3 POVEZANOST I KOMPAKTNOST

- Povezani prostori
- Povezani potprostori od $\mathbb{R}$
- Komponente i lokalna povezanost
- Kompaktni prostori
- Kompaktni potprostori od $\mathbb{R}$
- Gomilišta i kompaktnost
- Lokalna kompaktnost

Tri bazična teorema Matematičke analize

Sljedeća tri teorema leže u osnovi cijele Analize:

1. Teorem o međuvrijednostima – treba npr. za konstrukciju inverznih funkcija kao $\sqrt[3]{x}$, dokaz Leme o kontrakciji, ...
2. Weierstrassov teorem o postojanju maksimuma neprekidne funkcije na segmentu – treba npr. za dokaz Lagrangeova teorema srednje vrijednosti, koji pak treba za dokaz teorema o implicitnoj i inverznoj funkciji, kao i za dokaz Newton-Leibnizove formule.
3. Teorem o uniformnoj neprekidnosti neprekidne funkcije na segmentu – treba npr. u dokazu da je svaka neprekidna funkcija integrabilna.

Osim što govore o svojstvima funkcije oni govore i o svojstvima segmenta $[a, b]$ – o povezanosti i kompaktnosti.

Povezanost

Definicija

Separacija topološkog prostora je par disjunktnih nepraznih otvorenih podskupova čija je unija cijeli prostor.
Rabit ćemo oznaku $X = U \sqcup V$.
Prostor je povezan ako ne postoji njegova separacija.

Dakle, prostor X je povezan ako i samo ako su $\emptyset$ i cijeli X jedini podskupovi koji su i otvoreni i zatvoreni.
Povezanost potprostora $Y \subseteq X$, može se karakterizirati i ovako:

Lema 23.1

Separacija potprostora Y je par disjunktnih nepraznih skupova A i B t.d. je $Y = A \cup B$ i niti jedan ne sadrži gomilište drugoga. (Opet rabimo oznaku $Y = A \sqcup B$.)
Y je povezan akko ne postoji separacija od Y.

Dokaz leme 23.1

$\Rightarrow$ Neka je $Y = A \sqcup B$.
A je otvoren i zatvoren u Y pa je $A = \mathrm{Cl}_Y A = \overline{A} \cap Y$.
Stoga je $\overline{A} \cap B = \overline{A} \cap (Y \cap B) = (\overline{A} \cap Y) \cap B = A \cap B = \emptyset$,
pa B ne sadrži niti jedno gomilište skupa A.

Analogno se pokazuje da A ne sadrži niti jedno gomilište skupa B. $\triangle$

$\Leftarrow$ Obratno, neka je $Y = A \cup B$ gdje su A i B disjunktni neprazni skupovi i niti jedan ne sadrži gomilište drugoga, tj. $\overline{A} \cap B = \emptyset$ i $\overline{B} \cap A = \emptyset$.
Tada je $\overline{A} \cap Y = \overline{A} \cap (A \cup B) = (\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B) = \overline{A} \cap A = A$ i analogno je $\overline{B} \cap Y = B$, pa su A i B zatvoreni u Y, pa onda i otvoreni u Y, tj. $Y = A \sqcup B$. $\square$

Unija povezanih skupova

Lema 23.2

Neka je $X = C \sqcup D$ separacija i neka je $Y \subseteq X$ povezan podskup. Tada je ili $Y \subseteq C$ ili $Y \subseteq D$.

Dokaz: Skupovi $C \cap Y$ i $D \cap Y$ su otvoreni u Y, pa kada bi oba bili neprazni, bio bi Y nepovezan. □

Teorem 23.3

Unija povezanih skupova koji imaju zajedničku točku je povezana.

Dokaz: Neka je $Y := \bigcup_\alpha A_\alpha$, A_α povezani i $p \in \bigcap_\alpha A_\alpha$.
Pretpostavimo da je $Y = C \sqcup D$ i neka je $p \in C$.
Zbog prethodne leme je tada i $A_\alpha \subseteq C$ za sve α, pa je i
$\bigcup_\alpha A_\alpha \subseteq C$, tj. $D = \emptyset$, $\Rightarrow\!\Leftarrow$ $Y = C \sqcup D$. □

Povezanost zatvorenja

Teorem 23.4

Neka je $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$. Ako je A povezan onda je i B povezan.

Dokaz: Pretpostavimo da je $B = C \sqcup D$ separacija.
Prema lemi 23.2 je $A \subseteq C$ (ili $A \subseteq D$), pa je i $B \subseteq \overline{A} \subseteq \overline{C}$.
Kako je $\overline{C} \cap D = \emptyset$ to je $B \cap D = \emptyset$ $\Rightarrow\!\Leftarrow$ $B = C \sqcup D$. □

Zbog potpunosti navedimo i ovaj teorem dokazan u Analizi:

Teorem 23.5

(a) *X je povezan akko **ne** postoji neprekidna surjekcija $X \twoheadrightarrow \{0, 1\}$.*

(b) *Ako je X povezan i $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje onda je $f(X)$ povezan podskup od Y.*

Povezanost konačnih produkata

Teorem 23.6

(a) *Neka je $\{B_\alpha\}_\alpha$ familija povezanih skupova i neka je A povezan i t.d. je $A \cap B_\alpha \neq \emptyset$ za sve α.*
Tada je unija $A \cup \bigcup_\alpha B_\alpha$ povezan skup.

(b) *Konačan produkt povezanih prostora je povezan.*

Dokaz(a): Neka je $C_\alpha = A \cup B_\alpha$. Tada je $\{C_\alpha\}_\alpha$ familija povezanih skupova koji imaju zajedničku točku (svaka točka iz A), pa je prema teoremu 23.3 njihova unija povezan skup.

(b) Dovoljno je pokazati da je produkt $X \times Y$ dvaju povezanih prostora povezan.
Odaberimo točku $y_0 \in Y$ i neka je $A := X \times \{y_0\}$, $B_x := \{x\} \times Y$, $x \in X$. Sada primijenimo (a). □

(Ne)povezanost beskonačnih produkata

A što je s povezanošću proizvoljnih produkata?

Primjer: $\mathbb{R}^\omega$ u box topologiji nije povezan

Rastavimo $\mathbb{R}^\omega = A \sqcup B$, gdje je A skup svih omeđenih nizova realnih brojeva, a B skup svih neomeđenih nizova. A i B su očito neprazni i disjunktni.
Pokažimo da su A i B otvoreni skupovi u box topologiji.
Neka je $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\omega$. Otvoren skup

$$U := \langle x_1 - 1, x_1 + 1\rangle \times \langle x_2 - 1, x_2 + 1\rangle \times \cdots$$

sastoji se od sâmih omeđenih nizova ako je $\mathbf{x}$ omeđen niz, a od sâmih neomeđenih ako je $\mathbf{x}$ neomeđen.

Povezanost beskonačnog produkta

Ali, u produktnoj topologiji $\mathbb{R}^\omega$ jeste povezan.

Neka je $\widetilde{\mathbb{R}^n} := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) : x_i = 0 \text{ za } i > n\} \subseteq \mathbb{R}^\omega$.
$\widetilde{\mathbb{R}^n} \cong \mathbb{R}^n$ je povezan (jer je $\mathbb{R}$ povezan — pokazat ćemo kasnije).
Tada je, prema teoremu 23.3, i potprostor $\mathbb{R}^\infty := \bigcup \widetilde{\mathbb{R}^n}$ povezan jer svi $\widetilde{\mathbb{R}^n}$ sadrže točku $\mathbf{O} = (0, 0, \dots)$.
Dokažimo da je zatvorenje od $\mathbb{R}^\infty$ jednako $\mathbb{R}^\omega$.
Neka je $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\omega$, $U = \prod U_i$ proizvoljan bazni otvoren skup za produktnu topologiju oko točke $\mathbf{x}$, i neka je $N \in \mathbb{N}$ t.d. je $U_i = \mathbb{R}$ za sve $i > N$.
Tada točka $\mathbf{x}_N := (x_1, \dots, x_N, 0, 0, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$ pripada skupu U, pa je $\mathbf{x} \in \overline{\mathbb{R}^\infty}$, tj. $\mathbb{R}^\omega = \overline{\mathbb{R}^\infty}$ pa je, prema teoremu 23.4, povezan.

Uz odgovarajuću modifikaciju, ovaj dokaz pokazuje da je, uz produktnu topologiju, i produkt proizvoljne familije povezanih prostora povezan.

Povezanost linearnog kontinuuma i posljedice

Definicija

Totalno uređen skup $(L, <)$ koji ima barem dvije točke je linearni kontinuum ako

(1) L ima svojstvo supremuma, i
(2) za sve $x < y$ postoji z takav da je $x < z < y$.

Teorem 24.1

Svaki linearni kontinuum L s uređajnom topologijom je povezan. Intervali i zrake u L također su povezani skupovi.

Dokaz je praktički dokaz povezanosti segmenta $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ iz Analize. □

Korolar 24.2

Realni brojevi $\mathbb{R}$, te intervali i zrake u $\mathbb{R}$, su povezani skupovi. □

Teorem o međuvrijednostima

Kao i za realne funkcije, vrijedi:

Teorem 24.3 (o međuvrijednostima)

Neka je X povezan prostor, Y linearni kontinuum a $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje. Tada za svake dvije točke $a, b \in X$ i svaku točku $y \in \langle f(a), f(b)\rangle \subseteq Y$ postoji $c \in X$ t.d. je $f(c) = y$.
Dokaz je kao u Analizi za realne funkcije. □

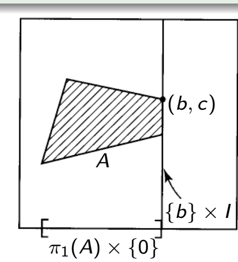
Primjer: Duga linija

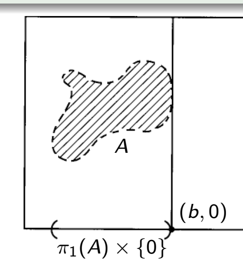
Za proizvoljan DUS X je skup $X \times [0, 1\rangle$, s topologijom leksikografskog uređaja, linearni kontinuum (kao da smo između susjednih točaka iz X „umetnuli" interval $\langle 0, 1\rangle$).
Duga linija L je leksikografski uređen skup $S_\Omega \times [0, 1\rangle$ iz kojeg je izvađen minimalni element.
L je (putevima) povezan lokalno homeomorfan s $\mathbb{R}$, ali se ne može smjestiti u $\mathbb{R}$ (niti $\mathbb{R}^n$) (dok se $\mathbb{R}$ može smjestiti u L). Zadatak: Dokaži!

Linearni kontinuum sasvim različit od $\mathbb{R}$

$I_o^2 = I \times I$ s topologijom leksikografskog uređaja

Netrivijalno je provjeriti jedino svojstvo supremuma.
Neka je $A \subseteq I_o^2$ i $b := \sup \pi_1(A)$.
Ako je $b \in \pi_1(A)$, tj. $A \cap (\{b\} \times I) \neq \emptyset$, onda postoji $c \in I$ t.d. je $(b, c) = \sup A \cap (\{b\} \times I)$, pa je to i supremum skupa A.
Ako $b \notin \pi_1(A)$ onda je $(b, 0) = \sup A$ (jer da je za neki $b' < b$, (b', c) gornja međa za A, bio bi b' gornja međa za $\pi_1(A)$).



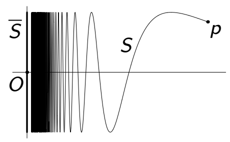


Povezanost putevima

Definicija

X je putevima povezan ako za svake dvije točke $x_0, x_1 \in X$ postoji put (t.j. neprekidna funkcija) $f\colon [a,b] \to X$ od x_0 do x_1.

Klasični primjer povezanog ali ne i putevima povezanog prostora je topološka sinusna krivulja $\overline{S} \subseteq \mathbb{R}^2$, za $S = \{(x, \sin\frac{1}{x}) : x \in \langle 0,1]\}$.



DZ: $\overline{S}$ je povezan kao zatvorenje povezanog S.
Neka je $f = (f_1, f_2)\colon [a,c] \to \overline{S}$ put od O do p i neka je $b := \max f_1^{-1}(0)$. Zamijenimo $[b,c]$ s $[0,1]$ i dobivamo (rabimo za put opet oznaku f) $f = (f_1, f_2)\colon [0,1] \to \overline{S}$ t.d. je $f_1(0) = 0$ i $f(\langle 0,1]) \subseteq S$.
Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $0 < u_n < f_1(\frac{1}{n})$ t.d. je $\sin\frac{1}{u_n} = (-1)^n$, i neka je $0 < t_n < \frac{1}{n}$ t.d. je $f_1(t_n) = u_n$, tj. $f(t_n) = (u_n, (-1)^n)$.
Kako je f_1 neprekidno, zbog $t_n \to 0$, niz $f(t_n)$ ima dva gomilišta: $(0,1)$ i $(0,-1)$, pa f nije neprekidno, tj. $\overline{S}$ ***nije*** putevima povezan.

Komponente povezanosti

Definicija

Komponente povezanosti (kratko: komponente) prostora X su klase ekvivalencije s obzirom na relaciju:
$x \sim y$ ako postoji povezan potprostor od X koji sadrži i x i y.

Teorem 25.1

Komponente od X su disjunktni povezani potprostori čija je unija cijeli X, i t.d. svaki povezan potprostor siječe samo jednog od njih (pa je sadržan u točno jednoj komponenti).

Dokaz: Jedino treba provjeriti povezanost komponenti.
Neka je C neka komponenta i fiksirajmo točku $x_0 \in C$.
Za proizvoljan $x \in C$, tj. $x \sim x_0$, $\exists$ povezan A_x t.d. je $x, x_0 \in A_x$.
Kako A_x siječe samo jednu komponentu, mora biti $A_x \subseteq C$.
Dakle, $C = \bigcup_{x\in C} A_x$, pa je C povezan jer su svi A_x povezani i sadrže x_0. □

Komponente povezanosti putevima

Definicija

Komponente povezanosti putevima su klase ekvivalencije s obzirom na relaciju:

$x \sim y$ ako postoji put u X od x do y.

Slično kao za komponente povezanosti, dokazuje se:

Teorem 25.2

Komponente povezanosti putevima su disjunktni putevima povezani potprostori čija je unija cijeli X, i takvi su da svaki putevima povezan potprostor siječe samo jednog od njih. □

Lokalna povezanost

Definicija

X je lokalno (putevima) povezan u točki x ako za svaku okolinu $U \ni x$ postoji (putevima) povezana okolina V t.d. je $x \in V \subseteq U$.
Prostor X je lokalno (putevima) povezan ako je lokalno (putevima) povezan u svakoj točki.

Primjeri:

- $\mathbb{R}$, intervali, $\mathbb{R}^n$, ... su (putevima) povezani i lokalno (putevima) povezani.
- $[-1,0\rangle \cup \langle 0,1] \subseteq \mathbb{R}$ je lokalno povezan ali nije povezan.
- Topološka sinusna krivulja je povezana ali nije lokalno povezana.
- $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ nije niti povezan niti lokalno povezan.

Komponente otvorenog skupa u lokalno povezanom prostoru

Komponente otvorenog skupa nisu općenito otvoreni skupovi. Ali:

Teorem 25.3

X je lokalno povezan ako i samo ako su komponente svakog otvorenog skupa otvoreni skupovi u X.

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je X lokalno povezan, $U \subseteq X$ otvoren i C komponenta od U. Za $x \in C$ neka je V povezana okolina t.d. je $x \in V \subseteq U$. Zbog povezanosti je $V \subseteq C$ pa je C otvoren u X.

$\Leftarrow$ Neka su komponente otvorene. Za okolinu $U \ni x$ neka je C komponenta od U koja sadrži x. Skup C je otvoren, povezan i sadržan je u U pa je X lokalno povezan. □

Teorem 25.4 (dokazuje se analogno)

X je lokalno putevima povezan ako i samo ako su komponente povezanosti putevima skupovi otvoreni u X. □

Komponente i komponente povezanosti putevima

O odnosu komponenata i komponenata povezanosti putevima govori

Teorem 25.5

Svaka komponenta povezanosti putevima sadržana je u nekoj komponenti od X. Ako je X lokalno putevima povezan onda se komponente i komponente povezanosti putevima podudaraju.

Dokaz: Neka je C komponenta, $x \in C$ i P komponenta povezanosti putevima koja sadrži x. Kako je P povezan, $P \subseteq C$.

Neka je X lokalno putevima povezan i pretpostavimo $P \subsetneq C$. Neka je Q unija svih komponenata povezanosti putevima koje sijeku C i različite su od P. Svaka od njih je sadržana u C pa je $C = P \cup Q$. Kako je X lokalno povezan, komponente povezanosti putevima su otvorene, pa su P i Q otvoreni skupovi, tj. $C = P \sqcup Q$ je separacija, $\Rightarrow\!\Leftarrow$ C je povezan. □

Kompaktnost

Definicija

Topološki prostor X je kompaktan ako svaka familija otvorenih skupova koja pokriva X sadrži konačnu potfamiliju koja također pokriva X.
Kaže se da *svaki otvoren pokrivač sadrži konačan potpokrivač*.

Jednostavnu karakterizaciju kompaktnosti potprostora, daje

Lema 26.1

Potprostor $Y \subseteq X$ je kompaktan akko svaki pokrivač skupovima otvorenim u X sadrži konačnu potfamiliju koja pokriva Y. □

Dobro je znati da

Teorem 26.2

Svaki je zatvoren potprostor kompaktnog prostora kompaktan. □

Kompaktnost u Hausdorffovim prostorima

O obratu govori

Teorem 26.3

Svaki je kompaktan potprostor Hausdorffova prostora zatvoren.

Teorem je posljedica sljedeće, jače tvrdnje:

Lema 26.4

Neka je Y kompaktan potprostor Hausdorffova prostora X. Tada za svaku točku $x_0 \notin Y$ postoje disjunktne otvorene okoline $U \ni x_0$ i $V \supseteq Y$.

Dokaz: Neka je $x_0 \in X \setminus Y$. Za svaki $y \in Y$ neka su $U_y \ni x_0$ i $V_y \ni y$ disjunktne otvorene okoline. Familija $\{V_y : y \in Y\}$ je otvoren pokrivač od Y pa zbog kompaktnosti postoje $y_1, \dots, y_n$ t.d. već $V_{y_1}, \dots, V_{y_n}$ pokrivaju Y. Tada su $U := U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$ i $V := V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$ tražene disjunktne okoline od x_0 odnosno Y. □

Hausdorffovost je nužna

(Kontra)primjer

U prethodnom teoremu 26.3 i pripadnoj lemi, pretpostavka da je prostor X Hausdorffov zaista je potrebna. Naime, neka je $X = \mathbb{R}$ ali s topologijom konačnih komplemenata. Tada su jedini pravi podskupovi od X koji su zatvoreni — konačni podskupovi.

S druge strane, uz ovu topologiju *svaki* je podskup od X kompaktan.

Dva *stara* i jedan *novi* teorem

Najprije dva teorema koja (maltene) znamo iz Analize:

Teorem 26.5

Neprekidna slika kompaktnog prostora je kompaktna. □

Teorem 26.6

Neka je $f : X \to Y$ neprekidna bijekcija. Ako je X kompaktan a Y Hausdorffov onda je f homeomorfizam. □

A sada jedan „pravi" teorem:

Teorem 26.7

Produkt od konačno mnogo kompaktnih prostora je kompaktan.

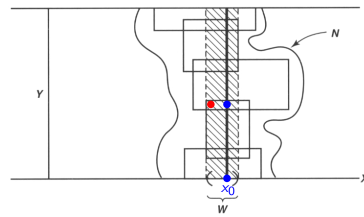
Dokaz: Dovoljno je pokazati da je produkt dvaju kompaktnih prostora kompaktan. Ali najprije jedna lema:

Lema o cijevi

Lema 26.8

Neka je $N \subseteq X \times Y$ okolina „sloja" $\{x_0\} \times Y$. Ako je Y kompaktan onda postoji okolina $W \ni x_0$ t.d. je $W \times Y \subseteq N$.

Dokaz: Zbog kompaktnosti, dovoljno je konačno mnogo baznih otvorenih skupova, koji su svi sadržani u N, da pokriju $\{x_0\} \times Y$.
Neka su to $U_1 \times V_1, \dots, U_n \times V_n$ (i svi oni sijeku $\{x_0\} \times Y$).
Neka je $W := U_1 \cap \dots \cap U_n$. W je otvoren i sadrži x_0.
Tvrdimo da je $W \times Y \subseteq \bigcup_i (U_i \times V_i) \subseteq N$.



Zaista, neka je $(x, y) \in W \times Y$ i neka je i t.d. je $(x_0, y) \in U_i \times V_i$.
Znači $y \in V_i$, a kako je $x \in U_j$ za sve j, dakle i za $j = i$,
to je $(x, y) \in U_i \times V_i \subseteq N$. □

Dokaz teorema

Dokažimo sada teorem. Neka su X i Y kompaktni prostori i $\mathcal{A}$ otvoren pokrivač od $X \times Y$. Za točku $x_0 \in X$ je sloj $\{x_0\} \times Y$ kompaktan pa je pokriven s konačno mnogo članova $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, tj. $\{x_0\} \times Y \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n =: N$.
Prema prethodnoj lemi, postoji otvoren $W \subseteq X$ t.d. je $\{x_0\} \times Y \subseteq W \times Y \subseteq N$, pa je $W \times Y$ pokriven s konačno mnogo članova $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$.
Dakle, za svaki $x \in X$ postoji okolina $W_x \ni x$ t.d. je „cijev" $W_x \times Y$ pokrivena s konačno mnogo članova iz $\mathcal{A}$.
Kako je X kompaktan, već nekih konačno mnogo članova $W_{x_1}, \dots, W_{x_k}$ pokriva X,
pa konačno mnogo „cijevi" $W_{x_1} \times Y, \dots, W_{x_k} \times Y$ pokriva $X \times Y$,
a svaka je pokrivena s konačno mnogo članova familije $\mathcal{A}$.
Dakle, dovoljno je konačno mnogo članova familije $\mathcal{A}$ da pokrije X. □

Je li i beskonačan produkt kompakata kompaktan?

Napomena

Je li i produkt proizvoljne familije kompaktnih prostora kompaktan prostor — mnogo je teže pitanje. O tome govori poznati Tihonovljev teorem, kojem je posvećeno 5. poglavlje.

DOGOVOR:

Neka je $\mathcal{A}$ familija skupova koja pokriva skup S. Ako se skup S može pokriti s konačno mnogo članova familije $\mathcal{A}$, onda ćemo kazati da S je konačno-pokriven s $\mathcal{A}$.

Centrirane familije

Za karakterizaciju kompaktnosti pomoću zatvorenih skupova trebamo najprije jednu definiciju.

Definicija

Familija $\mathcal{C}$ podskupova od X je centrirana ako svaka konačna potfamilija od $\mathcal{C}$ ima neprazan presjek.

Teorem 26.9

X je kompaktan ako i samo ako svaka centrirana familija zatvorenih skupova ima neprazan presjek.

Dokaz: Treba gledati komplemente i rabiti De Morganova pravila. □

Specijalan slučaj ovog teorema govori da ako je $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \cdots \supseteq C_n \supseteq C_{n+1} \supseteq \cdots$ silazan niz nepraznih zatvorenih skupova u kompaktnom prostoru, onda je $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$.

Kompaktnost segmenta

Ovo zvuči poznato, ali nam ne treba „gustoća”:

Teorem 27.1

Neka je X totalno uređen skup sa svojstvom supremuma i uređajnom topologijom. Tada je svaki zatvoreni segment u X kompaktan.

Dokaz: Neka je $a < b$ i neka je $\mathcal{A}$ otvoren (u uređajnoj $=$ relativnoj topologiji (jer je segment konveksan)) pokrivač segmenta $[a, b]$.

Tvrdnja 1: Za svaki $x \in [a, b\rangle$ postoji $y \in \langle x, b]$ t.d. je $[x, y]$ konačno-pokriven s $\mathcal{A}$.

Ako x ima neposrednog sljedbenika, y, tada je skup $[x, y]$ dvočlan. ✓

Ako x nema neposrednog sljedbenika, neka je $A \in \mathcal{A}$ t.d. je $x \in A$. A je otvoren i $x \neq b$, pa postoji c t.d. je $[x, c\rangle \subseteq A$. Odaberimo $y \in \langle x, c\rangle$. Tada je $[x, y] \subseteq A$. ✓

nastavak dokaza

Tvrdnja 2: Skup $C := \{y > a : [a, y] \text{ je konačno-pokriven s } \mathcal{A}\}$ je neprazan.

To slijedi iz tvrdnje 1 za $x = a$. ✓

Neka je $c := \sup C$. Tada je $a < c \leq b$ (zbog tvrdnje 1).

Tvrdnja 3: $c \in C$, tj. $[a, c]$ je konačno-pokriven s $\mathcal{A}$.

Neka je $A \in \mathcal{A}$ t.d. je $c \in A$ i neka je $d \in [a, b]$ t.d. je $\langle d, c] \subseteq A$. Ako $c \notin C$ onda postoji $z \in \langle d, c\rangle \cap C$. Kako je $[a, z]$ konačno-pokriven s $\mathcal{A}$ i $[z, c] \subseteq A$, to je i $[a, c] = [a, z] \cup [z, c]$ konačno-pokriven s $\mathcal{A}$,

pa je $c \in C \quad \Rightarrow\!\Leftarrow \quad c \notin C$. ✓

Tvrdnja 4: $c = b$, što dokazuje teorem.

Pretpostavimo da je $c < b$. Prema tvrdnji 1, postoji $y > c$ t.d. je $[c, y]$ konačno-pokriven s $\mathcal{A}$. Kako je $[a, c]$ konačno-pokriven s $\mathcal{A}$, to je i $[a, y] = [a, c] \cup [c, y]$ konačno-pokriven s $\mathcal{A}$.

Značí $y \in C \quad \Rightarrow\!\Leftarrow \quad c = \sup C$ i $y > c$. □

Kompaktnost u $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^n$

Kao posljedice dobivamo:

Korolar 27.2

Svaki segment $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ je kompaktan. □

Korolar (teorema 27.1)

$\overline{S}_\Omega$ je kompaktan Hausdorffov prostor. □

Teorem 27.3

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktan ako i samo ako je A omeđen i zatvoren. □

Prethodni teorem u metričkim prostorima općenito ne vrijedi

(iako to studenti često zapamte upravo tako)

Postojanje ekstrema na kompaktu

I ovaj teorem „znamo” iz Analize:

Teorem 27.4 (Weierstrass)

Neka je $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje u totalno uređen skup Y s uređajnom topologijom. Ako je X kompaktan onda postoje $c, d \in X$ t.d. je $f(c) \le f(x) \le f(d)$ za sve $x \in X$, tj. funkcija f ima minimum i maksimum.

Dokaz: Pretpostavimo da skup $f(X)$ nema maksimum.
Tada je familija $\{\langle -\infty, y\rangle : y \in f(X)\}$ otvoren pokrivač od $f(X)$ pa, zbog kompaktnosti, već neka konačna potfamilija $\{\langle -\infty, y_1\rangle, \dots, \langle -\infty, y_n\rangle\}$ pokriva $f(X)$.
Ali element $\max\{y_1, \dots, y_n\}$ nije pokriven niti jednim od njih. □

Još dva teorema

Sljedeću smo činjenicu dokazali već u Analizi, ali ju i ovdje navodimo:

Lema 27.5 (o Lebesgueovu broju)

Neka je $\mathcal{A}$ otvoren pokrivač metričkog prostora X. Ako je X kompaktan onda postoji broj $\delta > 0$ t.d. za svaki podskup dijametra manjeg od δ postoji član pokrivača $\mathcal{A}$ koji taj skup sadrži.

Takav se δ naziva Lebesgueov broj pokrivača $\mathcal{A}$.

Kao i u Analizi, odavde slijedi:

Teorem 27.6 (o uniformnoj neprekidnosti na kompaktu)

Neka je $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje metričkih prostora. Ako je X kompaktan onda je f uniformno neprekidno. □

Dokaz leme o Lebesgueovu broju

Dokaz: Neka je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač od X. Ako je $X \in \mathcal{U}$ onda je svaki $\delta > 0$ dobar. Neka dakle, $X \notin \mathcal{U}$.
Zbog kompaktnosti postoji konačan potpokrivač $\{U_1, \dots, U_n\}$ i neka su $C_i := X \setminus U_i$, $i = 1, \dots, n$.
Definirajmo $f : X \to \mathbb{R}$ formulom $f(x) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n d(x, C_i)$ i pokažimo da je $f(x) > 0$ za sve x.
Za $x \in X$ neka je i t.d. je $x \in U_i$ i neka je $\varepsilon > 0$ t.d. je $B(x, \varepsilon) \subseteq U_i$. Tada je $d(x, C_i) \ge \varepsilon$ pa je $f(x) \ge \frac{\varepsilon}{n} > 0$.
Funkcija f je neprekidna i X je kompaktan, pa neka je $\delta := \min f$.
Neka je $A \subseteq X$ skup dijametra manjeg od δ, i neka je $x_0 \in A$ neka točka. Tada je $A \subseteq B(x_0, \delta)$. Neka je m indeks za koji je $d(x_0, C_m) = \max_i d(x_0, C_i)$. Tada je $\delta \le f(x_0) \le d(x_0, C_m)$, pa je $A \subseteq B(x_0, \delta) \subseteq X \setminus C_m = U_m \in \mathcal{U}$. □

Neprebrojivost „pravih” kompakata

Teorem 27.7

Neka je X neprazan kompaktan Hausdorffov prostor.
Ako X nema izoliranih točaka onda je on neprebrojiv.

Dokaz:

Tvrdnja 1: Za svaki neprazan otvoren $U \subseteq X$ i svaki $x \in X$ postoji neprazan otvoren $V \subseteq U$ t.d. $x \notin \overline{V}$.
Odaberimo $y \in U \setminus \{x\}$, neka su W_1 i W_2 disjunktne okoline od x odnosno y, i neka je $V := W_2 \cap U$. ✓

Tvrdnja 2: Ne postoji surjekcija $\mathbb{N} \twoheadrightarrow X$.
Neka je $(x_n)_n$ niz u X. Prema tvrdnji 1 za $U = X$, postoji neprazan otvoren $V_1 \subseteq X$ t.d. $x_1 \notin \overline{V}_1$. Induktivno, neka je $V_n \subseteq V_{n-1}$ neprazan otvoren skup t.d. $x_n \notin \overline{V}_n$. Tada je $\overline{V}_1 \supseteq \overline{V}_2 \supseteq \cdots$ silazan niz nepraznih zatvorenih skupova, pa zbog kompaktnosti postoji $x \in \bigcap \overline{V}_n$. Ali za sve n je $x \neq x_n$. □

Neprebrojivost realnih brojeva

Korolar 27.8

Svaki segment $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ je neprebrojiv. □

Korolar 27.9

Skup $\mathbb{R}$ realnih brojeva je neprebrojiv. □

Prvotno je kompaktnost bila definirana ovim svojstvom:

Teorem 28.1

U kompaktnom prostoru svaki beskonačan skup ima gomilište.
Kažemo da ima Bolzano-Weierstrassovo svojstvo ili da je BW-kompaktan.

Dokaz: Pretpostavimo da skup $A \subseteq X$ *nema* gomilište. Tada je A zatvoren i za svaki $a \in A$ postoji okolina $U_a \ni a$ t.d. je $U_a \cap A = \{a\}$.
X je pokriven otvorenim skupom $X \setminus A$ i skupovima U_a, $a \in A$.
Kako je X kompaktan i $(X \setminus A) \cap A = \emptyset$, A je pokriven s konačno mnogo skupova U_a, a svaki od njih sadrži samo jednu točku iz A. □

Primjer: S_Ω nije kompaktan, iako svaki beskonačan podskup *ima* gomilište

Zaista, neka je $A \subseteq S_\Omega$ beskonačan skup i neka je $B \subseteq A$ neki prebrojivo beskonačan podskup. Neka je $b \in S_\Omega$ neka gornja međa od B, pa je $B \subseteq [a_0, b] \subseteq S_\Omega$, gdje je $a_0 = \min S_\Omega$. Kako S_Ω ima svojstvo supremuma, segment $[a_0, b]$ je kompaktan, pa B ima gomilište. Zato i $A \supseteq B$ ima gomilište.

Kompaktnost u metrizabilnim prostorima

Definicija

Za topološki prostor X kažemo da je nizovno kompaktan ako svaki niz u X ima gomilište, tj. ima konvergentan podniz.

Sljedeći teorem je zapravo dokazan u Analizi pa ga samo navodimo:

Teorem 28.2

Neka je X metrizabilan. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:

(1) *X je kompaktan.*

(2) *X je nizovno kompaktan.*

(3) *Svaki beskonačan podskup od X ima gomilište.* □

Primjer: S_Ω je nizovno kompaktan ali nije kompaktan

Zaista, svaki niz u S_Ω ima gornju među u S_Ω, pa leži u nekom segmentu, koji je kompaktan, pa niz ima gomilište.

Lokalna kompaktnost

Definicija

Prostor X je lokalno kompaktan u točki x ako postoji kompaktan podskup $C \subseteq X$ koji sadrži neku otvorenu okolinu točke x.
X je lokalno kompaktan ako je lokalno kompaktan u svakoj točki.

Primjeri

- Svaki kompaktan prostor je lokalno kompaktan.
- $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^n$ su lokalno kompaktni. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ *nije* lokalno kompaktan.
- $\mathbb{R}^\omega$ *nije* lokalno kompaktan. Naime, nijedan bazni otvoren skup $B = \langle a_1, b_1\rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n\rangle \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$ nije sadržan u nekom kompaktnom skupu. Kada bi bio, onda bi i zatvorenje $\overline{B} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$ bio kompaktan skup, što nije.
- Svaki linearno uređen skup sa svojstvom supremuma je lokalno kompaktan. (Bazni elementi su sadržani u segmentima.)

Koji su nam prostori „dragi”?

Najdraži su nam metrički, ili kompaktni Hausdorffovi prostori (još bolje kompaktni metrički), ali ako baš ne može — da je barem potprostor kompaktnog Hausdorffovog prostora.
Evo jedne karakterizacije takvih „poželjnih” prostora:

Teorem 29.1

X je lokalno kompaktan Hausdorffov prostor akko postoji Y t.d.:

(1) *X je potprostor od Y;*

(2) *skup $Y \setminus X$ sastoji se od jedne jedine točke;*

(3) *Y je kompaktan Hausdorffov prostor.*

Takav je Y jedinstven, u smislu da ako su Y i Y' takvi prostori, onda postoji homeomorfizam $Y \to Y'$ koji je identiteta na X.

Primijetimo da ako je X kompaktan, $Y = X \cup \{\text{izolirana točka}\}$. Ako X nije kompaktan onda je $\overline{X} = Y$.

Dokaz teorema 29.1:

Jedinstvenost: Neka su $Y = X \cup \{p\}$ i $Y' = X \cup \{p'\}$ kao u teoremu.
Definirajmo $h\colon Y \to Y'$ kao identitetu na X i $h(p) := p'$.
Tvrdnja: h je otvorena bijekcija. Bijektivnost je očita. Neka je $U \subseteq Y$ otvoren. Ako $p \notin U$ onda je U otvoren u X, a jer je X otvoren u Y', U je otvoren i u Y'. Ako je $p \in U$ onda je $C := Y \setminus U \subseteq Y$ zatvoren, dakle kompaktan, i podskup je od X. Zato je $Y' \setminus h(U) = C$ kompaktan, dakle i zatvoren podskup od Y', pa je $h(U)$ otvoren u Y'.
Analogno je h^{-1} je otvorena bijekcija, pa je h homeomorfizam.

$\Rightarrow$ Neka je $Y := X \cup \{\infty\}$ gdje $\infty \notin X$, a otvoreni skupovi neka su otvoreni skupovi u X i komplementi $Y \setminus C$ kompaktnih $C \subseteq X$.
Tada je X je potprostor od Y, i Y je kompaktan Hausdorffov.

$\Leftarrow$ Pretpostavimo da postoji Y sa svojstvima (1)–(3).
X je Hausdorffov kao potprostor Hausdorffovog. Pokažimo da je X lokalno kompaktan u svakoj točki. Za $x \in X$ neka su U i V disjunktne okoline u Y od x odnosno ∞. Tada je $C := Y \setminus V$ zatvoren, znači kompaktan podskup od Y, dakle i kompaktan podskup od X i $x \in U \subseteq C$, pa je X lokalno kompaktan. □

Kompaktifikacija jednom točkom

Definicija

Kompaktifikacija prostora X je svaki kompaktan Hausdorffov prostor Y sa svojstvom da je $X \subseteq Y$ pravi potprostor t.d. je $\overline{X} = Y$.
Ako je $Y \setminus X$ samo jedna točka, kažemo da je Y kompaktifikacija jednom točkom ili jednotočkovna kompaktifikacija od X, i obično se označuje X^* ili $X^\bullet$. (Prema teoremu 29.1 ona je jedinstvena.)

Prethodni teorem pokazuje da X ima kompaktifikaciju jednom točkom akko je nekompaktan lokalno kompaktan Hausdorffov.

Primjeri

- Jednotočkovna kompaktifikacija od $\mathbb{R}$ je $\mathbb{S}^1$.
- Jednotočkovna kompaktifikacija od $\mathbb{R}^2$ je $\mathbb{S}^2$.
- Jednotočkovna kompaktifikacija od $\mathbb{C}$ je $\mathbb{S}^2$ — Riemannova sfera.

„Prava” definicija lokalne kompaktnosti

Lokalna se svojstva obično definiraju ovako:
X lokalno ima svojstvo **P** ako za svaku točku x i svaku okolinu $U \ni x$ postoji okolina $V \ni x$ sadržana u U koja ima svojstvo **P**.
Zato je dobro da vrijedi:

Teorem 29.2

Neka je X Hausdorffov. Tada je X lokalno kompaktan ako i samo ako za svaki $x \in X$ i svaku okolinu $U \ni x$ postoji okolina $V \ni x$ t.d. je skup $\overline{V}$ kompaktan i $\overline{V} \subseteq U$.

Dokaz: $\Leftarrow$ Očito. $\Rightarrow$ Neka je $x \in X$ i $U \ni x$ proizvoljna okolina.
Neka je $X^\bullet$ jednotočkovna kompaktifikacija od X i neka je $C := X^\bullet \setminus U$.
Tada je C zatvoren, dakle i kompaktan potprostor od $X^\bullet$ i $x \notin C$.
Neka su V i W disjunktne okoline od x odnosno C (lema 26.4).
Tada je $\overline{V}$ kompaktan i disjunktan s C, pa je $\overline{V} \subseteq U$. □

Lokalno kompaktni Hausdorffovi prostori su „dobri”

Korolar 29.3

Neka je A potprostor lokalno kompaktnog Hausdorffovog X. Ako je A otvoren ili zatvoren u X onda je A lokalno kompaktan.

Dokaz: A zatvoren: Za $x \in A$ neka je $C \subseteq X$ kompaktan t.d. sadrži neku okolinu $U \ni x$. Tada je $C \cap A$ zatvoren u C, dakle i kompaktan, i sadrži okolinu $U \cap A$ od x u A. ✓
A otvoren: Za $x \in A$, prema teoremu 29.2, odaberemo okolinu $V \subseteq X$ od x t.d. je $\overline{V}$ kompaktan i $\overline{V} \subseteq A$.
Tada je $C := \overline{V} \subseteq A$ kompaktan i sadrži okolinu V od x u A. □

Konačno, iz teorema 29.1 i ovog korolara, dobivamo:

Korolar 29.4

Prostor X je lokalno kompaktan Hausdorffov akko se može smjestiti kao otvoren podskup u neki kompaktan Hausdorffov prostor. □