GLATKE I RIEMANNOVE MNOGOSTRUKOSTI

Željka Milin-Šipuš, Pavle Pandžić i Juraj Šiftar

Drugi dio standardnog poslijediplomskog kolegija **Geometrija i topologija**. Izvodi se u ljetnom semestru (30 sati predavanja).

Vektorska polja duž krivulje

Neka je $c : I \to M$ krivulja (glatko preslikavanje : $I \to M$, $I \subset \mathbf{R}$ otvoren interval).

Vektorska polja duž krivulje

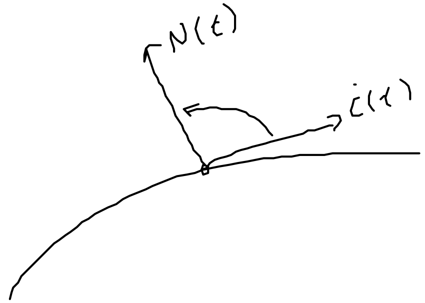
Neka je $c : I \to M$ krivulja (glatko preslikavanje $: I \to M$, $I \subset \mathbf{R}$ otvoren interval).

Vektorsko polje duž c je glatko preslikavanje $V : I \to TM$ takvo da je $V(t) \in T_{c(t)}M$, $t \in I$.

Primjer

- Vektorsko polje brzine $\dot{c}(t) := c_*(d/dt)$, $\dot{c}(t)f = \frac{d}{dt}(f \circ c)(t)$.

Primjer



- Vektorsko polje brzine $\dot{c}(t) := c_*(d/dt)$, $\dot{c}(t)f = \frac{d}{dt}(f \circ c)(t)$.

- Ako je $c : I \to \mathbf{R}^2$, tada definiramo $N(t) = J\dot{c}(t)$, gdje je J pozitivna rotacija za $\pi/2$. Polje n se naziva *normalno polje* krivulje c.

Primjer

- Vektorsko polje brzine $\dot{c}(t) := c_*(d/dt)$, $\dot{c}(t)f = \frac{d}{dt}(f \circ c)(t)$.
- Ako je $c : I \to \mathbf{R}^2$, tada definiramo $N(t) = J\dot{c}(t)$, gdje je J pozitivna rotacija za $\pi/2$. Polje n se naziva *normalno polje* krivulje c.
- Ako je $\tilde{V} \in \mathcal{T}(M)$, za $t \in I$ definiramo $V(t) = \tilde{V}_{c(t)}$.

Za vektorsko polje V duž c kažemo da se *može proširiti* (engl. *extendible*), ako postoji vektorsko polje $\tilde{V}$ u okolini slike od c za koje vrijedi $V(t) = \tilde{V}_{c(t)}$.

Za vektorsko polje V duž c kažemo da se *može proširiti* (engl. *extendible*), ako postoji vektorsko polje $\tilde{V}$ u okolini slike od c za koje vrijedi $V(t) = \tilde{V}_{c(t)}$.

Označimo $\mathcal{T}(c)$ skup svih vektorskih polja duž c. Uz uobičajeno definirane operacije $\mathcal{T}(c)$ je realan vektorski prostor.

Propozicija

Neka je ∇ *linearna koneksija na* M*. Tada za svaku krivulju* $c : I \to M$*,* ∇ *definira jedinstveno preslikavanje*

$$D_t : \mathcal{T}(c) \to \mathcal{T}(c)$$

koji zadovoljava sljedeća svojstva:

Propozicija

Neka je ∇ *linearna koneksija na* M*. Tada za svaku krivulju* $c : I \to M$, ∇ *definira jedinstveno preslikavanje*

$$D_t : \mathcal{T}(c) \to \mathcal{T}(c)$$

koji zadovoljava sljedeća svojstva:

1. *Linearnost nad* $\mathbf{R}$*,*

Propozicija

Neka je ∇ linearna koneksija na M. Tada za svaku krivulju $c : I \to M$, ∇ definira jedinstveno preslikavanje

$$D_t : \mathcal{T}(c) \to \mathcal{T}(c)$$

koji zadovoljava sljedeća svojstva:

1. *Linearnost nad* $\mathbf{R}$,
2. *Produktno pravilo* $D_t(fV) = \dot{f}V + fD_tV$, $f \in C^\infty(I)$,

Propozicija

Neka je ∇ *linearna koneksija na* M. *Tada za svaku krivulju* $c : I \to M$, ∇ *definira jedinstveno preslikavanje*

$$D_t : \mathcal{T}(c) \to \mathcal{T}(c)$$

koji zadovoljava sljedeća svojstva:

1. *Linearnost nad* $\mathbf{R}$,
2. *Produktno pravilo* $D_t(fV) = \dot{f}V + fD_tV$, $f \in C^\infty(I)$,
3. *Ako se* V *može proširiti, tada za bilo koje proširenje* $\tilde{V}$ *vrijedi*

$$D_tV(t) = \nabla_{\dot{c}(t)}\tilde{V}.$$

$D_t V$ je *kovarijantna derivacija od* V *duž* c.

$D_t V$ je *kovarijantna derivacija od* V *duž* c.

Napomena. Linearna koneksija inducira koneksiju i na svakom tenzorskom svežnju nad M. Specijalno na $T^0 M$

$$\nabla_X f = Xf.$$

Geodetske krivulje i paralelni pomak

Motivacija. Generalizirati svojstva pravca iz $\mathbf{R}^n$. Geodetske krivulje ćemo definirati kao krivulje *akceleracije jednake 0*.

Geodetske krivulje i paralelni pomak

Motivacija. Generalizirati svojstva pravca iz $\mathbf{R}^n$. Geodetske krivulje ćemo definirati kao krivulje *akceleracije jednake 0*.

Mogu se opisati i kao krivulje koje (lokalno) minimiziraju udaljenost - tehnički zahtjevnije. Ili kao krivulje (geodetske) zakrivljenosti 0.

Neka je M mnogostrukost s linearnom koneksijom ∇ i neka je c krivulja u M.

Neka je M mnogostrukost s linearnom koneksijom ∇ i neka je c krivulja u M.

Akceleracija od c je vektorsko polje $D_t \dot{c}$ duž c.

Neka je M mnogostrukost s linearnom koneksijom ∇ i neka je c krivulja u M.

Akceleracija od c je vektorsko polje $D_t\dot{c}$ duž c.

Krivulja se naziva *geodetskom* s obzirom na ∇ ako je

$$D_t\dot{c} \equiv 0.$$

Teorem (Egzistencija i jedinstvenost geodetskih krivulja)

Neka je M mnogostrukost s linearnom koneksijom ∇.

Teorem (Egzistencija i jedinstvenost geodetskih krivulja)

Neka je M mnogostrukost s linearnom koneksijom ∇.

Za svaku točku $p \in M$, tangencijalni vektor $V \in T_pM$ i $t_0 \in \mathbf{R}$, postoji otvoreni interval $I \subset \mathbf{R}$, $t_0 \in I$, i geodetska krivulja $c : I \to M$ koja zadovoljava $c(t_0) = p$, $\dot{c}(t_0) = V$.

Teorem (Egzistencija i jedinstvenost geodetskih krivulja)

Neka je M mnogostrukost s linearnom koneksijom ∇.

Za svaku točku $p \in M$, tangencijalni vektor $V \in T_pM$ i $t_0 \in \mathbf{R}$, postoji otvoreni interval $I \subset \mathbf{R}$, $t_0 \in I$, i geodetska krivulja $c : I \to M$ koja zadovoljava $c(t_0) = p$, $\dot{c}(t_0) = V$.

Svake dvije takve geodetske krivulje poklapaju se na presjeku domena.

Dokaz

Neka su (x^i) koordinate u okolini U od p. Koristeći (**??**) vidimo da je krivulja

$$c(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$$

geodetska ako i samo ako za svaki k vrijedi

$$\ddot{x}^k(t) + \sum_{i,j} \dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)\Gamma^k_{ij}(x(t)) = 0.$$

Dokaz

Neka su (x^i) koordinate u okolini U od p. Koristeći (**??**) vidimo da je krivulja

$$c(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$$

geodetska ako i samo ako za svaki k vrijedi

$$\ddot{x}^k(t) + \sum_{i,j} \dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)\Gamma_{ij}^k(x(t)) = 0.$$

Dobili smo sustav običnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda za funkcije $x^i(t)$.

Dokaz

Neka su (x^i) koordinate u okolini U od p. Koristeći (**??**) vidimo da je krivulja

$$c(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$$

geodetska ako i samo ako za svaki k vrijedi

$$\ddot{x}^k(t) + \sum_{i,j} \dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)\Gamma^k_{ij}(x(t)) = 0.$$

Dobili smo sustav običnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda za funkcije $x^i(t)$.

Uvodjenjem varijabli

$$\dot{x}^k(t) = v^k(t),$$
$$\dot{v}^k(t) = -\sum_{i,j} v^i(t)v^j(t)\Gamma^k_{ij}(x(t))$$

dobivamo ekvivalentni sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda.

Dokaz

Neka su (x^i) koordinate u okolini U od p. Koristeći (**??**) vidimo da je krivulja

$$c(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$$

geodetska ako i samo ako za svaki k vrijedi

$$\ddot{x}^k(t) + \sum_{i,j} \dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)\Gamma^k_{ij}(x(t)) = 0.$$

Dobili smo sustav običnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda za funkcije $x^i(t)$.

Uvodjenjem varijabli

$$\dot{x}^k(t) = v^k(t),$$
$$\dot{v}^k(t) = -\sum_{i,j} v^i(t)v^j(t)\Gamma^k_{ij}(x(t))$$

dobivamo ekvivalentni sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda.

Egzistenciju i jedinstvenost rješenja tog sustava garantira teorija.

Maksimalna geodetska krivulja je geodetska krivulja koja se ne može proširiti na veći interval. Naziva se i geodetskom krivuljom s početnom točkom p i početnim vektorom brzine V.

Neka je M mnogostrukost s linearnom koneksijom ∇. Vektorsko polje V duž c je *paralelno* duž c s obzirom na ∇ ako vrijedi

$$D_t V \equiv 0.$$

Neka je M mnogostrukost s linearnom koneksijom ∇. Vektorsko polje V duž c je *paralelno* duž c s obzirom na ∇ ako vrijedi

$$D_t V \equiv 0.$$

Za vektorsko polje na M kažemo da je *paralelno* ako je paralelno duž svake krivulje. To vrijedi ako i samo ako $\nabla V \equiv 0$ (totalna kovarijantna derivacija).

Sljedeća tvrdnja kaže da se svaki tangencijalni vektor u nekoj točki krivulje može jedinstveno proširiti do paralelnog vektorskog polja duž cijele krivulje:

Sljedeća tvrdnja kaže da se svaki tangencijalni vektor u nekoj točki krivulje može jedinstveno proširiti do paralelnog vektorskog polja duž cijele krivulje:

Teorem (Paralelni pomak)

Neka je $c : I \to M$ krivulja, $t_0 \in I$, $V_0 \in T_{c(t_0)}M$. Tada postoji jedinstveno paralelno vektorsko polje V duž c takvo da je $V(t_0) = V_0$.

Sljedeća tvrdnja kaže da se svaki tangencijalni vektor u nekoj točki krivulje može jedinstveno proširiti do paralelnog vektorskog polja duž cijele krivulje:

Teorem (Paralelni pomak)

Neka je $c : I \to M$ krivulja, $t_0 \in I$, $V_0 \in T_{c(t_0)}M$. Tada postoji jedinstveno paralelno vektorsko polje V duž c takvo da je $V(t_0) = V_0$.

Vektorsko polje iz teorema naziva se *paralelni pomak* od V_0 duž c.

Dokaz (Skica).

Ako je $c(I)$ sadržano u jednoj koordinatnoj karti, tada je V paraleno duž c ako i samo ako je

$$\dot{V}^k(t) = -\sum_{i,j} V^j(t)\dot{c}^i(t)\Gamma_{ij}^k(c(t)), \quad k = 1, \ldots n.$$

Dokaz (Skica).

Ako je $c(I)$ sadržano u jednoj koordinatnoj karti, tada je V paraleno duž c ako i samo ako je

$$\dot{V}^k(t) = -\sum_{i,j} V^j(t)\dot{c}^i(t)\Gamma^k_{ij}(c(t)), \quad k = 1, \ldots n.$$

To je sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi za $(V^1(t), \ldots, V^n(t))$.

Dokaz (Skica).

Ako je $c(I)$ sadržano u jednoj koordinatnoj karti, tada je V paraleno duž c ako i samo ako je

$$\dot{V}^k(t) = -\sum_{i,j} V^j(t)\dot{c}^i(t)\Gamma^k_{ij}(c(t)), \quad k = 1, \ldots n.$$

To je sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi za $(V^1(t), \ldots, V^n(t))$.

Teorem egzistencije i jedinstvenosti garantira postojanje rješenja za svaki $t \in I$ za bilo koji početni uvjet $V(t_0) = V_0$. $\square$

Ako je $c : I \to M$ krivulja, $t_o, t_1 \in I$, tada paralelni pomak definira operator

$$P_{t_0 t_1} : T_{c(t_0)}M \to T_{c(t_1)}M$$

$$P_{t_0 t_1} V_0 = V(t_1),$$

gdje je V paralelni pomak od V_0 duž c.

Ako je $c : I \to M$ krivulja, $t_o, t_1 \in I$, tada paralelni pomak definira operator

$$P_{t_0 t_1} : T_{c(t_0)}M \to T_{c(t_1)}M$$

$$P_{t_0 t_1} V_0 = V(t_1),$$

gdje je V paralelni pomak od V_0 duž c.

Za operator $P_{t_0 t_1}$ može se provjeriti da je linearni izomorfizam. Osim toga vrijedi

$$D_t V(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{P_{t_0 t}^{-1} V(t) - V(t_0)}{t - t_0}.$$

Riemannova koneksija

Motivacija. Riemannove podmnogostrukosti – akceleracija geodetske krivulje ima trivijalnu projekciju na tangencijalni potprostor podmnogostrukosti.

Riemannova koneksija

Motivacija. Riemannove podmnogostrukosti – akceleracija geodetske krivulje ima trivijalnu projekciju na tangencijalni potprostor podmnogostrukosti.

Preciznije, neka je $M \subset \mathbf{R}^n$, V vektorsko polje na M kojeg (pomoću particije jedinice) možemo proširiti do vektorskog polja na $\mathbf{R}^n$. Definiramo preslikavanje

$$\nabla^\top : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$$

$$\nabla^\top_X Y = \pi^\top(\bar{\nabla}_X Y),$$

gdje je $\pi^\top$ je ortogonalna projekcija, $\pi^\top : T_p\mathbf{R}^n \to T_pM$.

Propozicija

Operator $\nabla^{\top}$ *je koneksija na* M.

Propozicija

Operator $\nabla^{\top}$ *je koneksija na* M*.*

Linearna koneksija $\nabla^{\top}$ se naziva *tangencijalnom koneksijom* na M.

Propozicija

Operator $\nabla^{\top}$ *je koneksija na* M.

Linearna koneksija $\nabla^{\top}$ se naziva *tangencijalnom koneksijom* na M.

Euklidska koneksija na $\mathbf{R}^n$ (sa Riemannovom metrikom $\langle\, , \rangle$) ima svojstvo

$$\bar{\nabla}_X \langle Y, Z \rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y, Z \rangle + \langle Y, \bar{\nabla}_X Z \rangle.$$

Propozicija

Operator $\nabla^{\top}$ je koneksija na M.

Linearna koneksija $\nabla^{\top}$ se naziva *tangencijalnom koneksijom* na M.

Euklidska koneksija na $\mathbf{R}^n$ (sa Riemannovom metrikom $\langle\,,\,\rangle$) ima svojstvo

$$\bar{\nabla}_X\langle Y, Z\rangle = \langle\bar{\nabla}_X Y, Z\rangle + \langle Y, \bar{\nabla}_X Z\rangle.$$

Isto svojstvo ima i tangencijalna koneksija.

Svojstvo se može poopćiti na Riemannove ili pseudo-Riemannove mnogostrukosti. Neka je g Riemannova (ili pseudo-Riemannova) metrika na M.

Svojstvo se može poopćiti na Riemannove ili pseudo-Riemannove mnogostrukosti. Neka je g Riemannova (ili pseudo-Riemannova) metrika na M.

Za linearnu koneksiju ∇ kažemo da je *uskladjena* (*kompatibilna*) s g ako zadovoljava

$$\nabla_X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle. \tag{1}$$

Propozicija

Sljedeća svojstva linearne koneksije ∇ *na Riemannovoj mnogostrukosti su ekvivalentna:*

Propozicija

Sljedeća svojstva linearne koneksije ∇ na Riemannovoj mnogostrukosti su ekvivalentna:

1. ∇ *je uskladjena s* g,

Propozicija

Sljedeća svojstva linearne koneksije ∇ na Riemannovoj mnogostrukosti su ekvivalentna:

1. ∇ *je uskladjena s* g,
2. $\nabla g \equiv 0$,

Propozicija

Sljedeća svojstva linearne koneksije ∇ na Riemannovoj mnogostrukosti su ekvivalentna:

1. ∇ *je uskladjena s* g,
2. $\nabla g \equiv 0$,
3. *Ako su* V, W *vektorska polja duž krivulje* c, *tada*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle D_t V, W\rangle + \langle V, D_t W\rangle,$$

Propozicija

Sljedeća svojstva linearne koneksije ∇ na Riemannovoj mnogostrukosti su ekvivalentna:

1. ∇ *je uskladjena s* g,
2. $\nabla g \equiv 0$,
3. *Ako su* V, W *vektorska polja duž krivulje* c, *tada*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle D_t V, W\rangle + \langle V, D_t W\rangle,$$

4. *Ako su* V, W *paralelna vektorska polja duž krivulje* c, *tada je* $\langle V, W\rangle$ *konstantno,*

Propozicija

Sljedeća svojstva linearne koneksije ∇ na Riemannovoj mnogostrukosti su ekvivalentna:

1. ∇ *je uskladjena s* g,
2. $\nabla g \equiv 0$,
3. *Ako su* V, W *vektorska polja duž krivulje* c, *tada*
$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle D_t V, W\rangle + \langle V, D_t W\rangle,$$
4. *Ako su* V, W *paralelna vektorska polja duž krivulje* c, *tada je* $\langle V, W\rangle$ *konstantno,*
5. *Paralelni prijenos* $P_{t_0 t_1} : T_{c(t_0)}M \to T_{c(t_1)}M$ *je izometrija za svaki* t_0, t_1.

Za linearnu koneksiju kažemo da je *simetrična* ako njena *torzija*, tj. $(2,1)$-tenzor $\tau : \mathcal{T}M \times \mathcal{T}M \to \mathcal{T}M$

$$\tau(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

iščezava, tj. vrijedi

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y].$$

Teorem (Fundamentalni teorem Riemannove geometrije)

Neka je (M, g) *Riemannova (ili pseudo-Riemannova) mnogostrukost. Tada postoji jedinstvena linearna koneksija* ∇ *na* M *koja je simetrična i uskladjena s* g*.*

Teorem (Fundamentalni teorem Riemannove geometrije)

Neka je (M, g) *Riemannova (ili pseudo-Riemannova) mnogostrukost. Tada postoji jedinstvena linearna koneksija* ∇ *na* M *koja je simetrična i uskladjena s* g*.*

Ta se koneksija naziva *Riemannovom* ili *Levi-Civita* koneksijom od g.

Dokaz

Dokažimo najprije jedinstvenost. Neka je ∇ koneksija sa traženim svojstvima i neka su $X, Y, Z \in \mathcal{T}(M)$ vektorska polja.

Dokaz

Dokažimo najprije jedinstvenost. Neka je ∇ koneksija sa traženim svojstvima i neka su $X, Y, Z \in \mathcal{T}(M)$ vektorska polja.

Tada uvjet uskladjenosti (1) (ciklički) napisan za polja X, Y, Z daje

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

$$Y\langle Z, X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle$$

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle.$$

Dokaz - nastavak

Korištenjem simetričnosti koneksije dobivamo

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_Z X\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle$$

$$Y\langle Z, X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_X Y\rangle + \langle Z, [Y, X]\rangle$$

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Y Z\rangle + \langle X, [Z; Y]\rangle.$$

Dokaz - nastavak

Zbrojimo li prve dvije jednadžbe i oduzmemo treću, dobivamo

$$
\begin{aligned}
X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle = \\
2\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle + \langle Z, [Y, X]\rangle - \langle X, [Z, Y]\rangle.
\end{aligned}
$$

Dokaz - nastavak

Zbrojimo li prve dvije jednadžbe i oduzmemo treću, dobivamo

$$
\begin{aligned}
&X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle = \\
&\qquad 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle + \langle Z, [Y, X]\rangle - \langle X, [Z, Y]\rangle.
\end{aligned}
$$

Odavde slijedi

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}(&X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \\
&\langle Y, [X, Z]\rangle - \langle Z, [Y, X]\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle).
\end{aligned}
$$

Dokaz - nastavak

Zbrojimo li prve dvije jednadžbe i oduzmemo treću, dobivamo

$$
\begin{aligned}
&X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle = \\
&\qquad 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle + \langle Z, [Y, X]\rangle - \langle X, [Z, Y]\rangle.
\end{aligned}
$$

Odavde slijedi

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}(&X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \\
&\langle Y, [X, Z]\rangle - \langle Z, [Y, X]\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle).
\end{aligned}
$$

Prethodna relacija naziva se *Koszulovom formulom.*

Dokaz - nastavak

Pretpostavimo sada da su ∇^1, ∇^2 dvije koneksije koje su simetrične i uskladjene s g.

Dokaz - nastavak

Pretpostavimo sada da su ∇^1, ∇^2 dvije koneksije koje su simetrične i uskladjene s g.

Kako desna strana Koszulove formule ne ovisi o koneksiji, slijedi

$$\langle \nabla^1_X Y - \nabla^2_X Y, Z \rangle = 0,$$

za sve X, Y, Z.

Dokaz - nastavak

Pretpostavimo sada da su ∇^1, ∇^2 dvije koneksije koje su simetrične i uskladjene s g.

Kako desna strana Koszulove formule ne ovisi o koneksiji, slijedi

$$\langle \nabla^1_X Y - \nabla^2_X Y, Z \rangle = 0,$$

za sve X, Y, Z.

To vrijedi ako i samo ako je $\nabla^1_X Y = \nabla^2_X Y$ za sve X, Y, odakle slijedi $\nabla^1 = \nabla^2$.

Dokaz - nastavak

Dokažimo sada egzistenciju. Dovoljno je pokazati da postoji tražena koneksija u koordinatnoj karti, jer će tada po jedinstvenosti slijediti da se koneksije konstruirane za različite karte podudaraju na presjeku karata.

Dokaz - nastavak

Dokažimo sada egzistenciju. Dovoljno je pokazati da postoji tražena koneksija u koordinatnoj karti, jer će tada po jedinstvenosti slijediti da se koneksije konstruirane za različite karte podudaraju na presjeku karata.

Neka je $(U, (x^i))$ koordinatna karta i neka su $(\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i})$ koordinatna vektorska polja lokalnog repera.

Dokaz - nastavak

Dokažimo sada egzistenciju. Dovoljno je pokazati da postoji tražena koneksija u koordinatnoj karti, jer će tada po jedinstvenosti slijediti da se koneksije konstruirane za različite karte podudaraju na presjeku karata.

Neka je $(U, (x^i))$ koordinatna karta i neka su $(\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i})$ koordinatna vektorska polja lokalnog repera.

Kako je njihova Liejeva zagrada jednaka 0, to iz Koszulove formule slijedi

$$\langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_l \rangle = \frac{1}{2} \left(\partial_i \langle \partial_j, \partial_l \rangle + \partial_j \langle \partial_l, \partial_i \rangle - \partial_l \langle \partial_i, \partial_j \rangle \right).$$

Dokaz - nastavak

Imali smo

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle, \quad \nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_m \Gamma_{ij}^m \partial_m.$$

Dokaz - nastavak

Imali smo

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle, \quad \nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_m \Gamma_{ij}^m \partial_m.$$

Korištenjem prethodnih formula, dobivamo

$$\sum_m \Gamma_{ij}^m g_{ml} = \frac{1}{2} \left(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij} \right). \tag{2}$$

Dokaz - nastavak

Imali smo

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle, \quad \nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_m \Gamma_{ij}^m \partial_m.$$

Korištenjem prethodnih formula, dobivamo

$$\sum_m \Gamma_{ij}^m g_{ml} = \frac{1}{2} \left(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij} \right). \tag{2}$$

Množenjem obje strane s inverznom matricom (g^{lk}) matrice (g_{ij}), $\sum_l g_{ml} g^{lk} = \delta_m^k$, slijedi

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l g^{kl} \left(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij} \right).$$

Dokaz - nastavak

Ovom je formulom u karti definirana koneksija (sjetimo se da koneksiju odredjuju Christoffelovi simboli!) i očito vrijedi $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ iz čega slijedi simetričnost koneksije.

Dokaz - nastavak

Ovom je formulom u karti definirana koneksija (sjetimo se da koneksiju odredjuju Christoffelovi simboli!) i očito vrijedi $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ iz čega slijedi simetričnost koneksije.

Još treba provjeriti uskladjenost s metrikom. U tu svrhu provjeravamo $\nabla g = 0$.

Dokaz - nastavak

Komponente od ∇g s obzirom na lokalne koordinate su

$$g_{ij,k} = \partial_k g_{ij} - \sum_l (\Gamma^l_{ki} g_{lj} + \Gamma^l_{kj} g_{il}).$$

Dokaz - nastavak

Komponente od ∇g s obzirom na lokalne koordinate su

$$g_{ij,k} = \partial_k g_{ij} - \sum_l (\Gamma^l_{ki} g_{lj} + \Gamma^l_{kj} g_{il}).$$

Sada koristeći (2) dobivamo

$$\sum_l (\Gamma^l_{ki} g_{lj} + \Gamma^l_{kj} g_{il}) = \frac{1}{2} (\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{kj} - \partial_j g_{ki}) + \frac{1}{2} (\partial_k g_{ji} + \partial_j g_{ki} - \partial_i g_{kj}) = \partial_k g_{ij}.$$

Dokaz - nastavak

Komponente od ∇g s obzirom na lokalne koordinate su

$$g_{ij,k} = \partial_k g_{ij} - \sum_l (\Gamma^l_{ki} g_{lj} + \Gamma^l_{kj} g_{il}).$$

Sada koristeći (2) dobivamo

$$\sum_l (\Gamma^l_{ki} g_{lj} + \Gamma^l_{kj} g_{il}) = \frac{1}{2} (\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{kj} - \partial_j g_{ki}) + \frac{1}{2} (\partial_k g_{ji} + \partial_j g_{ki} - \partial_i g_{kj}) = \partial_k g_{ij}.$$

Slijedi da je $g_{ij,k} = 0$. $\square$

Na Riemannovoj mnogostrukosti standardno uzimamo Riemannovu koneksiju i s obzirom na nju promatramo, primjerice, geodetske krivulje.

Na Riemannovoj mnogostrukosti standardno uzimamo Riemannovu koneksiju i s obzirom na nju promatramo, primjerice, geodetske krivulje.

Propozicija

(Riemannove) geodetske krivulje su krivulje konstantne brzine.

Na Riemannovoj mnogostrukosti standardno uzimamo Riemannovu koneksiju i s obzirom na nju promatramo, primjerice, geodetske krivulje.

Propozicija

(Riemannove) geodetske krivulje su krivulje konstantne brzine.

Dokaz. Neka je c geodetska krivulja. Kako je $\dot{c}$ paralelno duž c, to je $|\dot{c}| = \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle^{1/2}$ konstantno. □

Propozicija

Neka je $\varphi : (M, g) \to (\widetilde{M}, \tilde{g})$ *izometrija. Tada* φ *preslikava:*

Propozicija

Neka je $\varphi : (M, g) \to (\widetilde{M}, \tilde{g})$ *izometrija. Tada* φ *preslikava:*

1. *Riemannovu koneksiju* ∇ *u Riemannovu koneksiju* $\widetilde{\nabla}$*;*

Propozicija

Neka je $\varphi : (M, g) \to (\widetilde{M}, \tilde{g})$ *izometrija. Tada* φ *preslikava:*

1. *Riemannovu koneksiju* ∇ *u Riemannovu koneksiju* $\widetilde{\nabla}$*;*
2. *geodetske krivulje u geodetske.*

Primjer: Geodetske krivulje prostornih formi

1. Euklidski prostor $(\mathbf{R}^n, \bar{g})$. Znamo da su Christoffelovi simboli jednaki 0, Riemannova koneksija je euklidska koneksija. Geodetske krivulje su pravci. Paralelna vektorska polja su polja s konstantnim koeficijentima.

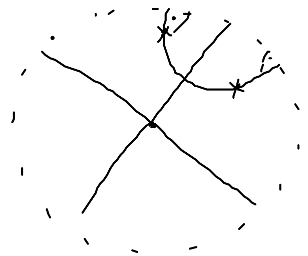
Primjer: Geodetske krivulje prostornih formi

1. Euklidski prostor $(\mathbf{R}^n, \bar{g})$. Znamo da su Christoffelovi simboli jednaki 0, Riemannova koneksija je euklidska koneksija. Geodetske krivulje su pravci. Paralelna vektorska polja su polja s konstantnim koeficijentima.

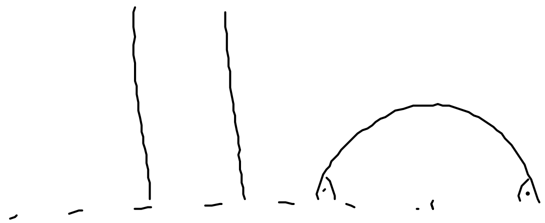
2. Sfera $(S^n_R, \mathring{g})$. Geodetske krivulje su velike (glavne) kružnice (presjeci 2–ravninama kroz ishodište) s parametrizacijom konstantne brzine.

3. Hiperbolički prostor

   (a) (H^n_R, h^1_R). Geodetske krivulje su "velike hiperbole", tj. presjeci H^n_R 2-ravninama kroz ishodište s parametrizacijom konstantne brzine.



3. Hiperbolički prostor
   (a) (H_R^n, h_R^1). Geodetske krivulje su “velike hiperbole”, tj. presjeci H_R^n 2-ravninama kroz ishodište s parametrizacijom konstantne brzine.
   (b) (H_R^n, h_R^2). Geodetske krivulje su dužine kroz ishodište i kružni lukovi unutar kruga koji ortogonalno sijeku rub kruga s parametrizacijom konstantne brzine.



3. Hiperbolički prostor
   (a) (H^n_R, h^1_R). Geodetske krivulje su "velike hiperbole", tj. presjeci H^n_R 2-ravninama kroz ishodište s parametrizacijom konstantne brzine.

   (b) (H^n_R, h^2_R). Geodetske krivulje su dužine kroz ishodište i kružni lukovi unutar kruga koji ortogonalno sijeku rub kruga s parametrizacijom konstantne brzine.

   (c) (H^n_R, h^3_R). Geodetske krivulje su vertikalni polupravci i polukružnice sa središtem u hiperravnini $y = 0$ s parametrizacijom konstantne brzine.

Zakrivljenost

Neka je M Riemannova mnogostrukost. *Riemannov endomorfizam zakrivljenosti* je preslikavanje $R : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$ definiran s

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Zakrivljenost

$Hom(V, W) \cong V^* \otimes W$

Neka je M Riemannova mnogostrukost. *Riemannov endomorfizam zakrivljenosti* je preslikavanje $R : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$ definiran s

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Riemannov endomorfizam zakrivljenosti je jedno $(3, 1)$-tenzorsko polje (pokazati multilinearnost).

Tenzor R možemo zapisati preko lokalnog repera (uz dogovor da će zadnji indeks biti kontravarijantan)

$$R = \sum_{i,j,k,l} R_{ijk}^{l} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \partial_l .$$

Tenzor R možemo zapisati preko lokalnog repera (uz dogovor da će zadnji indeks biti kontravarijantan)

$$R = \sum_{i,j,k,l} R^l_{ijk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \partial_l.$$

Pritom su koeficijenti R^l_{ijk} definirani na sljedeći način

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_l R^l_{ijk} \partial_l.$$

Riemannov tenzor zakrivljenosti Rm je kovarijantni 4-tenzor koji se dobiva od endomorfizma R “*spuštanjem indeksa*”

$$Rm(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W\rangle.$$

Riemannov tenzor zakrivljenosti Rm je kovarijantni 4-tenzor koji se dobiva od endomorfizma R "*spuštanjem indeksa*"

$$Rm(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W\rangle.$$

Zapis Riemannovog tenzora zakrivljenosti pomoću lokalnih koordinata glasi

$$Rm = \sum_{i,j,k,l} R_{ijkl} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l,$$

gdje je

$$R_{ijkl} = \sum_m g_{lm} R_{ijk}^m$$

Može se pokazati da vrijedi

$$R_{ijkl} = \sum_m g_{lm} \left(\frac{\partial \Gamma^m_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^j} + \sum_s (\Gamma^s_{jk} \Gamma^m_{is} - \Gamma^s_{ik} \Gamma^m_{js}) \right) .$$

Može se pokazati da vrijedi

$$R_{ijkl} = \sum_m g_{lm} \left(\frac{\partial \Gamma^m_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^j} + \sum_s (\Gamma^s_{jk}\Gamma^m_{is} - \Gamma^s_{ik}\Gamma^m_{js}) \right).$$

Propozicija

Riemannov endomorfizam zakrivljenosti R i Riemannov tenzor zakrivljenosti Rm su invarijante lokalne izometrije.

Sjetimo se da smo *plosnatu* mnogostrukost definirali kao mnogostrukost koja je lokalno izometrična s euklidskim prostorom.

Sjetimo se da smo *plosnatu* mnogostrukost definirali kao mnogostrukost koja je lokalno izometrična s euklidskim prostorom.

Teorem

Riemannova mnogostrukost je plosnata ako i samo ako njezin tenzor zakrivljenosti iščezava.

Sjetimo se da smo *plosnatu* mnogostrukost definirali kao mnogostrukost koja je lokalno izometrična s euklidskim prostorom.

Teorem

Riemannova mnogostrukost je plosnata ako i samo ako njezin tenzor zakrivljenosti iščezava.

Uvjet za "plosnatost":

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z = \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Ricci-jeva zakrivljenost Rc je kovarijantan 2-tenzor definiran kao trag Riemannovog endomorfizma zakrivljenosti u prvom i zadnjem indeksu.

Ricci-jeva zakrivljenost Rc je kovarijantan 2-tenzor definiran kao trag Riemannovog endomorfizma zakrivljenosti u prvom i zadnjem indeksu.

Komponente od Rc označavaju se sa R_{ij} i za njih vrijedi

$$R_{ij} = \sum_k R_{kij}^k = \sum_{k,m} g^{km} R_{kijm}.$$

Ricci-jeva zakrivljenost Rc je kovarijantan 2-tenzor definiran kao trag Riemannovog endomorfizma zakrivljenosti u prvom i zadnjem indeksu.

Komponente od Rc označavaju se sa R_{ij} i za njih vrijedi

$$R_{ij} = \sum_k R^k_{kij} = \sum_{k,m} g^{km} R_{kijm}.$$

Skalarna zakrivljenost je funkcija S definirana kao trag Riccijeve zakrivljenosti

$$S = \operatorname{tr}_g Rc = \sum_i \cancel{R^i_i} = \sum_{i,j} g^{ij} \cancel{R_{ij}}.$$

R_{ii} R_{iijj} (?)

Riemannove podmnogostrukosti

Neka je $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ Riemannova mnogostrukost dimenzije m, M mnogostrukost dimenzije n, $i : M \hookrightarrow \widetilde{M}$ imerzija.

Riemannove podmnogostrukosti

Neka je $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ Riemannova mnogostrukost dimenzije m, M mnogostrukost dimenzije n, $i : M \hookrightarrow \widetilde{M}$ imerzija.

Ako mnogostrukost M snabdijemo induciranom Riemannovom metrikom $g := i^* \tilde{g}$, tada imerziju i nazivamo *izometričkom imerzijom*.

Riemannove podmnogostrukosti

Neka je $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ Riemannova mnogostrukost dimenzije m, M mnogostrukost dimenzije n, $i : M \hookrightarrow \widetilde{M}$ imerzija.

Ako mnogostrukost M snabdijemo induciranom Riemannovom metrikom $g := i^*\tilde{g}$, tada imerziju i nazivamo *izometričkom imerzijom*.

Ako je uz to preslikavanje i injektivno (ili smještenje), tada M postaje imerzirana (ili smještena) podmnogostrukost od $\widetilde{M}$, tzv. Riemannova podmogostrukost.

Riemannove podmnogostrukosti

Neka je $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ Riemannova mnogostrukost dimenzije m, M mnogostrukost dimenzije n, $i : M \hookrightarrow \widetilde{M}$ imerzija.

Ako mnogostrukost M snabdijemo induciranom Riemannovom metrikom $g := i^*\tilde{g}$, tada imerziju i nazivamo *izometričkom imerzijom*.

Ako je uz to preslikavanje i injektivno (ili smještenje), tada M postaje imerzirana (ili smještena) podmnogostrukost od $\widetilde{M}$, tzv. Riemannova podmogostrukost.

U toj se situaciji $\widetilde{M}$ naziva *ambijentnom mnogostrukosti* od M.

Neka je, dakle, i imerzija. Kako su svi računi lokalne prirode i kako je imerzija lokalno smještenje, možemo pretpostaviti da je M smještena Riemannova podmnogostrukost.

Neka je, dakle, i imerzija. Kako su svi računi lokalne prirode i kako je imerzija lokalno smještenje, možemo pretpostaviti da je M smještena Riemannova podmnogostrukost.

Skup

$$T\widetilde{M}|_M := \coprod_{p \in M} T_p\widetilde{M}$$

je glatki vektorski svežanj nad M s lokalnom trivijalizacijom odredjenom vektorskim poljima $\partial_1, \ldots, \partial_m$ s obzirom na kartu od $\widetilde{M}$.

Neka je, dakle, i imerzija. Kako su svi računi lokalne prirode i kako je imerzija lokalno smještenje, možemo pretpostaviti da je M smještena Riemannova podmnogostrukost.

Skup

$$T\widetilde{M}|_M := \coprod_{p \in M} T_p\widetilde{M}$$

je glatki vektorski svežanj nad M s lokalnom trivijalizacijom odredjenom vektorskim poljima $\partial_1, \ldots, \partial_m$ s obzirom na kartu od $\widetilde{M}$.

Svežanj $T\widetilde{M}|_M$ naziva se *ambijentnim tangencijalnim svežnjem* nad M.

Svako se glatko vektorsko polje na $\widetilde{M}$ može restringirati na glatki prerez od $T\widetilde{M}|_M$ i obratno, svaki se glatki prerez od $T\widetilde{M}|_M$ može proširiti do glatkog vektorskog polja od $\widetilde{M}$ (koristeći particiju jedinice).

Svako se glatko vektorsko polje na $\widetilde{M}$ može restringirati na glatki prerez od $T\widetilde{M}|_M$ i obratno, svaki se glatki prerez od $T\widetilde{M}|_M$ može proširiti do glatkog vektorskog polja od $\widetilde{M}$ (koristeći particiju jedinice).

U svakoj točki $p \in M$ ambijentni tangencijalni prostor $T_p\widetilde{M}$ ima rastav na ortogonalnu direktnu sumu

$$T_p\widetilde{M} = T_pM \oplus N_pM,$$

gdje je $N_pM := (T_pM)^\perp$.

Svako se glatko vektorsko polje na $\widetilde{M}$ može restringirati na glatki prerez od $T\widetilde{M}|_M$ i obratno, svaki se glatki prerez od $T\widetilde{M}|_M$ može proširiti do glatkog vektorskog polja od $\widetilde{M}$ (koristeći particiju jedinice).

U svakoj točki $p \in M$ ambijentni tangencijalni prostor $T_p\widetilde{M}$ ima rastav na ortogonalnu direktnu sumu

$$T_p\widetilde{M} = T_pM \oplus N_pM,$$

gdje je $N_pM := (T_pM)^\perp$.

Svežanj $NM = \coprod_{p \in M} N_pM$ naziva se *normalnim svežnjem* od M.

Druga fundamentalna forma podmnogostrukosti.

Neka su X, Y vektorska polja na $\mathcal{T}(M)$. Možemo ih proširiti do vektorskih polja na $\widetilde{M}$, primijeniti $\widetilde{\nabla}$ i napraviti rastav

$$\widetilde{\nabla}_X Y = (\widetilde{\nabla}_X Y)^\top + (\widetilde{\nabla}_X Y)^\perp.$$

Druga fundamentalna forma podmnogostrukosti.

Neka su X, Y vektorska polja na $\mathcal{T}(M)$. Možemo ih proširiti do vektorskih polja na $\widetilde{M}$, primijeniti $\widetilde{\nabla}$ i napraviti rastav

$$\widetilde{\nabla}_X Y = (\widetilde{\nabla}_X Y)^\top + (\widetilde{\nabla}_X Y)^\perp.$$

Druga fundamentalna forma od M je preslikavanje $II : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{N}(M)$

$$II(X, Y) = (\widetilde{\nabla}_X Y)^\perp,$$

pri čemu su X, Y prošireni do polja na $\widetilde{M}$.

Druga fundamentalna forma podmnogostrukosti.

Neka su X, Y vektorska polja na $\mathcal{T}(M)$. Možemo ih proširiti do vektorskih polja na $\widetilde{M}$, primijeniti $\widetilde{\nabla}$ i napraviti rastav

$$\widetilde{\nabla}_X Y = (\widetilde{\nabla}_X Y)^\top + (\widetilde{\nabla}_X Y)^\perp.$$

Druga fundamentalna forma od M je preslikavanje
$II : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{N}(M)$

$$II(X, Y) = (\widetilde{\nabla}_X Y)^\perp,$$

pri čemu su X, Y prošireni do polja na $\widetilde{M}$.

Kako $\pi^\perp$ preslikava glatke prereze u glatke, to je $II(X, Y)$ glatki prerez od NM.

Propozicija (Svojstva druge fundamentalne forme)

Druga fundamentalna forma je

1. *neovisna o proširenjima* X, Y,

Propozicija (Svojstva druge fundamentalne forme)

Druga fundamentalna forma je

1. *neovisna o proširenjima* X, Y,
2. *bilinearna nad* $C^\infty(M)$,

Propozicija (Svojstva druge fundamentalne forme)

Druga fundamentalna forma je

1. *neovisna o proširenjima* X, Y,
2. *bilinearna nad* $C^{\infty}(M)$,
3. *simetrična u* X, Y.

Teorem (Gaussova formula)

Neka su $X, Y \in \mathcal{T}M$*, prošireni do vektorskih polja na* $\widetilde{M}$*. Tada na* M *vrijedi*

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X, Y).$$

Teorem (Weingartenova jednadžba)

Neka su $X, Y \in \mathcal{T}M$ *i* $N \in \mathcal{N}(M)$. *Ako su* X, Y, N *prošireni na* $\widetilde{M}$, *tada vrijedi*

$$\langle \widetilde{\nabla}_X N, Y \rangle = -\langle N, II(X, Y) \rangle.$$

Teorem (Gaussova jednadžba)

Za $X, Y, Z, W \in T_pM$ *vrijedi sljedeća jednadžba*

$$\widetilde{Rm}(X, Y, Z, W) = Rm(X, Y, Z, W) - \langle II(X, W), II(Y, Z)\rangle + \langle II(X, Z), II(Y, W)\rangle.$$

Hiperplohe u euklidskom prostoru

Neka je M hiperploha u $(\mathbf{R}^{n+1}, \bar{g})$ s induciranom metrikom.

Hiperplohe u euklidskom prostoru

Neka je M hiperploha u $(\mathbf{R}^{n+1}, \bar{g})$ s induciranom metrikom.

U svakoj točki od M postoje točno dvije jedinične normale. Izborom jedne od njih, tj. izborom glatkog prereza od NM, hiperploha M postaje orijentirana.

Hiperplohe u euklidskom prostoru

Neka je M hiperploha u $(\mathbf{R}^{n+1}, \bar{g})$ s induciranom metrikom.

U svakoj točki od M postoje točno dvije jedinične normale. Izborom jedne od njih, tj. izborom glatkog prereza od NM, hiperploha M postaje orijentirana.

Skalarna druga fundamentalna forma je simetričan kovarijantan 2-tenzor h definiran s

$$h(X, Y) = \langle II(X, Y), N \rangle.$$

Operator oblika plohe je tenzorsko polje $s \in \mathcal{T}_1^1(M)$ definirano s

$$\langle X, sY \rangle = h(X, Y), \;\; X, Y \in \mathcal{T}(M).$$

Operator oblika plohe je tenzorsko polje $s \in \mathcal{T}_1^1(M)$ definirano s

$$\langle X, sY \rangle = h(X, Y), \;\; X, Y \in \mathcal{T}(M).$$

Kako je forma h simetrična, to je operator s simetričan

$$\langle sX, Y \rangle = \langle X, sY \rangle.$$

Specijalizacijom Teorema 1.5, 1.6, 1.7 dobivamo:

- **Gaussova formula**

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)N,$$

Specijalizacijom Teorema 1.5, 1.6, 1.7 dobivamo:

- **Gaussova formula**

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)N,$$

- **Weingartenova jednadžba**

$$\langle \bar{\nabla}_X N, Y \rangle = -h(X, Y) = -\langle sX, Y \rangle,$$

ili

$$\bar{\nabla}_X N = -sX,$$

Specijalizacijom Teorema 1.5, 1.6, 1.7 dobivamo:

- **Gaussova formula**

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)N,$$

- **Weingartenova jednadžba**

$$\langle \bar{\nabla}_X N, Y \rangle = -h(X, Y) = -\langle sX, Y \rangle,$$

ili

$$\bar{\nabla}_X N = -sX,$$

- **Gaussova jednadžba**

$$Rm(X, Y, Z, W) = h(X, W)h(Y, Z) - h(X, Z)h(Y, W).$$

Glavne zakrivljenosti su svojstvene vrijednosti operatora oblika plohe.

Glavne zakrivljenosti su svojstvene vrijednosti operatora oblika plohe.

Gaussova zakrivljenost definirana je sa

$$K = \det s,$$

a *srednja zakrivljenost* sa

$$H = \frac{1}{n} \mathrm{tr}\, s.$$

Teorem (Gaussov Theorema Egregium)

Neka je $M \subset \mathbf{R}^3$ 2-dimenzionalna podmnogostrukost i g inducirana metrika na M.

Teorem (Gaussov Theorema Egregium)

Neka je $M \subset \mathbf{R}^3$ *2-dimenzionalna podmnogostrukost i* g *inducirana metrika na* M.

Tada je za svaku točku $p \in M$ *i svaku bazu* (X, Y) *od* T_pM*, Gaussova zakrivljenost dana s*

$$K = \frac{Rm(X, Y, Y, X)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2}. \tag{3}$$

Teorem (Gaussov Theorema Egregium)

Neka je $M \subset \mathbf{R}^3$ 2-dimenzionalna podmnogostrukost i g inducirana metrika na M.

Tada je za svaku točku $p \in M$ i svaku bazu (X, Y) od T_pM, Gaussova zakrivljenost dana s

$$K = \frac{Rm(X, Y, Y, X)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2}. \tag{3}$$

Prema tome, Gaussova zakrivljenost je izometrička invarijanta od (M, g).

Motivirani time, za apstraktne Riemannove 2-mnogostrukosti (M, g) definiramo Gaussovu zakrivljenost formulom (3), gdje je (X, Y) bilo koji lokalni reper.

Propozicija

Gaussova zakrivljenost Riemannove 2-mnogostrukosti povezana je s tenzorom zakrivljenosti, Riccijevim tenzorom i skalarnom zakrivljenošću sljedećim formulama

$$R\overset{m}{\cancel{M}}(X, Y, Z, W) = K\left(\langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle - \langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle\right),$$

$$Rc(X, Y) = K\langle X, Y\rangle,$$

$$S = 2K.$$

Propozicija

Gaussova zakrivljenost Riemannove 2-mnogostrukosti povezana je s tenzorom zakrivljenosti, Riccijevim tenzorom i skalarnom zakrivljenošću sljedećim formulama

$$RM(X, Y, Z, W) = K\left(\langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle - \langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle\right),$$

$$Rc(X, Y) = K\langle X, Y\rangle,$$

$$S = 2K.$$

Gaussova zakrivljenost K ne ovisi o izboru lokalnog repera i u potpunosti odredjuje tenzor zakrivljenosti.

Sekcijska zakrivljenost.

Neka je M Riemannova n-dimenzionalna mnogostrukost. Intuitivno, *ravninski presjek* S_Π od M je 2-dimenzionalna podmnogostrukost od M koju čine geodetske krivulje od M kroz neku točku $p \in M$ kojima početni tangencijalni vektori leže u odabranoj 2-dimenzionalnoj ravnini Π u T_pM.

Sekcijska zakrivljenost.

Neka je M Riemannova n-dimenzionalna mnogostrukost. Intuitivno, *ravninski presjek* S_Π od M je 2-dimenzionalna podmnogostrukost od M koju čine geodetske krivulje od M kroz neku točku $p \in M$ kojima početni tangencijalni vektori leže u odabranoj 2-dimenzionalnoj ravnini Π u T_pM.

Sekcijska zakrivljenost $K(\Pi)$ od M s obzirom na Π je Gaussova zakrivljenost 2-mnogostrukosti S_Π s obzirom na induciranu metriku.

Sekcijska zakrivljenost.

Neka je M Riemannova n-dimenzionalna mnogostrukost. Intuitivno, *ravninski presjek* S_Π od M je 2-dimenzionalna podmnogostrukost od M koju čine geodetske krivulje od M kroz neku točku $p \in M$ kojima početni tangencijalni vektori leže u odabranoj 2-dimenzionalnoj ravnini Π u T_pM.

Sekcijska zakrivljenost $K(\Pi)$ od M s obzirom na Π je Gaussova zakrivljenost 2-mnogostrukosti S_Π s obzirom na induciranu metriku.

Ako je (X, Y) baza za Π, tada pišemo i $K(X, Y)$ umjesto $K(\Pi)$.

Sekcijska zakrivljenost.

Neka je M Riemannova n-dimenzionalna mnogostrukost. Intuitivno, *ravninski presjek* S_Π od M je 2-dimenzionalna podmnogostrukost od M koju čine geodetske krivulje od M kroz neku točku $p \in M$ kojima početni tangencijalni vektori leže u odabranoj 2-dimenzionalnoj ravnini Π u T_pM.

Sekcijska zakrivljenost $K(\Pi)$ od M s obzirom na Π je Gaussova zakrivljenost 2-mnogostrukosti S_Π s obzirom na induciranu metriku.

Ako je (X, Y) baza za Π, tada pišemo i $K(X, Y)$ umjesto $K(\Pi)$.

Propozicija

Vrijedi

$$K(X, Y) = \frac{Rm(X, Y, Y, X)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2}.$$

Sekcijska zakrivljenost u potpunosti odredjuje tenzor zakrivljenosti:

Sekcijska zakrivljenost u potpunosti odredjuje tenzor zakrivljenosti:

Lema

Neka su $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ dva kovarijantna 4-tenzora na unitarnom prostoru V koji imaju svojstva (simetrije) kao tenzor zakrivljenosti.

Sekcijska zakrivljenost u potpunosti odredjuje tenzor zakrivljenosti:

Lema

Neka su $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ dva kovarijantna 4-tenzora na unitarnom prostoru V koji imaju svojstva (simetrije) kao tenzor zakrivljenosti.

Ako za bilo koja dva nezavisna vektora $X, Y \in V$ vrijedi

$$\frac{\mathcal{R}_1(X,Y,Y,X)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2} = \frac{\mathcal{R}_2(X,Y,Y,X)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2},$$

tada je $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$.

Slično se može pokazati da je Riccijev tenzor $Rc(V, V)$ jednak zbroju svih sekcijskih zakrivljenosti odredjenim ravninama razapetim s V i još jednim vektorom tangencijalne ravnine s kojim čini ONB:

Slično se može pokazati da je Riccijev tenzor $Rc(V, V)$ jednak zbroju svih sekcijskih zakrivljenosti odredjenim ravninama razapetim s V i još jednim vektorom tangencijalne ravnine s kojim čini ONB:

$$Rc(V, V) = R_{11} = \sum_k R^k_{k11} = \sum_{k=1}^{n} Rm(E_k, E_1, E_1, E_k) = \sum_{k=2}^{n} K(E_1, E_k).$$

Skalarna zakrivljenost jednaka je zbroju svih sekcijskih zakrivljenosti odredjenim s ravninama koje su razapete s ONB:

$$S = \sum_j R_j^j = \sum_j Rc(E_j, E_j) =$$

$$\sum_{j,k=1}^{n} Rm(E_k, E_j, E_j, E_k) = \sum_{j \neq k} K(E_j, E_k).$$

Primjer.

Sekcijska zakrivljenost prostornih formi:

1. Od $\mathbf{R}^n$ jednaka je 0;
2. Od S^n_R jednaka je $\frac{1}{R^2}$;
3. Od H^n_R jednaka je $-\frac{1}{R^2}$.