Kompleksni brojevi

Sonja Žunar

13. listopada 2016.

Sjetimo se:

Definicija kompleksnih brojeva

$$\mathbb{C} := \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\},$$

pri čemu je $i = \sqrt{-1}$ **imaginarna jedinica**. Za z kao gore,

$$x =: \operatorname{Re} z, \qquad y =: \operatorname{Im} z.$$

Operacije s kompleksnim brojevima

Neka su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Zbrajanje

$$(a + ib) + (c + id) := (a + c) + i(b + d)$$

PR: $(2 + 3i) + (1 - i) = 3 + 2i$

Operacije s kompleksnim brojevima

Neka su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Množenje

$$(a + ib)(c + id) := (ac - bd) + i(ad + bc)$$

"Množimo svaki sa svakim, i koristimo $i^2 = -1$."

$$\begin{aligned} \text{PR: } (2 + 3i)(1 - i) &= 2 \cdot 1 + 3i \cdot 1 + 2(-i) + 3i(-i) \\ &= 2 + 3i - 2i + 3 \\ &= 5 + i. \end{aligned}$$

Operacije s kompleksnim brojevima

Neka su $a, b \in \mathbb{R}$.

Kompleksno konjugiranje

$$\overline{a + ib} := a - ib.$$

PR: $\overline{1 - i} = 1 + i$.

Apsolutna vrijednost

$$|a + ib| := \sqrt{a^2 + b^2}.$$

PR: $|1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

Primijetimo: za $z \in \mathbb{C}$,

$$z\overline{z} = |z|^2.$$

Dokaz: Stvarno, $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.

Dijeljenje

Neka su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ako $c + id \neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{a+ib}{c+id} &:= \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} \\ &= \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2} \\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.\end{aligned}$$

Drugačije zapisano (vidi 2. redak u gornjem raspisu): za $z \in \mathbb{C}$, $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$\frac{z}{w} := z \cdot \frac{\overline{w}}{|w|^2}.$$

PR: $\dfrac{1+2i}{1-i} = \dfrac{1+2i}{1-i} \cdot \dfrac{1+i}{1+i} = \dfrac{-1+3i}{2} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i.$

Prikaz u kompleksnoj ravnini