka su $C, D \subseteq X$ disjunktni zatvoreni skupovi.
   Prema 1. koraku postoje otvoreni skupovi U_n, $n \in \mathbb{N}$, t.d. je $\bigcup U_n = \bigcup \overline{U_n} = X \setminus D$. Familija $\{U_n\}$ pokriva C i svaki je $\overline{U_n}$ disjunktan s D.
   Analogno, postoji otvoren pokrivač $\{V_n\}$ od D t.d. su $\overline{V_n}$ disjunktni s C.
   Sada smo u točno istoj situaciji kao u dokazu da je svaki regularan prostor s prebrojivom bazom normalan (teorem 32.1), pa ponovimo taj dokaz *doslovno*. Definiramo
   $$U'_n := U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i} \quad \text{i} \quad V'_n := V_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}\,.$$
   Tada su
   $$U' := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U'_n \quad \text{i} \quad V' := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V'_n$$
   disjunktne okoline skupova C odnosno D. □

Zatvoreni G_δ skupovi su nul-skupovi

Za dokaz Nagata-Smirnovljeva teorema treba nam još jedna lema:

Lema 40.2

Svaki zatvoren G_δ skup A u normalnom prostoru X je nul-skup, tj. postoji neprekidna funkcija $f\colon X \to [0,1]$ t.d. je $f(x) = 0$ za $x \in A$ i $f(x) > 0$ za $x \notin A$, dakle $A = f^{-1}(0)$.

Dokaz: Neka je $A = \bigcap_n U_n$, gdje su U_n otvoreni. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ neka su $f_n\colon X \to [0,1]$ t.d. je $f_n(x) = 0$ za $x \in A$ i $f_n(x) = 1$ za $x \in X \setminus U_n$.
Tada je
$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{2^n}$$
neprekidna funkcija koja je jednaka 0 na A i pozitivna je na $X \setminus A$. □

Nagata-Smirnovljev teorem metrizacije

Teorem 40.3 (Nagata-Smirnov)

Prostor X je metrizabilan ako i samo ako je regularan i ima σ-lokalno konačnu bazu.

Dokaz: $\Rightarrow$

Treba pokazati da metrizabilan X ima σ-lokalno konačnu bazu.
Fiksirajmo metriku na X i za $n \in \mathbb{N}$ neka je $\mathcal{A}_n$ pokrivač $\frac{1}{n}$-kuglama.
Prema lemi 39.2, postoji σ-lokalno konačan otvoren pokrivač $\mathcal{B}_n$ koji profinjuje $\mathcal{A}_n$. Članovi od $\mathcal{B}_n$ su dijametra $\le \frac{2}{n}$.
Neka je $\mathcal{B} := \bigcup_n \mathcal{B}_n$. $\mathcal{B}$ je σ-lokalno konačna familija, jer su $\mathcal{B}_n$ takve.
Pokažimo da je $\mathcal{B}$ baza topologije. Za $x \in X$ i $\varepsilon > 0$ treba nam $B \in \mathcal{B}$ t.d. je $x \in B \subseteq B(x,\varepsilon)$. Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$.
Kako $\mathcal{B}_n$ pokriva X, postoji $B \in \mathcal{B}_n$ t.d. je $x \in B$. Zbog $x \in B$ i $\operatorname{diam} B \le \frac{2}{n} < \varepsilon$, mora biti $B \subseteq B(x,\varepsilon)$. ✓

Dovoljnost

$\Leftarrow$ X je regularan sa σ-lokalno konačnom bazom, pa je normalan i svaki je zatvoren skup G_δ (lema 40.1) i nul-skup (lema 40.2).
Za neki J, smjestit ćemo X u prostor $(\mathbb{R}^J, \bar{\rho})$ s uniformnom metrikom $\bar{\rho}$.
Neka je $\mathcal{B} = \bigcup_n \mathcal{B}_n$ gdje su familije $\mathcal{B}_n$ lokalno konačne. Za $n \in \mathbb{N}$ i $B \in \mathcal{B}_n$ odaberimo $f_{n,B} \colon X \to [0, \frac{1}{n}]$ t.d. je $f_{n,B}(x) > 0$ za $x \in B$ i $f_{n,B}(x) = 0$ za $x \notin B$ (jer je $X \setminus B$ nul-skup!).
Familija $\{f_{n,B}\}$ razdvaja točke od zatvorenih skupova:
$\mathcal{B}$ je baza pa za okolinu $U \ni x_0$ postoji $B \in \mathcal{B}$ t.d. je $x_0 \in B \subseteq U$.
Jer je $B \in \mathcal{B}_n$ za neki n, to je $f_{n,B}(x_0) > 0$ i $f_{n,B} = 0$ izvan U. ✓

Neka je $J := \{(n,B) : B \in \mathcal{B}_n\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathcal{B}$ i definirajmo $F \colon X \to [0,1]^J$ s $F(x) := (f_{n,B}(x))_{(n,B)\in J}$. Prema teoremu 34.2 o smještenju, F je smještenje s obzirom na produktnu topologiju na $[0,1]^J$. Pokažimo da F je smještenje i s obzirom na uniformnu metriku $\bar{\rho}$ na $[0,1]^J$. Kako je uniformna topologija finija od produktne (teorem 20.4), $F \colon X \to F(X)$ je otvorena bijekcija.

F je neprekidno:

Ostaje pokazati da je preslikavanja F neprekidno.
Neka je $x_0 \in X$ i $\varepsilon > 0$. Fiksirajmo n i neka je $U_n \ni x_0$ okolina koja siječe samo konačno mnogo članova iz $\mathcal{B}_n$. Znači, za samo konačno mnogo $B \in \mathcal{B}_n$ je $f_{n,B}|U_n \not\equiv 0$. Neka je $V_n \subseteq U_n$ okolina od x_0 t.d. je $\operatorname{diam} f_{n,B}(V_n) \le \frac{\varepsilon}{2}$ za sve $B \in \mathcal{B}_n$ (za sve osim konačno mnogo $B \in \mathcal{B}_n$ je $f_{n,B}(V_n) = \{0\}$).
Odaberimo takav V_n za svaki n, neka je $N \in \mathbb{N}$ t.d. je $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$ i neka je $W := V_1 \cap \cdots \cap V_N$.

Tvrdnja:

Za svaki $x \in W$ je $\bar{\rho}(F(x), F(x_0)) < \varepsilon$, pa je F neprekidna u x_0.
Za $n \le N$ je $|f_{n,B}(x) - f_{n,B}(x_0)| \le \frac{\varepsilon}{2}$ jer na W funkcija $f_{n,B}$ ili iščezava ili varira za najviše $\frac{\varepsilon}{2}$. Ako je pak $n > N$ onda je $|f_{n,B}(x) - f_{n,B}(x_0)| \le \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$ jer $f_{n,B}$ preslikava X u $[0, \frac{1}{n}]$.
Stoga je $\bar{\rho}(F(x), F(x_0)) = \sup_{(n,B)\in J} |f_{n,B}(x) - f_{n,B}(x_0)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, tj. F je neprekidno, dakle i smještenje u metrički prostor $(\mathbb{R}^J, \bar{\rho})$. □

Parakompaktnost

Parakompaktnost je jedno od najvažnijih i najkorisnijih generalizacija kompaktnosti. Sadrži sve metričke (A. H. Stone) i sve kompaktne Hausdorffove prostore. Posebno su korisni u primjenama u topologiji i diferencijalnoj geometriji.

Kompaktnost je karakterizirana time da svaki otvoren pokrivač ima konačno otvoreno profinjenje, tj. za svaki otvoren pokrivač $\mathcal{A}$ postoji konačan otvoren pokrivač $\mathcal{B}$ koji profinjuje $\mathcal{A}$.

Definicija

Prostor X je parakompaktan ako svaki otvoren pokrivač ima lokalno konačno otvoreno profinjenje.

$\mathbb{R}^n$ je parakompaktan

Primjer: $\mathbb{R}^n$ je parakompaktan

Neka je $\mathcal{A}$ otvoren pokrivač od $\mathbb{R}^n$. Neka je $B_0 := \emptyset$ i za $k \in \mathbb{N}$ neka je $B_k := B(0, k)$ otvorena kugla oko ishodišta radijusa k. Za svaki k odaberimo konačno članova pokrivača $\mathcal{A}$ tako da pokriju $\overline{B_k}$ i presijecimo ih s otvorenim skupovima $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{k-1}}$. Neka je $\mathcal{C}_k$ tako dobivena konačna familija otvorenih skupova. Tada familija $\mathcal{C} := \bigcup_k \mathcal{C}_k$ profinjuje $\mathcal{A}$ i lokalno je konačna. Naime, kugla B_k siječe samo one članove od $\mathcal{C}$ koji pripadaju uniji $\mathcal{C}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_k$.
Konačno, $\mathcal{C}$ pokriva $\mathbb{R}^n$. Zaista, za $x \in \mathbb{R}^n$ neka je k najmanji prirodan broj za koji je $x \in B_k$. Tada, prema definiciji familije $\mathcal{C}_k$, x pripada nekom članu familije $\mathcal{C}_k$.

Parakompaktni Hausdorffovi su normalni

Teorem 41.1

Svaki parakompaktan Hausdorffov prostor X je normalan.

Dokaz: X je regularan: Neka je $B \subseteq X$ zatvoren i $a \notin B$. Kako je X Hausdorffov, za svaki $b \in B$ neka je $U_b \ni b$ okolina t.d. $a \notin \overline{U_b}$. Familija $\{U_b : b \in B\} \cup \{X \setminus B\}$ je otvoren pokrivač od X pa neka je $\mathcal{C}$ lokalno konačno profinjenje. Neka je $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ potfamilija koja se sastoji od onih članova koji sijeku B. Tada $\mathcal{D}$ pokriva B, i za $D \in \mathcal{D}$ je $a \notin \overline{D}$. Naime, D siječe B pa je D sadržan u nekom U_b čije zatvorenje ne sadrži a. Skup $V := \bigcup_{D\in\mathcal{D}} D$ je otvoren i sadrži B. Kako je familija $\mathcal{D}$ lokalno konačna, $\overline{V} = \bigcup_{D\in\mathcal{D}} \overline{D}$ pa $a \notin \overline{V}$. To dokazuje regularnost.

Normalnost se dokazuje analogno, s tim da se umjesto točke a uzme zatvoren skup A, a Hausdorffovo se svojstvo zamijeni regularnošću. □

Parakompaktnost je slabo nasljedna

Teorem 41.2

Zatvoren podskup parakompaktnog prostora je parakompaktan.

Dokaz: Neka je $Y \subseteq X$ zatvoren i $\mathcal{A}$ pokrivač od Y skupovima otvorenim u Y. Za svaki $A \in \mathcal{A}$ neka je A' otvoren u X t.d. je $A = A' \cap Y$. Familija $\{A' : A \in \mathcal{A}\} \cup \{X \setminus Y\}$ je otvoren pokrivač od X. Neka je $\mathcal{B}$ lokalno konačno profinjenje. Tada je familija $\mathcal{C} := \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ traženo lokalno konačno profinjenje od $\mathcal{A}$. □

Parakompaktan podskup Hausdorffovog ne mora biti zatvoren

Otvoren interval $\langle 0, 1\rangle$ je parakompaktan ali nije zatvoren u $\mathbb{R}$.

Potprostor parakompaktnog ne mora biti parakompaktan

$\overline{S}_\Omega \times \overline{S}_\Omega$ je kompaktan, dakle i parakompaktan, ali njegov potprostor $S_\Omega \times \overline{S}_\Omega$ nije normalan, pa nije niti parakompaktan (iako je Hausdorffov). Parakompaktnost *nije* nasljedno svojstvo.

Michaelova lema

Sljedeća lema ključna je u dokazu Stoneova teorema da je svaki metrizabilan prostor parakompaktan.

Lema 41.3 (E. Michael)

Neka je X regularan. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:
Svaki otvoren pokrivač od X ima profinjenje koje je:

(1) *σ-lokalno konačan otvoren pokrivač od X;*
(2) *lokalno konačan pokrivač od X;*
(3) *lokalno konačan zatvoren pokrivač od X;*
(4) *lokalno konačan otvoren pokrivač od X.*

Dokaz: (4) ⇒ (1) je očito.

Dokaz Michaelove leme: (1) $\Rightarrow$ (2)

Neka je $\mathcal{A}$ otvoren pokrivač od X, $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$ neko σ-lokalno konačno profinjenje ($\mathcal{B}_n$ su lokalno konačne familije), i neka su $V_i := \bigcup_{U \in \mathcal{B}_i} U$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaki $U \in \mathcal{B}_n$ neka je $S_n(U) := U \setminus \bigcup_{i<n} V_i$. ($S_n(U)$ nisu nužno niti otvoreni niti zatvoreni.) Neka je $\mathcal{C}_n := \{S_n(U) : U \in \mathcal{B}_n\}$. Tada $\mathcal{C}_n$ profinjuje $\mathcal{B}_n$ jer je $S_n(U) \subseteq U$ za sve $U \in \mathcal{B}_n$.

Tvrdnja: $\mathcal{C} := \bigcup \mathcal{C}_n$ je traženo lokalno konačno profinjenje od $\mathcal{A}$ koje pokriva X. Neka je $x \in X$ i neka je N najmanji indeks za koji x pripada nekom članu $U \in \mathcal{B}_N$. Kako x ne pripada niti jednom članu familije $\mathcal{B}_i$ za $i < N$, to je $x \in S_N(U) \in \mathcal{C}$. Nadalje, jer su familije $\mathcal{B}_n$ lokalno konačne, za svaki $n = 1, \ldots, N$ postoji okolina $W_n \ni x$ koja siječe samo konačno mnogo članova od $\mathcal{B}_n$, pa onda siječe i samo konačno mnogo članova iz $\mathcal{C}_n$ (jer je $S_n(V) \subseteq V$, $V \in \mathcal{B}_n$). Osim toga, kako je $U \in \mathcal{B}_N$, U ne siječe niti jedan član od $\mathcal{C}_n$ za $n > N$. Stoga okolina $W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_N \cap U$ od x siječe samo konačno mnogo članova familije $\mathcal{C}$. ✓

Dokaz Michaelove leme: (2) $\Rightarrow$ (3)

Neka je $\mathcal{A}$ otvoren pokrivač od X i neka je $\mathcal{B}$ familija svih otvorenih skupova $U \subseteq X$ t.d. je $\overline{U}$ sadržan u nekom članu familije $\mathcal{A}$. Zbog regularnosti, $\mathcal{B}$ pokriva X. Nadalje, prema (2) postoji lokalno konačno profinjenje $\mathcal{C}$ od $\mathcal{B}$ koje pokriva X. Neka je $\mathcal{D} := \{\overline{C} : C \in \mathcal{C}\}$. Kako je familija $\mathcal{C}$ lokalno konačna, to je, prema lemi 39.1, i $\mathcal{D}$ lokalno konačna familija. Očito $\mathcal{D}$ pokriva X i profinjuje $\mathcal{A}$. ✓

Dokaz Michaelove leme: (3) $\Rightarrow$ (4)

Neka je $\mathcal{A}$ otvoren pokrivač od X. Prema (3) odaberimo lokalno konačno profinjenje $\mathcal{B}$ koje pokriva X (zatvorenost nam nije važna). Članove $B \in \mathcal{B}$ ćemo „nadebljati" do otvorenih skupova, ali tako malo da opet dobijemo profinjenje i sačuvamo lokalnu konačnost. Za to nam treba jedan novi trik.

Svaki $x \in X$ ima okolinu koja siječe samo konačno članova iz $\mathcal{B}$. Familija *svih* otvorenih skupova koji sijeku samo konačno članova iz $\mathcal{B}$ je otvoren pokrivač od X. Prema (3), neka je $\mathcal{C}$ zatvoreno lokalno konačno profinjenje koje pokriva X.
Tada svaki član od $\mathcal{C}$ siječe samo konačno članova iz $\mathcal{B}$.

Za $B \in \mathcal{B}$ neka je $\mathcal{C}(B) := \{C : C \in \mathcal{C},\ C \subseteq X \setminus B\}$, i neka je $E(B) := X \setminus \bigcup_{C \in \mathcal{C}(B)} C$. Očito $E(B) \supseteq B$, i jer je familija $\mathcal{C}$ lokalno konačna, skupovi $E(B)$ su otvoreni.

Dokaz Michaelove leme: (3) $\Rightarrow$ (4) (završetak)

Ali, možda smo skupove B nadebljali previše, možda familija $\{E(B)\}$ ne profinjuje $\mathcal{A}$, a i lokalna konačnost je upitna.
Zato za svaki $B \in \mathcal{B}$ odaberimo neki $A(B) \in \mathcal{A}$ t.d. je $B \subseteq A(B)$, i neka je $\mathcal{D} := \{E(B) \cap A(B) : B \in \mathcal{B}\}$. Familija $\mathcal{D}$ profinjuje $\mathcal{A}$, ali i pokriva X jer je $B \subseteq E(B) \cap A(B)$, a već $\mathcal{B}$ pokriva X.

Kako su članovi od $\mathcal{D}$ otvoreni skupovi, ostaje pokazati da je familija $\mathcal{D}$ lokalno konačna. Za $x \in X$ neka je $W \ni x$ okolina koja siječe samo konačno članova iz $\mathcal{C}$. Neka su to $C_1, \ldots, C_k$.

Tvrdnja: W siječe samo konačno mnogo članova od $\mathcal{D}$.
Kako $\mathcal{C}$ pokriva X to je $W \subseteq C_1 \cup \cdots \cup C_k$. Dovoljno je, dakle, pokazati da svaki $C \in \mathcal{C}$ siječe samo konačno članova od $\mathcal{D}$. Ako C siječe neki $E(B) \cap A(B)$ onda siječe $E(B)$ pa, prema definiciji od $E(B)$, $C \not\subseteq \bigcup_{C \in \mathcal{C}(B)} C$, i pogotovo $C \not\subseteq X \setminus B$. Zato C siječe B. Jer C siječe samo konačno članova od $\mathcal{B}$ (tako smo odabrali $\mathcal{C}$), to C može sjeći najviše isto toliko članova od $\mathcal{D}$ (jer $\mathcal{B} > \mathcal{A}$). □

Parakompaktnost metrizabilnih i Lindelöfovih prostora

Teorem 41.4 (A. H. Stone, 1948)

Svaki metrizabilan prostor je parakompaktan.

Dokaz: Neka je X metrizabilan. Prema lemi 39.2, svaki otvoren pokrivač $\mathcal{A}$ ima σ-lokalno konačno otvoreno profinjenje koje pokriva X. Prema Michaelovoj lemi, $\mathcal{A}$ ima i lokalno konačno otvoreno profinjenje koje pokriva X, tj. X je parakompaktan. □

Teorem 41.5

Svaki regularan Lindelöfov prostor je parakompaktan.

Dokaz: Neka je X regularan Lindelöfov prostor i neka je $\mathcal{A}$ otvoren pokrivač. Jer je X Lindelöfov, $\mathcal{A}$ ima prebrojiv potpokrivač, i on je automatski σ-lokalno konačan. Kako je X regularan, prema Michaelovoj lemi $\mathcal{A}$ ima i otvoreno lokalno konačno profinjenje koje pokriva X, pa je X parakompaktan. □

Primjeri

Produkt parakompaktnih prostora ne mora biti parakompaktan

$\mathbb{R}_\ell$ je parakompaktan jer je regularan i Lindelöfov, ali $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$ nije parakompaktan jer nije normalan.

$\mathbb{R}^\omega$ je parakompaktan i u produktnoj i u uniformnoj topologiji

U obje topologije je $\mathbb{R}^\omega$ metrizabilan, pa je i parakompaktan.

$\mathbb{R}^J$ nije parakompaktan ako je J neprebrojiv

Neprebrojiv produkt $\mathbb{R}^J$ je Hausdorffov ali nije normalan pa nije niti parakompaktan.

Particija jedinice

„Pravo mjesto" za particiju jedinice su parakompaktni prostori.

Definicija

Neka je $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ indeksiran otvoren pokrivač od X.
Particija jedinice podređena pokrivaču $\mathcal{U}$ je indeksirana familija funkcija $\phi_\alpha \colon X \to [0,1]$ t.d. je

(1) $\operatorname{supp} \phi_\alpha \subseteq U_\alpha$ za sve α,

(2) indeksirana familija $\{\operatorname{supp} \phi_\alpha\}_{\alpha \in J}$ je lokalno konačna, i

(3) $\sum_\alpha \phi_\alpha(x) = 1$ za sve $x \in X$.

Pritom se suma po proizvoljnom indeksnom skupu J definira kao $\sum_{\alpha \in J} \phi_\alpha(x) := \sup_{J'}\{\sum_{\alpha \in J'} \phi_\alpha(x) : J' \subseteq J \text{ konačan podskup}\}$.

Za dokaz kako za svaki otvoren pokrivač parakompaktnog Hausdorffovog prostora postoji njemu podređena particija jedinice, potrebna nam je sljedeća lema o sažimanju pokrivača:

Striktno lokalno konačno profinjenje otvorenog pokrivača

Lema 41.6 (o sažimanju pokrivača)

Neka je $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ indeksiran otvoren pokrivač parakompaktnog Hausdorffovog prostora X. Tada postoji indeksiran lokalno konačan otvoren pokrivač $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ koji ***strogo profinjuje*** *$\mathcal{U}$, tj. takav da vrijedi $\overline{V}_\alpha \subseteq U_\alpha$ za sve α.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{A}$ familija svih otvorenih skupova A t.d. je $\overline{A}$ sadržan u nekom članu od $\mathcal{U}$. Zbog regularnosti, $\mathcal{A}$ pokriva X. Jer je X parakompaktan, postoji lokalno konačan otvoren pokrivač $\mathcal{B}$ koji profinjuje $\mathcal{A}$. Kako $\mathcal{B}$ profinjuje $\mathcal{A}$, i $\mathcal{A}$ strogo profinjuje $\mathcal{U}$, postoji funkcija $f \colon \mathcal{B} \to J$ t.d. je $\overline{B} \subseteq U_{f(B)}$, $B \in \mathcal{B}$. Za $\alpha \in J$ neka je $\mathcal{B}_\alpha := \{B : f(B) = \alpha\}$, i neka je $V_\alpha := \bigcup_{B \in \mathcal{B}_\alpha} B$. Familija $\mathcal{B}_\alpha$ je lokalno konačna (jer je $\mathcal{B}$ lokalno konačna) i $\overline{B} \subseteq U_\alpha$ za sve $B \in \mathcal{B}_\alpha$, pa je $\overline{V}_\alpha = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_\alpha} \overline{B} \subseteq U_\alpha$. Za $x \in X$ neka je $W \ni x$ okolina koja siječe samo npr. $B_1, \ldots, B_k$. Tada W može sjeći V_α samo ako je α jedan od indeksa $f(B_1), \ldots, f(B_k)$, pa je familija $\{V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ lokalno konačna. □

Postojanje particije jedinice

Teorem 41.7

Neka je X parakompaktan Hausdorffov prostor a $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ proizvoljan indeksiran otvoren pokrivač od X.
Tada postoji particija jedinice podređena pokrivaču $\mathcal{U}$.

Dokaz: Primijenimo li dvaput lemu o sažimanju, dobivamo lokalno konačne otvorene pokrivače $\{V_\alpha\}$ i $\{W_\alpha\}$ t.d. je $\overline{W}_\alpha \subseteq V_\alpha \subseteq \overline{V}_\alpha \subseteq U_\alpha$.
Jer je X normalan postoje funkcije $\psi_\alpha \colon X \to [0,1]$ t.d. je $\psi_\alpha(\overline{W}_\alpha) = \{1\}$ i $\psi_\alpha(X \setminus V_\alpha) = \{0\}$, pa je $\operatorname{supp} \psi_\alpha \subseteq \overline{V}_\alpha \subseteq U_\alpha$.
Familija $\{\overline{V}_\alpha\}$ je lokalno konačna (jer ako neki otvoren skup siječe $\overline{V}_\alpha$ onda siječe i V_α), pa svaka točka ima okolinu na kojoj je samo konačno mnogo funkcija ψ_α različito od nule. Kako $\{W_\alpha\}$ pokriva X, u svakoj točki $x \in X$ barem je jedna od funkcija ψ_α različita od nule.
Stoga su dobro definirane funkcije $\phi_\alpha(x) := \frac{\psi_\alpha(x)}{\sum_{\beta\in J}\psi_\beta(x)}$ i one čine traženu particiju jedinice. □

Smirnovljev teorem metrizacije

Definicija

Prostor X je lokalno metrizabilan ako svaka točka ima okolinu koja je metrizabilna (tj. relativna topologija je metrizabilna).

Teorem 42.1 (Smirnov)

Prostor X je metrizabilan ako i samo ako je parakompaktan Hausdorffov i lokalno metrizabilan.

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Nužnost slijedi iz Stoneova teorema.
$\boxed{\Leftarrow}$ Pokazat ćemo da X ima σ-lokalno konačnu bazu pa će, zbog regularnosti, tvrdnja slijediti iz Nagata-Smirnovljeva teorema.
Pokrijmo X otvorenim metrizabilnim skupovima, neka je pokrivač $\mathcal{C}$ lokalno konačno otvoreno profinjenje, i neka je $d_C \colon C \times C \to \mathbb{R}$ lokalna metrika na C. Jer su C otvoreni skupovi, ε-kugle $B_C(x,\varepsilon)$ oko x u metrici d_C otvoreni su skupovi u X.

Završetak dokaza Smirnovljeva teorema

Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $\mathcal{A}_n$ pokrivač od X svim takvim $\frac{1}{n}$-kuglama, tj. $\mathcal{A}_n := \{B_C(x, \frac{1}{n}) : x \in C, C \in \mathcal{C}\}$. Neka je $\mathcal{D}_n$ lokalno konačno otvoreno profinjenje koje pokriva X (parakompaktnost!), i neka je $\mathcal{D} = \bigcup_n \mathcal{D}_n$. Familija $\mathcal{D}$ je očito σ-lokalno konačna.

Tvrdnja: $\mathcal{D}$ je baza topologije od X. Neka je $x \in X$ i $U \ni x$ okolina.
Točka x leži u samo konačno mnogo članova od $\mathcal{C}$ (čak ima okolinu koja siječe samo konačno C-ova). Neka su to $C_1, \ldots, C_k$.
Neka je ε_i t.d. je $B_{C_i}(x, \varepsilon_i) \subseteq U \cap C_i$ i neka je n t.d. je $\frac{2}{n} < \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$. Neka je $D \in \mathcal{D}$ t.d. je $x \in D$. Jer $\mathcal{D}_n$ profinjuje $\mathcal{A}_n$, postoje $C \in \mathcal{C}$ i $y \in C$ t.d. je $x \in D \subseteq B_C(y, \frac{1}{n})$.

Kako je $x \in C$ mora taj C biti jedan od $C_1, \ldots, C_k$, npr. $C = C_i$.
Jer je $\operatorname{diam} B_{C_i}(y, \frac{1}{n}) \le \frac{2}{n} < \varepsilon_i$, to je $x \in D \subseteq B_{C_i}(y, \frac{1}{n}) \subseteq B_{C_i}(x, \varepsilon_i) \subseteq U$. □