GLATKE I RIEMANNOVE MNOGOSTRUKOSTI

Željka Milin-Šipuš, Pavle Pandžić i Juraj Šiftar

Drugi dio standardnog poslijediplomskog kolegija **Geometrija i topologija**. Izvodi se u ljetnom semestru (30 sati predavanja).

Riemannova metrika

Neka je M glatka mnogostrukost dimenzije n. *Riemannova metrika* na M je (glatko) kovarijantno 2-tenzorsko polje $g \in \mathcal{T}^2(M)$ koje je

1. simetrično tj. $g(X, Y) = g(Y, X)$,
2. pozitivno definitno tj. $g(X, X) > 0$, za $X \neq 0$.

(X i Y su tangencijalni vektori na M u nekoj točki p.)

Dakle, Riemannovom metrikom je na svakom tangencijalnom prostoru T_pM odredjen skalarni produkt.

Dakle, Riemannovom metrikom je na svakom tangencijalnom prostoru T_pM odredjen skalarni produkt.

Mnogostrukost sa Riemannovom metrikom, (M, g), naziva se *Riemannova mnogostrukost*.

Dakle, Riemannovom metrikom je na svakom tangencijalnom prostoru T_pM odredjen skalarni produkt.

Mnogostrukost sa Riemannovom metrikom, (M, g), naziva se *Riemannova mnogostrukost*.

Često pišemo

$$g_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle_g,$$

za $X, Y \in T_pM$.

Neka su (x^i) glatke lokalne koordinate na M. Tada Riemannovu metriku možemo zapisati kao

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j,$$

gdje je (g_{ij}) simetrična, pozitivno definitna matrica glatkih funkcija, $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$.

Primjer.

Euklidska metrika $\bar{g}$ na $\mathbf{R}^n$ u standardnim koordinatama definirana je kao

$$\bar{g} = \sum_{i,j} \delta_{ij} dx^i dx^j = (dx^1)^2 + \cdots (dx^n)^2$$

Primjer.

Euklidska metrika $\bar{g}$ na $\mathbf{R}^n$ u standardnim koordinatama definirana je kao

$$\bar{g} = \sum_{i,j} \delta_{ij} dx^i dx^j = (dx^1)^2 + \cdots (dx^n)^2$$

Matrica $(\bar{g}_{ij})$ je identiteta. Primijenimo li $\bar{g}$ na vektore $v, w \in T_p\mathbf{R}^n$ dobivamo

$$\bar{g}_p(v, w) = v \cdot w.$$

Propozicija

Na svakoj se glatkoj mnogostrukosti može definirati Riemannova metrika.

Uvodjenjem Riemannove metrike, u mogućnosti smo odredjivati duljinu (normu) tangencijalnog vektora i kut izmedju dva tangencijalna vektora.

Uvodjenjem Riemannove metrike, u mogućnosti smo odredjivati duljinu (normu) tangencijalnog vektora i kut izmedju dva tangencijalna vektora.

Neka je $X \in T_pM$, tada je duljina (norma) od X

$$|X|_g = g(X, X)^{1/2} = \langle X, X \rangle_g^{1/2}.$$

Uvodjenjem Riemannove metrike, u mogućnosti smo odredjivati duljinu (normu) tangencijalnog vektora i kut izmedju dva tangencijalna vektora.

Neka je $X \in T_pM$, tada je duljina (norma) od X

$$|X|_g = g(X, X)^{1/2} = \langle X, X \rangle_g^{1/2}.$$

Neka su $X, Y \in T_pM$, tada je mjera kuta izmedju njih jedinstveni $\theta \in [0, \pi]$ takav da je

$$\cos\theta = \frac{\langle X, Y \rangle_g}{|X|_g |Y|_g}.$$

Uvodjenjem Riemannove metrike, u mogućnosti smo odredjivati duljinu (normu) tangencijalnog vektora i kut izmedju dva tangencijalna vektora.

Neka je $X \in T_pM$, tada je duljina (norma) od X

$$|X|_g = g(X, X)^{1/2} = \langle X, X\rangle_g^{1/2}.$$

Neka su $X, Y \in T_pM$, tada je mjera kuta izmedju njih jedinstveni $\theta \in [0, \pi]$ takav da je

$$\cos\theta = \frac{\langle X, Y\rangle_g}{|X|_g |Y|_g}.$$

Za dva vektora $X, Y \in T_pM$ kažemo da su *ortogonalni* ako je $\langle X, Y\rangle_g = 0$.

Primjer – Riemannova podmnogostrukost

Neka je (M, g) Riemannova mnogostrukost, $S \subset M$ imerzirana podmnogostrukost. Definiramo glatko, simetrično 2-kovarijantno tenzorsko polje $g|_S$ na S kao $g|_S = i^* g$, gdje je $i : S \hookrightarrow M$ inkluzija.

Primjer – Riemannova podmnogostrukost

Neka je (M, g) Riemannova mnogostrukost, $S \subset M$ imerzirana podmnogostrukost. Definiramo glatko, simetrično 2-kovarijantno tenzorsko polje $g|_S$ na S kao $g|_S = i^*g$, gdje je $i : S \hookrightarrow M$ inkluzija.

Ekvivalentno, $g|_S$ je restrikcija od g na tangencijalne vektore od S.

Primjer – Riemannova podmnogostrukost

Neka je (M, g) Riemannova mnogostrukost, $S \subset M$ imerzirana podmnogostrukost. Definiramo glatko, simetrično 2-kovarijantno tenzorsko polje $g|_S$ na S kao $g|_S = i^*g$, gdje je $i : S \hookrightarrow M$ inkluzija.

Ekvivalentno, $g|_S$ je restrikcija od g na tangencijalne vektore od S.

Kako je restrikcija skalarnog produkta na vektore iz T_pS opet pozitivno definitna, to $g|_S$ definira Riemannovu metriku na S – nazivamo ju *induciranom metrikom*. S tom metrikom, podmnogostrukost S nazivamo *Riemannovom podmnogostrukošću*.

Neka je (M, g) Riemannova mnogostrukost, $S \subset M$ Riemannova podmnogostrukost.

Neka je (M, g) Riemannova mnogostrukost, $S \subset M$ Riemannova podmnogostrukost.

Za vektor $N \in T_pM$ kažemo da je *normalan na* S ako je N ortogonalan na T_pS s obzirom na g.

Neka je (M, g) Riemannova mnogostrukost, $S \subset M$ Riemannova podmnogostrukost.

Za vektor $N \in T_pM$ kažemo da je *normalan na* S ako je N ortogonalan na T_pS s obzirom na g.

Skup $N_pS \subset T_pM$ svih normalnih vektora na S u p je potprostor od T_pM. Naziva se *normalnim prostorom* od S u p.

Neka je (M, g) Riemannova mnogostrukost, $S \subset M$ Riemannova podmnogostrukost.

Za vektor $N \in T_pM$ kažemo da je *normalan na S* ako je N ortogonalan na T_pS s obzirom na g.

Skup $N_pS \subset T_pM$ svih normalnih vektora na S u p je potprostor od T_pM. Naziva se *normalnim prostorom* od S u p.

Normalni svežanj definiramo kao

$$NS = \coprod_{p \in S} N_pS.$$

Primjer – Sfera S^n

Inducirana metriku metrike $\bar{g}$ na sferi $S^n \hookrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$, označavamo $\overset{\circ}{g}$,

$$\overset{\circ}{g} = \bar{g}|_{S^n}$$

i nazivamo *okruglom metrikom*.

Primjer – Riemannova metrika podmnogostrukosti preko parametrizacije

Neka je $U \subset \mathbf{R}^n$ otvoren skup i $M \subset \mathbf{R}^{n+1}$ graf glatke funkcije $f : U \to \mathbf{R}$.

Primjer – Riemannova metrika podmnogostrukosti preko parametrizacije

Neka je $U \subset \mathbf{R}^n$ otvoren skup i $M \subset \mathbf{R}^{n+1}$ graf glatke funkcije $f : U \to \mathbf{R}$.

Tada je preslikavanje

$$X : U \to \mathbf{R}^{n+1}, \;\; X(u^1, \dots, u^n) = (u^1, \dots, u^n, f(u))$$

glatka globalna parametrizacija od M.

Primjer – Riemannova metrika podmnogostrukosti preko parametrizacije

Neka je $U \subset \mathbf{R}^n$ otvoren skup i $M \subset \mathbf{R}^{n+1}$ graf glatke funkcije $f : U \to \mathbf{R}$.

Tada je preslikavanje

$$X : U \to \mathbf{R}^{n+1}, \;\; X(u^1, \dots, u^n) = (u^1, \dots, u^n, f(u))$$

glatka globalna parametrizacija od M.

Odredimo induciranu metriku od M (kao podmnogostrukosti u $\mathbf{R}^{n+1}$) u tim koordinatama

$$X^*\bar{g} = X^*((dx^1)^2 + \cdots (dx^{n+1})^2) = (du^1)^2 + \cdots (du^n)^2 + df^2.$$

Specijalno, metrika gornje polusfere S^2 parametrizirane s

$$X : \mathbf{B}^2 \to \mathbf{R}^3, \;\; X(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$$

dana je s

$$\mathring{g} = X^* \bar{g} = du^2 + dv^2 + \left(\frac{udu + vdv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right)^2.$$

Sferu S^2_R radijusa R možemo parametrizirati i na sljedeći način:

$$X : U \to \mathbf{R}^3, \quad U = \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle -\pi/2, \pi/2\rangle$$

$$X(\varphi, \theta) = R(\cos\varphi\cos\theta, \sin\varphi\cos\theta, \sin\theta).$$

Sferu S_R^2 radijusa R možemo parametrizirati i na sljedeći način:

$$X : U \to \mathbf{R}^3, \quad U = \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$$

$$X(\varphi, \theta) = R(\cos\varphi\cos\theta, \sin\varphi\cos\theta, \sin\theta).$$

Tada je

$$\begin{aligned} \mathring{g} &= d(R\cos\varphi\cos\theta)^2 + d(R\sin\varphi\cos\theta)^2 + d(R\sin\theta)^2 \\ &= R^2\cos^2\theta(d\varphi)^2 + R^2(d\theta)^2. \end{aligned}$$

Primjer – Prva fundamentalna forma za plohe u $\mathbf{R}^3$.

Neka je $X : U \to S$ lokalna parametrizacija plohe S, $X = X(u, v)$.
Tada su X_u, X_v tangencijalni vektori plohe.

Primjer – Prva fundamentalna forma za plohe u $\mathbf{R}^3$.

Neka je $X : U \to S$ lokalna parametrizacija plohe S, $X = X(u, v)$.
Tada su X_u, X_v tangencijalni vektori plohe.

Uvodimo

$$E = X_u \cdot X_u, \quad F = X_u \cdot X_v, \quad G = X_v \cdot X_v.$$

Primjer – Prva fundamentalna forma za plohe u $\mathbf{R}^3$.

Neka je $X : U \to S$ lokalna parametrizacija plohe S, $X = X(u, v)$.
Tada su X_u, X_v tangencijalni vektori plohe.

Uvodimo

$$E = X_u \cdot X_u, \;\; F = X_u \cdot X_v, \;\; G = X_v \cdot X_v.$$

Pišemo

$$g = (ds)^2 = E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2$$

ili

$$g = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Primjer – Produktna metrika

Neka su (M_1, g_1), (M_2, g_2) dvije Riemannove mnogostrukosti.

Primjer – Produktna metrika

Neka su (M_1, g_1), (M_2, g_2) dvije Riemannove mnogostrukosti.

Uz identifikaciju $T_{(p_1,p_2)}(M_1 \times M_2) = T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2$, produktna metrika je

$$g = g_1 \oplus g_2.$$

Primjer – Produktna metrika

Neka su (M_1, g_1), (M_2, g_2) dvije Riemannove mnogostrukosti.

Uz identifikaciju $T_{(p_1,p_2)}(M_1 \times M_2) = T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2$, produktna metrika je

$$g = g_1 \oplus g_2.$$

Specijalno, za torus $T^2 = S^1 \times S^1$ produktna metrika glasi

$$g = (d\varphi)^2 + (d\theta)^2,$$

što je euklidska metrika u koordinatama (φ, θ).

Primjer – Produktna metrika

Neka su (M_1, g_1), (M_2, g_2) dvije Riemannove mnogostrukosti.

Uz identifikaciju $T_{(p_1,p_2)}(M_1 \times M_2) = T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2$, produktna metrika je

$$g = g_1 \oplus g_2.$$

Specijalno, za torus $T^2 = S^1 \times S^1$ produktna metrika glasi

$$g = (d\varphi)^2 + (d\theta)^2,$$

što je euklidska metrika u koordinatama (φ, θ).

Pritom je metrika na $S^1 \subset \mathbf{R}^2$ inducirana metrika $g = d\varphi^2$.

Pseudo-Riemannova metrika

Kovarijantni 2-tenzor g na n-dimenzionalnom vektorskom prostoru V nazivamo *nedegeneriranim* ako je $g(X, Y) = 0$ za svaki $Y \in V$ ako i samo ako je $X = 0$.

Pseudo-Riemannova metrika

Kovarijantni 2-tenzor g na n-dimenzionalnom vektorskom prostoru V nazivamo *nedegeneriranim* ako je $g(X, Y) = 0$ za svaki $Y \in V$ ako i samo ako je $X = 0$.

Odgovarajućim izborom baze za V, nedegenerirani simetrični 2-tenzor ima za matrični prikaz dijagonalnu matricu kojoj su elementi dijagonale $-1, 1$.

Pseudo-Riemannova metrika

Kovarijantni 2-tenzor g na n-dimenzionalnom vektorskom prostoru V nazivamo *nedegeneriranim* ako je $g(X, Y) = 0$ za svaki $Y \in V$ ako i samo ako je $X = 0$.

Odgovarajućim izborom baze za V, nedegenerirani simetrični 2-tenzor ima za matrični prikaz dijagonalnu matricu kojoj su elementi dijagonale $-1, 1$.

Broj pozitivnih i negativnih elemenata dijagonale ne ovisi o izboru baze (*Sylvesterov teorem o inerciji*).

kovarijantno

Pseudo-Riemannova metrika na M je glatko simetrično 2-tenzorsko polje g koje je nedegenerirano u svakoj točki.

Pseudo-Riemannova metrika na M je glatko simetrično 2-tenzorsko polje g koje je nedegenerirano u svakoj točki.

Primjer: Na $\mathbf{R}^{n+1}$ jedan pseudo-skalarni produkt je

$$m = (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 - (x^{n+1})^2.$$

(Lorentzova metrika)

Izometrije

Neka su (M, g) i $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Riemannove mnogostrukosti. Glatko preslikavanje $F : M \to \tilde{M}$ naziva se *izometrijom* ako je difeomorfizam za koji vrijedi

$$F^* \tilde{g} = g.$$

Izometrije

Neka su (M, g) i $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Riemannove mnogostrukosti. Glatko preslikavanje $F : M \to N$ naziva se *izometrijom* ako je difeomorfizam za koji vrijedi

$$F^*\tilde{g} = g.$$

Općenitije, F nazivamo *lokalnom izometrijom*, ako svaka točka $p \in M$ ima okolinu takvu da je $F|_U$ izometrija sa U na otvoren podskup od $\tilde{M}$.

Riemannovu metriku nazivamo *plosnatom*, ako svaka točka $p \in M$ ima okolinu $U \subset M$ takvu da je $(U, g|_U)$ izometrično sa otvorenim podskupom od $\mathbf{R}^n$ s euklidskom metrikom.

Riemannovu metriku nazivamo *plosnatom*, ako svaka točka $p \in M$ ima okolinu $U \subset M$ takvu da je $(U, g|_U)$ izometrično sa otvorenim podskupom od $\mathbf{R}^n$ s euklidskom metrikom.

Skup svih izometrija od M čini grupu koju nazivamo *grupom izometrija* od M.

Riemannova mnogostrukost kao metrički prostor

Neka je $c : I \to M$ po dijelovima glatka regularna krivulja.

Riemannova mnogostrukost kao metrički prostor

Neka je $c : I \to M$ po dijelovima glatka regularna krivulja.

Duljinu luka krivulje c definiramo kao

$$L(c) = \int_I ||\dot{c}(t)||dt.$$

Riemannova mnogostrukost kao metrički prostor

Neka je $c : I \to M$ po dijelovima glatka regularna krivulja.

Duljinu luka krivulje c definiramo kao

$$L(c) = \int_I ||\dot{c}(t)||dt.$$

Definiramo Riemannovu udaljenost $d(p, q)$ na M kao infimum duljina svih dopustivih krivulja od p do q.

Riemannova mnogostrukost kao metrički prostor

Neka je $c : I \to M$ po dijelovima glatka regularna krivulja.

Duljinu luka krivulje c definiramo kao

$$L(c) = \int_I ||\dot{c}(t)||dt.$$

Definiramo Riemannovu udaljenost $d(p, q)$ na M kao infimum duljina svih dopustivih krivulja od p do q.

Na povezanoj Riemannovoj mnogostrukosti, d predstavlja metriku i vrijedi da je topologija inducirana tom metrikom jednaka topologiji mnogostrukosti M.

Volumna forma

Propozicija

Na orijentiranoj Riemannovoj n-mnogostrukosti (M, g) *postoji jedinstvena n-forma dV - Riemannova volumna forma - koja zadovoljava*

$$dV(E_1, \ldots, E_n) = 1$$

gdje je $(E_1, \ldots, E_n)$ *orijentirana ortonormirana baza tangencijalnog prostora* T_pM.

Volumna forma

Propozicija

Na orijentiranoj Riemannovoj n-mnogostrukosti (M, g) postoji jedinstvena n-forma dV - Riemannova volumna forma - koja zadovoljava

$$dV(E_1, \dots, E_n) = 1$$

gdje je $(E_1, \dots, E_n)$ orijentirana ortonormirana baza tangencijalnog prostora T_pM.

Može se pokazati da je u koordinatama dana s

$$dV = \sqrt{\det(g_{ij})}\varphi^1 \wedge \dots \wedge \varphi^n,$$

gdje je $g_{ij} = g(E_i, E_j)$, $\{\varphi^i\}$ dualna baza za $(E_1, \dots, E_n)$.

Sfera

Sfera S^n_R je Riemannova mnogostrukost s okruglom metrikom $\mathring{g}_R$ radijusa R.

Sfera

Sfera S^n_R je Riemannova mnogostrukost s okruglom metrikom $\overset{\circ}{g}_R$ radijusa R.

Ortogonalna grupa $O(n+1, \mathbf{R})$ čuva sferu i euklidsku metriku, stoga restrikcija na S^n_R djeluje izometrijama.

Propozicija

Ako su dane dvije točke $p, q \in S^n_R$ *i ortonormirane baze* $\{E_i\}$ *za* $T_pS^n_R$, $\{\tilde{E}_i\}$ *za* $T_qS^n_R$, *tada postoji* $\varphi \in O(n+1, \mathbf{R})$ *takav da je*

$$\varphi(p) = q, \qquad \varphi_* E_i = \tilde{E}_i.$$

Propozicija

Ako su dane dvije točke $p, q \in S^n_R$ *i ortonormirane baze* $\{E_i\}$ *za* $T_pS^n_R$, $\{\tilde{E}_i\}$ *za* $T_qS^n_R$, *tada postoji* $\varphi \in O(n+1, \mathbf{R})$ *takav da je*

$$\varphi(p) = q, \qquad \varphi_* E_i = \tilde{E}_i.$$

Kažemo da $O(n+1)$ djeluje *tranzitivno* na ortonormirane baze na S^n_R.

Napomena.

Djelovanje grupe G na mnogostrukost je preslikavanje sa $G \times M$ u M, $(g, p) \mapsto g \cdot p$, koje zadovoljava

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot p) = (g_1 g_2) \cdot p, \quad g_1, g_2 \in G, \quad p \in M,$$

$$e \cdot p = p, \quad p \in M.$$

Napomena.

Djelovanje grupe G na mnogostrukost je preslikavanje sa $G \times M$ u M, $(g, p) \mapsto g \cdot p$, koje zadovoljava

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot p) = (g_1 g_2) \cdot p, \quad g_1, g_2 \in G, \quad p \in M,$$

$$e \cdot p = p, \quad p \in M.$$

Djelovanje je *tranzitivno* ako za svake dvije točke $p, q \in M$ postoji $g \in G$ takav da je $g \cdot p = q$.

Riemannovu mnogostrukost nazivamo *homogenom* ako dopušta djelovanje Liejeve grupe (izometrijama) koje je glatko i tranzitivno.

Riemannovu mnogostrukost nazivamo *homogenom* ako dopušta djelovanje Liejeve grupe (izometrijama) koje je glatko i tranzitivno.

Riemannovu mnogostrukost nazivamo *izotropnom* ako podgrupa izotropije $G_p = \{g \in G : g \cdot p = p\}$ djeluje tranzitivno na skup jediničnih vektora u T_pM (gdje $g \in G_p$ djeluje na T_pM kao g_*).

Riemannovu mnogostrukost nazivamo *homogenom* ako dopušta djelovanje Liejeve grupe (izometrijama) koje je glatko i tranzitivno.

Riemannovu mnogostrukost nazivamo *izotropnom* ako podgrupa izotropije $G_p = \{g \in G : g \cdot p = p\}$ djeluje tranzitivno na skup jediničnih vektora u T_pM (gdje $g \in G_p$ djeluje na T_pM kao g_*).

Prethodnom propozicijom je dokazano da je sfera S_R^n homogena i izotropna Riemannova mnogostrukost.

Za metrike g_1, g_2 na mnogostrukosti M kažemo da su *konformne* ako postoji pozitivna funkcija $f \in C^\infty(M)$ tako da vrijedi

$$g_2 = fg_1.$$

Za metrike g_1, g_2 na mnogostrukosti M kažemo da su *konformne* ako postoji pozitivna funkcija $f \in C^\infty(M)$ tako da vrijedi

$$g_2 = fg_1.$$

Dvije Riemannove mnogostrukosti (M, g), $(\tilde{M}, \tilde{g})$ su *konformno ekvivalentne* ako postoji difeomorfizam $\varphi : M \to \tilde{M}$ tako da je $\varphi_* \tilde{g}$ konformno sa g.

Za metrike g_1, g_2 na mnogostrukosti M kažemo da su *konformne* ako postoji pozitivna funkcija $f \in C^\infty(M)$ tako da vrijedi

$$g_2 = fg_1 .$$

Dvije Riemannove mnogostrukosti (M, g), $(\tilde{M}, \tilde{g})$ su *konformno ekvivalentne* ako postoji difeomorfizam $\varphi : M \to \tilde{M}$ tako da je $\varphi_* \tilde{g}$ konformno sa g.

Vrijedi da su dvije metrike konformne ako i samo ako definiraju jednake kutove (ne nužno i jednake duljine).

Pokažimo da postoji konformna ekvivalencija izmedju $\mathbf{R}^n$ i sfere S^n_R bez jedne točke.

Pokažimo da postoji konformna ekvivalencija izmedju $\mathbf{R}^n$ i sfere S^n_R bez jedne točke.

Ostvaruje se stereografskom projekcijom (iz sjevernog pola N)

$$\sigma : S^n_R \setminus \{N\} \to \mathbf{R}^n,$$

gdje je $\sigma(P)$ točka prostora $\mathbf{R}^n$ (hiperravnine u $\mathbf{R}^{n+1}$) u kojoj pravac NP presijeca hiperravninu $\mathbf{R}^n$.

Pokažimo da postoji konformna ekvivalencija izmedju $\mathbf{R}^n$ i sfere S_R^n bez jedne točke.

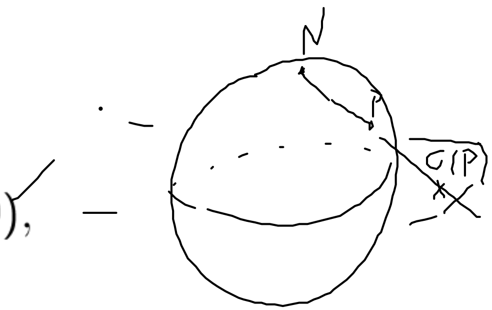
Ostvaruje se stereografskom projekcijom (iz sjevernog pola N)

$$\sigma : S_R^n \setminus \{N\} \to \mathbf{R}^n,$$

gdje je $\sigma(P)$ točka prostora $\mathbf{R}^n$ (hiperravnine u $\mathbf{R}^{n+1}$) u kojoj pravac NP presijeca hiperravninu $\mathbf{R}^n$.

Ako je $P = (\xi^1, \ldots, \xi^n, \tau) = (\xi, \tau)$, tada je

$$\sigma(P) = U = (u^1, \ldots, u^n, 0) = (u, 0),$$



a hiperravnina $\mathbf{R}^n$ je zadana s $\tau = 0$ u $\mathbf{R}^{n+1}$.

Prema tome, U je odredjena sa $\overrightarrow{NU} = \lambda\overrightarrow{NP}$, za neki λ.

Prema tome, U je odredjena sa $\overrightarrow{NU} = \lambda \overrightarrow{NP}$, za neki λ.

Dobivamo

$$u^i = \lambda \xi^i,$$

$$-R = \lambda(\tau - R).$$

Prema tome, U je odredjena sa $\overrightarrow{NU} = \lambda \overrightarrow{NP}$, za neki λ.

Dobivamo

$$u^i = \lambda \xi^i,$$

$$-R = \lambda(\tau - R).$$

Eliminacijom λ iz druge jednadžbe, dobivamo

$$\sigma(\xi, \tau) = u = \frac{R\xi}{R - \tau}.$$

Prema tome, U je odredjena sa $\overrightarrow{NU} = \lambda\overrightarrow{NP}$, za neki λ.

Dobivamo

$$u^i = \lambda\xi^i,$$

$$-R = \lambda(\tau - R).$$

Eliminacijom λ iz druge jednadžbe, dobivamo

$$\sigma(\xi, \tau) = u = \frac{R\xi}{R - \tau}.$$

Očito je σ glatko preslikavanje na $S^n_R \setminus \{N\}$. Da bismo pokazali da je difeomorfizam, odredimo mu inverz

$$\xi^i = \frac{u^i}{\lambda}, \;\; \tau = R\frac{\lambda - 1}{\lambda}.$$

Kako točka inverza leži na sferi, to vrijedi $|\xi|^2 + \tau^2 = R^2$

$$\frac{|u|^2}{\lambda^2} + R^2 \frac{(\lambda - 1)^2}{\lambda^2} = R^2,$$

odakle je

$$\lambda = \frac{|u|^2 + R^2}{2R^2}.$$

Kako točka inverza leži na sferi, to vrijedi $|\xi|^2 + \tau^2 = R^2$

$$\frac{|u|^2}{\lambda^2} + R^2 \frac{(\lambda - 1)^2}{\lambda^2} = R^2,$$

odakle je

$$\lambda = \frac{|u|^2 + R^2}{2R^2}.$$

Sada je

$$\sigma^{-1}(u) = (\xi, \tau) = \left(\frac{2R^2}{|u|^2 + R^2}, R\frac{|u|^2 - R^2}{|u|^2 + R^2} \right),$$

odakle je vidljivo da je σ difeomorfizam.

Propozicija

Stereografska projekcija je konformna ekvivalencija izmedju $S^n_R \setminus \{N\}$ *i* $\mathbf{R}^n$.

Dokaz

Pomoću lokalne parametrizacije $\sigma^{-1} : \mathbf{R}^n \to S_R^n \setminus \{N\}$, odredimo povlak metrike $\overset{\circ}{g}_R$.

Dokaz

Pomoću lokalne parametrizacije $\sigma^{-1} : \mathbf{R}^n \to S^n_R \setminus \{N\}$, odredimo povlak metrike $\overset{\circ}{g}_R$.

Neka je $q \in \mathbf{R}^n$, $V \in T_q\mathbf{R}^n$. Tada po definiciji okrugle metrike vrijedi

$$(\sigma^{-1})^* \overset{\circ}{g}_R (V, V) = \overset{\circ}{g}_R (\sigma_*^{-1} V, \sigma_*^{-1} V) = \bar{g}(\sigma_*^{-1} V, \sigma_*^{-1} V),$$

gdje je $\bar{g}$ euklidska metrika na $\mathbf{R}^{n+1}$.

Dokaz

Pomoću lokalne parametrizacije $\sigma^{-1} : \mathbf{R}^n \to S^n_R \setminus \{N\}$, odredimo povlak metrike $\overset{\circ}{g}_R$.

Neka je $q \in \mathbf{R}^n$, $V \in T_q\mathbf{R}^n$. Tada po definiciji okrugle metrike vrijedi

$$(\sigma^{-1})^* \overset{\circ}{g}_R (V, V) = \overset{\circ}{g}_R (\sigma^{-1}_* V, \sigma^{-1}_* V) = \bar{g}(\sigma^{-1}_* V, \sigma^{-1}_* V),$$

gdje je $\bar{g}$ euklidska metrika na $\mathbf{R}^{n+1}$.

Ako pišemo $V = \sum_i V^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, $\sigma^{-1}(u) = (\xi(u), \tau(u))$, tada je

$$\sigma^{-1}_* V = \sum_{i,j} V^i \frac{\partial \xi^j}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial \xi^j} + \sum_i V^i \frac{\partial \tau}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial \tau}$$

$$= \sum_j V\xi^j \frac{\partial}{\partial \xi^j} + V\tau \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Dokaz - nastavak

Nadalje je

$$V\xi^j = V\Big(\frac{2R^2u^j}{|u|^2 + R^2}\Big) = \frac{2R^2V^j}{|u|^2 + R^2} - \frac{4R^2u^j\langle V, u\rangle}{(|u|^2 + R^2)^2},$$

$$V\tau = V\Big(R\frac{|u|^2 - R^2}{|u|^2 + R^2}\Big) = \frac{2R\langle V, u\rangle}{|u|^2 + R^2} - \frac{2R(|u|^2 - R^2)\langle V, u\rangle}{(|u|^2 + R^2)^2} = \frac{4R^3\langle V, u\rangle}{(|u|^2 + R^2)^2}$$

gdje smo označili $V(|u|^2) = 2\sum_k V^k u^k = 2\langle V, u\rangle$.

Dokaz - nastavak

Nadalje je

$$V\xi^j = V\left(\frac{2R^2 u^j}{|u|^2 + R^2}\right) = \frac{2R^2 V^j}{|u|^2 + R^2} - \frac{4R^2 u^j \langle V, u\rangle}{(|u|^2 + R^2)^2},$$

$$V\tau = V\left(R\frac{|u|^2 - R^2}{|u|^2 + R^2}\right) = \frac{2R\langle V, u\rangle}{|u|^2 + R^2} - \frac{2R(|u|^2 - R^2)\langle V, u\rangle}{(|u|^2 + R^2)^2} = \frac{4R^3\langle V, u\rangle}{(|u|^2 + R^2)^2}$$

gdje smo označili $V(|u|^2) = 2\sum_k V^k u^k = 2\langle V, u\rangle$.

Prema tome,

$$(\sigma^{-1})^* \overset{\circ}{g}_R = \frac{4R^4}{(|u|^2 + R^2)^2}\bar{g},$$

gdje je $\bar{g}$ euklidska metrika na $\mathbf{R}^n$. $\square$

Dokaz - nastavak

Nadalje je

$$V\xi^j = V(\frac{2R^2u^j}{|u|^2 + R^2}) = \frac{2R^2V^j}{|u|^2 + R^2} - \frac{4R^2u^j\langle V, u\rangle}{(|u|^2 + R^2)^2},$$

$$V\tau = V(R\frac{|u|^2 - R^2}{|u|^2 + R^2}) = \frac{2R\langle V, u\rangle}{|u|^2 + R^2} - \frac{2R(|u|^2 - R^2)\langle V, u\rangle}{(|u|^2 + R^2)^2} = \frac{4R^3\langle V, u}{(|u|^2 + R}$$

gdje smo označili $V(|u|^2) = 2\sum_k V^k u^k = 2\langle V, u\rangle$.

Prema tome,

$$(\sigma^{-1})^* \overset{\circ}{g}_R = \frac{4R^4}{(|u|^2 + R^2)^2}\bar{g},$$

gdje je $\bar{g}$ euklidska metrika na $\mathbf{R}^n$. $\square$

Odavde vidimo da je sfera *lokalno konformno plosnata*.

Hiperbolički prostor

Za svaki $R > 0$ u idućoj propoziciji definiramo *hiperbolički prostor radijusa* R, oznaka $\mathbf{H}^n_R$.

Hiperbolički prostor

Za svaki $R > 0$ u idućoj propoziciji definiramo *hiperbolički prostor radijusa* R, oznaka $\mathbf{H}^n_R$.

Ako je $R = 1$, pripadni prostor nazivamo *hiperboličkim prostorom*, oznaka $\mathbf{H}^n$.

Propozicija

Za zadani $R > 0$ sljedeće su Riemannove mnogostrukosti izometrične:

Propozicija

Za zadani $R > O$ sljedeće su Riemannove mnogostrukosti izometrične:

1. *(**Hiperbolički model**)* $\mathbf{H}^n_R$ *je gornja ploha* $(\tau > 0)$ *dvoplošnog hiperboloida u* $\mathbf{R}^{n+1}$, *danog u koordinatama* $(\xi^{\cancel{n}\,1}, \dots, \xi^n, \tau)$ *jednadžbom* $|\tau|^2 - |\xi|^2 = R^2$ *s metrikom*

   $$h^1_R = i^* m,$$

   gdje je $i : H^n_R \to \mathbf{R}^{n+1}$ *inkluzija, a* m *metrika Minkowskog* $m = (d\xi^n)^2 + \cdots (d\xi^n)^2 - (d\tau)^2$.

Propozicija - nastavak

2. *(**Poincaré-ov model kugle**) $\mathbf{B}^n_R$ je otvorena kugla u $\mathbf{R}^n$ s metrikom danom u koordinatama $(u^1, \ldots, u^n)$*

$$h^2_R = 4R^4 \frac{(du^1)^2 + \cdots + (du^n)^2}{(R^2 - |u|^2)^2}.$$

Propozicija - nastavak

2. *(**Poincaré-ov model kugle**)* $\mathbf{B}^n_R$ *je otvorena kugla u* $\mathbf{R}^n$ *s metrikom danom u koordinatama* $(u^1, \dots, u^n)$

$$h^2_R = 4R^4 \frac{(du^1)^2 + \dots + (du^n)^2}{(R^2 - |u|^2)^2}.$$

3. *(**Poincaré-ov model gornjeg poluprostora**)* *Neka je* $\mathbf{U}^n_R$ *gornji poluprostor u* $\mathbf{R}^n$ *definiran u koordinatama* $(x^1, \dots, x^{n-1}, y)$ *sa* $y > 0$ *i s metrikom*

$$h^3_R = R^2 \frac{(dx^1)^2 + \dots + (dx^{n-1})^2 + (dy)^2}{y^2}.$$

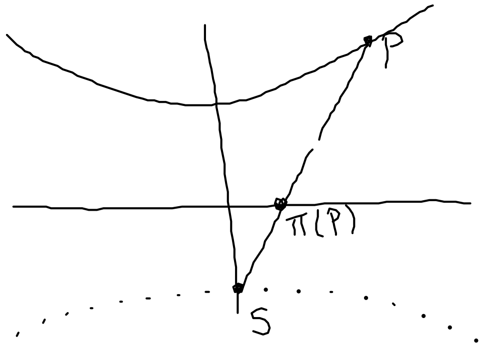
Dokaz

Difeomorfizam

$$\pi : \mathbf{H}_R^n \to \mathbf{B}_R^n$$

je izomorfizam izmedju metrika iz prvog i drugog dijela tvrdnje definiran na sljedeći način:

Dokaz



Difeomorfizam

$$\pi : \mathbf{H}^n_R \to \mathbf{B}^n_R$$

je izomorfizam izmedju metrika iz prvog i drugog dijela tvrdnje definiran na sljedeći način:

Neka je $S = (0, \ldots, 0, -R)$. Za svaku točku $P = (\xi^n, \ldots, \xi^n, \tau)$ definiramo $\pi(P) = u$, gdje je $U = (u, 0)$ točka u kojoj pravac SP presijeca hiperravninu $\tau = 0$.

Dokaz - nastavak

Preslikavanje π nazivamo *hiperboličkom stereografskom projekcijom*. Kao i kod stereografske projekcije sfere, dobivamo

$$\pi(\xi, \tau) = \frac{R\xi}{R + \tau},$$

$$\pi^{-1}(u) = (\frac{2R^2 u}{R^2 - |u|^2}, R\frac{R^2 + |u|^2}{R^2 - |u|^2}).$$

Dokaz - nastavak

Preslikavanje π nazivamo *hiperboličkom stereografskom projekcijom*. Kao i kod stereografske projekcije sfere, dobivamo

$$\pi(\xi, \tau) = \frac{R\xi}{R + \tau},$$

$$\pi^{-1}(u) = \left(\frac{2R^2 u}{R^2 - |u|^2}, R\frac{R^2 + |u|^2}{R^2 - |u|^2}\right).$$

Treba pokazati $(\pi^{-1})^* h_R^1 = h_R^2$.

Dokaz - nastavak

Preslikavanje π nazivamo *hiperboličkom stereografskom projekcijom*. Kao i kod stereografske projekcije sfere, dobivamo

$$\pi(\xi, \tau) = \frac{R\xi}{R+\tau},$$

$$\pi^{-1}(u) = \left(\frac{2R^2 u}{R^2 - |u|^2}, R\frac{R^2 + |u|^2}{R^2 - |u|^2}\right).$$

Treba pokazati $(\pi^{-1})^* h_R^1 = h_R^2$.

Uočimo da odavde takodjer slijedi da je h_R^1 pozitivno definitno.

Dokaz - nastavak

Dz: odredite geometrijski za $n=2$

Sada definiramo difeomorfizam

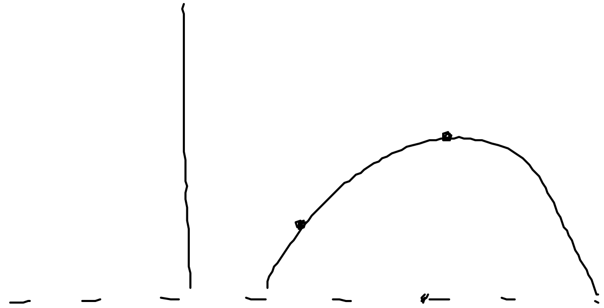
$$\kappa : \mathbf{B}_R^n \to \mathbf{U}_R^n$$

$$\kappa(u,v) = (x,y) = \left(\frac{2R^2 u}{|u|^2 + (v-R)^2}, R\frac{R^2 - |u|^2 - v^2}{|u|^2 + (v-R)^2} \right),$$

$$\kappa^{-1}(x,y) = \left(\frac{2R^2 x}{|x|^2 + (y+R)^2}, R\frac{|x|^2 + |y|^2 - R^2}{|x|^2 + (y+R)^2} \right),$$

gdje je $(u,v) = (u^1, \ldots, u^{n-1}, v)$.

Dokaz - nastavak



Sada definiramo difeomorfizam

$$\kappa : \mathbf{B}^n_R \to \mathbf{U}^n_R$$

$$\kappa(u,v) = (x,y) = \left(\frac{2R^2 u}{|u|^2 + (v-R)^2}, R\frac{R^2 - |u|^2 - v^2}{|u|^2 + (v-R)^2} \right),$$

$$\kappa^{-1}(x,y) = \left(\frac{2R^2 x}{|x|^2 + (y+R)^2}, R\frac{|x|^2 + |y|^2 - R^2}{|x|^2 + (y+R)^2} \right),$$

gdje je $(u,v) = (u^1, \ldots, u^{n-1}, v)$.

Treba pokazati $(\kappa^{-1})^* h^3_R = h^2_R$. $\square$

Uočimo: hiperbolička metrika je lokalno konformno plosnata.

$$g \in O(n,1) \Leftarrow g^t \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Uočimo: hiperbolička metrika je lokalno konformno plosnata.

Napomena – Simetrije od $\mathbf{H}^n_R$. Označimo sa $O(n,1)$ grupu linearnih operatora na $\mathbf{R}^{n+1}$ koja čuva metriku Minkowskog.

Uočimo: hiperbolička metrika je lokalno konformno plosnata.

Napomena – Simetrije od $\mathbf{H}^n_R$. Označimo sa $O(n,1)$ grupu linearnih operatora na $\mathbf{R}^{n+1}$ koja čuva metriku Minkowskog.

Grupa $O(n,1)$ naziva se *Lorentzovom grupom*. Svaki element grupe $O(n,1)$ čuva i dvoplošni hiperboloid $\{\tau^2 - |\xi|^2 = R^2\}$, a sa $O_+(n,1)$ označujemo podgrupu koja čuva gornju plohu $\tau > 0$.

Uočimo: hiperbolička metrika je lokalno konformno plosnata.

Napomena – Simetrije od $\mathbf{H}^n_R$. Označimo sa $O(n,1)$ grupu linearnih operatora na $\mathbf{R}^{n+1}$ koja čuva metriku Minkowskog.

Grupa $O(n,1)$ naziva se *Lorentzovom grupom*. Svaki element grupe $O(n,1)$ čuva i dvoplošni hiperboloid $\{\tau^2 - |\xi|^2 = R^2\}$, a sa $O_+(n,1)$ označujemo podgrupu koja čuva gornju plohu $\tau > 0$.

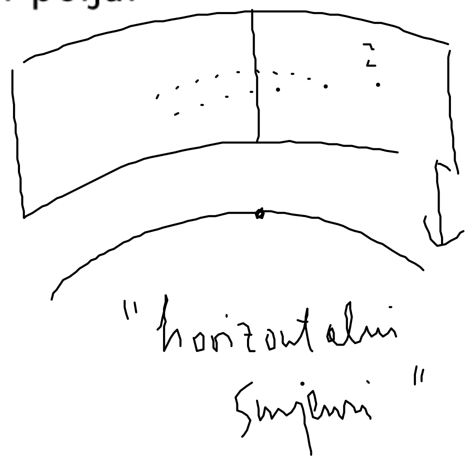
Stoga $O_+(n,1)$ čuva $\mathbf{H}^n_R$ i m, te djeluje na $\mathbf{H}^n_R$ izometrijama.

Propozicija

$O_+(n,1)$ djeluje tranzitivno na skup ortonormiranih baza na $\mathbf{H}_R^n$. Stoga je $\mathbf{H}_R^n$ homogena i izotropna Riemannova mnogostrukost.

Koneksija

Cilj: "Povezati" različite tangencijalne prostore mnogostrukosti kako bi se računala usmjerena derivacija vektorskih polja.



Koneksija

Cilj: "Povezati" različite tangencijalne prostore mnogostrukosti kako bi se računala usmjerena derivacija vektorskih polja.

Neka je $\pi : E \to M$ vektorski svežanj na M, $\mathcal{E}(M)$ prostor glatkih prereza od E.

Koneksija

Cilj: "Povezati" različite tangencijalne prostore mnogostrukosti kako bi se računala usmjerena derivacija vektorskih polja.

Neka je $\pi : E \to M$ vektorski svežanj na M, $\mathcal{E}(M)$ prostor glatkih prereza od E.

Koneksija od E je preslikavanje

$$\nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M),$$

pišemo $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, koje zadovoljava

Koneksija

Cilj: "Povezati" različite tangencijalne prostore mnogostrukosti kako bi se računala usmjerena derivacija vektorskih polja.

Neka je $\pi : E \to M$ vektorski svežanj na M, $\mathcal{E}(M)$ prostor glatkih prereza od E.

Koneksija od E je preslikavanje

$$\nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M),$$

pišemo $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, koje zadovoljava

(a) $\nabla_X Y$ je linearno nad $C^\infty(M)$ u X,

Koneksija

Cilj: "Povezati" različite tangencijalne prostore mnogostrukosti kako bi se računala usmjerena derivacija vektorskih polja.

Neka je $\pi : E \to M$ vektorski svežanj na M, $\mathcal{E}(M)$ prostor glatkih prereza od E.

Koneksija od E je preslikavanje

$$\nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M),$$

pišemo $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, koje zadovoljava

(a) $\nabla_X Y$ je linearno nad $C^\infty(M)$ u X,

(b) $\nabla_X Y$ je linearno nad $\mathbf{R}$ u Y,

Koneksija

Cilj: "Povezati" različite tangencijalne prostore mnogostrukosti kako bi se računala usmjerena derivacija vektorskih polja.

Neka je $\pi : E \to M$ vektorski svežanj na M, $\mathcal{E}(M)$ prostor glatkih prereza od E.

Koneksija od E je preslikavanje

$$\nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M),$$

pišemo $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, koje zadovoljava

(a) $\nabla_X Y$ je linearno nad $C^\infty(M)$ u X,

(b) $\nabla_X Y$ je linearno nad $\mathbf{R}$ u Y,

(c) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$.

$\nabla_X Y$ se čita *kovarijantna derivacija* od Y u smjeru X.

$\nabla_X Y$ se čita *kovarijantna derivacija* od Y u smjeru X.

Ako je E tangencijalni svežanj TM, pripadnu koneksiju nazivamo *linearnom koneksijom*.

$\nabla_X Y$ se čita *kovarijantna derivacija* od Y u smjeru X.

Ako je E tangencijalni svežanj TM, pripadnu koneksiju nazivamo *linearnom koneksijom*.

Neka je $\{E_i\}$ lokalni reper za TM na otvorenom skupu $U \subset M$ (primjerice koordinatni reper $\frac{\partial}{\partial x^i}$).

$\nabla_X Y$ se čita *kovarijantna derivacija* od Y u smjeru X.

Ako je E tangencijalni svežanj TM, pripadnu koneksiju nazivamo *linearnom koneksijom*.

Neka je $\{E_i\}$ lokalni reper za TM na otvorenom skupu $U \subset M$ (primjerice koordinatni reper $\frac{\partial}{\partial x^i}$).

Možemo pisati
$$\nabla_{E_i} E_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k E_k.$$

$\nabla_X Y$ se čita *kovarijantna derivacija* od Y u smjeru X.

Ako je E tangencijalni svežanj TM, pripadnu koneksiju nazivamo *linearnom koneksijom*.

Neka je $\{E_i\}$ lokalni reper za TM na otvorenom skupu $U \subset M$ (primjerice koordinatni reper $\frac{\partial}{\partial x^i}$).

Možemo pisati

$$\nabla_{E_i} E_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k E_k.$$

n^3 funkcija Γ_{ij}^k nazivaju se *Christoffelovi simboli* od ∇ u danom reperu.

Propozicija

Neka je ∇ *linearna koneksija,* $X, Y \in \mathcal{T}(U)$*,* $X = \sum_i X^i E_i$*,* $Y = \sum_i Y^i E_i$.

Propozicija

Neka je ∇ *linearna koneksija,* $X, Y \in \mathcal{T}(U)$, $X = \sum_i X^i E_i$, $Y = \sum_i Y^i E_i$.

Tada je

$$\nabla_X Y = \sum_k (XY^k + \sum_{i,j} X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) E_k. \tag{1}$$

Primjer: Euklidska koneksija.

$$\bar{\nabla}_X\left(\sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_j (XY^j)\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Primjer: Euklidska koneksija.

$$\bar{\nabla}_X(\sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}) = \sum_j (XY^j) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Drugim riječima, $\bar{\nabla}_X Y$ je vektorsko polje kojemu su komponente usmjerene derivacije koordinata od Y u smjeru X. Svi su Christoffelovi simboli jednaki 0.

Primjer: Euklidska koneksija.

$$\bar{\nabla}_X\Big(\sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) = \sum_j (XY^j) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Drugim riječima, $\bar{\nabla}_X Y$ je vektorsko polje kojemu su komponente usmjerene derivacije koordinata od Y u smjeru X. Svi su Christoffelovi simboli jednaki 0.

Propozicija

Svaka mnogostrukost dopušta linearnu koneksiju.

Dokaz

Neka je $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ otvoren pokrivač za M koordinatnim kartama i neka je ψ_α glatka particija jedinice podredjena tom pokrivaču.

Dokaz

Neka je $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ otvoren pokrivač za M koordinatnim kartama i neka je ψ_α glatka particija jedinice podredjena tom pokrivaču.

Na U_α konstruiramo ∇^α zadavanjem Christoffelovih simbola za koordinatni reper $\frac{\partial}{\partial x^i}$ i korištenjem formule (1).

Dokaz

Neka je $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ otvoren pokrivač za M koordinatnim kartama i neka je ψ_α glatka particija jedinice podredjena tom pokrivaču.

Na U_α konstruiramo ∇^α zadavanjem Christoffelovih simbola za koordinatni reper $\frac{\partial}{\partial x^i}$ i korištenjem formule (1).

Još trebamo "polijepiti" definirane ∇^α. Koristimo particiju jedinice i definiramo

$$\nabla_X Y = \sum_\alpha \psi_\alpha \nabla^\alpha_X Y.$$

Dokaz - nastavak

Ovako definirano preslikavanje je glatko, linearno nad $\mathbf{R}$ u Y i linearno nad $C^\infty(M)$ u X.

Dokaz - nastavak

Ovako definirano preslikavanje je glatko, linearno nad $\mathbf{R}$ u Y i linearno nad $C^\infty(M)$ u X.

Trebamo provjeriti produktno pravilo (paziti! za dane linearne koneksije ∇^1 i ∇^2 niti $\frac{1}{2}\nabla^1$, niti $\nabla^1 + \nabla^2$ ne zadovoljavaju produktno pravilo).

Dokaz - nastavak

Ovako definirano preslikavanje je glatko, linearno nad $\mathbf{R}$ u Y i linearno nad $C^\infty(M)$ u X.

Trebamo provjeriti produktno pravilo (paziti! za dane linearne koneksije ∇^1 i ∇^2 niti $\frac{1}{2}\nabla^1$, niti $\nabla^1 + \nabla^2$ ne zadovoljavaju produktno pravilo).

Vrijedi

$$\nabla_X(fY) = \sum_\alpha \psi_\alpha \nabla^\alpha_X(fY)$$

$$= \sum_\alpha \psi_\alpha((Xf)Y + f\nabla^\alpha_X Y)$$

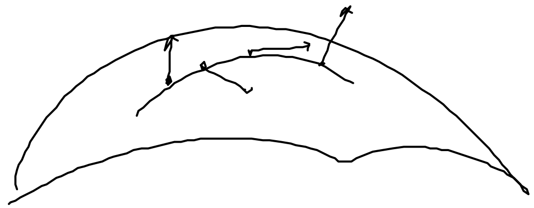
$$= (Xf)Y + f\sum_\alpha \psi_\alpha \nabla^\alpha_X Y = (Xf)Y + f\nabla_X Y.$$

$\square$

Vektorska polja duž krivulje

Neka je $c : I \to M$ krivulja (glatko preslikavanje : $I \to M$, $I \subset \mathbf{R}$ otvoren interval).

Vektorska polja duž krivulje



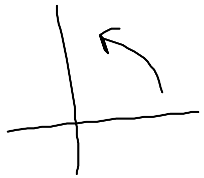
Neka je $c : I \to M$ krivulja (glatko preslikavanje : $I \to M$, $I \subset \mathbf{R}$ otvoren interval).

Vektorsko polje duž c je glatko preslikavanje $V : I \to TM$ takvo da je $V(t) \in T_{c(t)}M$, $t \in I$.

Primjer

- Vektorsko polje brzine $\dot{c}(t) := c_*(d/dt)$, $\dot{c}(t)f = \frac{d}{dt}(f \circ c)(t)$.

Primjer



$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Vektorsko polje brzine $\dot{c}(t) := c_*(d/dt)$, $\dot{c}(t)f = \frac{d}{dt}(f \circ c)(t)$.

- Ako je $c : I \to \mathbf{R}^2$, tada definiramo $N(t) = J\dot{c}(t)$, gdje je J pozitivna rotacija za $\pi/2$. Polje n se naziva *normalno polje* krivulje c.

Primjer

- Vektorsko polje brzine $\dot{c}(t) := c_*(d/dt)$, $\dot{c}(t)f = \frac{d}{dt}(f \circ c)(t)$.
- Ako je $c : I \to \mathbf{R}^2$, tada definiramo $N(t) = J\dot{c}(t)$, gdje je J pozitivna rotacija za $\pi/2$. Polje n se naziva *normalno polje* krivulje c.
- Ako je $\tilde{V} \in \mathcal{T}(M)$, za $t \in I$ definiramo $V(t) = \tilde{V}_{c(t)}$.

Za vektorsko polje V duž c kažemo da se *može proširiti* (engl. *extendible*), ako postoji vektorsko polje $\tilde{V}$ u okolini slike od c za koje vrijedi $V(t) = \tilde{V}_{c(t)}$.

Za vektorsko polje V duž c kažemo da se *može proširiti* (engl. *extendible*), ako postoji vektorsko polje $\tilde{V}$ u okolini slike od c za koje vrijedi $V(t) = \tilde{V}_{c(t)}$.

Označimo $\mathcal{T}(c)$ skup svih vektorskih polja duž c. Uz uobičajeno definirane operacije $\mathcal{T}(c)$ je realan vektorski prostor.

Propozicija

Neka je ∇ linearna koneksija na M. Tada za svaku krivulju $c : I \to M$, ∇ definira jedinstveno preslikavanje

$$D_t : \mathcal{T}(c) \to \mathcal{T}(c)$$

koji zadovoljava sljedeća svojstva:

Propozicija

Neka je ∇ linearna koneksija na M. Tada za svaku krivulju $c : I \to M$, ∇ definira jedinstveno preslikavanje

$$D_t : \mathcal{T}(c) \to \mathcal{T}(c)$$

koji zadovoljava sljedeća svojstva:

1. *Linearnost nad* $\mathbf{R}$,

Propozicija

Neka je ∇ *linearna koneksija na* M*. Tada za svaku krivulju* $c : I \to M$, ∇ *definira jedinstveno preslikavanje*

$$D_t : \mathcal{T}(c) \to \mathcal{T}(c)$$

koji zadovoljava sljedeća svojstva:

1. *Linearnost nad* $\mathbf{R}$,
2. *Produktno pravilo* $D_t(fV) = \dot{f}V + fD_tV$, $f \in C^\infty(I)$,

Propozicija

Neka je ∇ linearna koneksija na M. Tada za svaku krivulju $c : I \to M$, ∇ definira jedinstveno preslikavanje

$$D_t : \mathcal{T}(c) \to \mathcal{T}(c)$$

koji zadovoljava sljedeća svojstva:

1. *Linearnost nad* $\mathbf{R}$,
2. *Produktno pravilo* $D_t(fV) = \dot{f}V + fD_tV$, $f \in C^\infty(I)$,
3. *Ako se* V *može proširiti, tada za bilo koje proširenje* $\tilde{V}$ *vrijedi*

$$D_tV(t) = \nabla_{\dot{c}(t)}\tilde{V}.$$

Propozicija

Neka je ∇ linearna koneksija na M. Tada za svaku krivulju $c : I \to M$, ∇ definira jedinstveno preslikavanje

$$D_t : \mathcal{T}(c) \to \mathcal{T}(c)$$

koji zadovoljava sljedeća svojstva:

1. *Linearnost nad* $\mathbf{R}$,
2. *Produktno pravilo* $D_t(fV) = \dot{f}V + fD_tV$, $f \in C^\infty(I)$,
3. *Ako se* V *može proširiti, tada za bilo koje proširenje* $\tilde{V}$ *vrijedi*

$$D_tV(t) = \nabla_{\dot{c}(t)}\tilde{V}.$$

Linearni operator D_tV naziva se *kovarijantna derivacija od V duž c*.

Dokaz (Skica)

U koordinatnoj okolini točke $c(t_0)$ možemo pisati

$$V(t) = \sum_j V^j(t)\partial_j.$$

Dokaz (Skica)

U koordinatnoj okolini točke $c(t_0)$ možemo pisati

$$V(t) = \sum_j V^j(t)\partial_j.$$

Kako se polja ∂_j mogu proširiti, to vrijedi

$$\begin{aligned} D_t V(t_0) &= \textstyle\sum_j \dot{V}^j(t_0)\partial_j + V^j(t_0)\nabla_{\dot{c}(t_0)}\partial_j \\ &= \textstyle\sum_k \left(\dot{V}^k(t_0) + \sum_{i,j} V^j(t_0)\dot{c}^i(t_0)\Gamma^k_{ij}(c(t_0))\right)\partial_k. \end{aligned} \tag{2}$$

Dokaz (Skica)

U koordinatnoj okolini točke $c(t_0)$ možemo pisati

$$V(t) = \sum_j V^j(t)\partial_j.$$

Kako se polja ∂_j mogu proširiti, to vrijedi

$$\begin{aligned} D_t V(t_0) &= \textstyle\sum_j \dot{V}^j(t_0)\partial_j + V^j(t_0)\nabla_{\dot{c}(t_0)}\partial_j \\ &= \textstyle\sum_k \left(\dot{V}^k(t_0) + \sum_{i,j} V^j(t_0)\dot{c}^i(t_0)\Gamma_{ij}^k(c(t_0))\right)\partial_k. \end{aligned} \tag{2}$$

Time je pokazana jedinstvenost.

Dokaz - nastavak

Egzistencija. Ako je krivulja c sadržana u jednoj karti, tada se $D_t V$ definira formulom (2) (pokazati da zadovoljava tražena svojstva).

Dokaz - nastavak

Egzistencija. Ako je krivulja c sadržana u jednoj karti, tada se $D_t V$ definira formulom (2) (pokazati da zadovoljava tražena svojstva).

Ako je potrebno $c(I)$ pokriti s više koordinatnih karata, u svakoj se karti definira $D_t V$, a jedinstvenost povlači da se njihove definicije podudaraju na presjeku karata. $\square$

Dokaz - nastavak

Egzistencija. Ako je krivulja c sadržana u jednoj karti, tada se $D_t V$ definira formulom (2) (pokazati da zadovoljava tražena svojstva).

Ako je potrebno $c(I)$ pokriti s više koordinatnih karata, u svakoj se karti definira $D_t V$, a jedinstvenost povlači da se njihove definicije podudaraju na presjeku karata. $\square$

Napomena. Linearna koneksija inducira koneksiju i na svakom tenzorskom svežnju nad M. Specijalno na $T^0 M$

$$\nabla_X f = Xf.$$

Geodetske krivulje i paralelni pomak

Motivacija. Generalizirati svojstva pravca iz $\mathbf{R}^n$. Geodetske krivulje ćemo definirati kao krivulje *akceleracije jednake 0*.

Geodetske krivulje i paralelni pomak

Motivacija. Generalizirati svojstva pravca iz $\mathbf{R}^n$. Geodetske krivulje ćemo definirati kao krivulje *akceleracije jednake 0*.

Mogu se opisati i kao krivulje koje (lokalno) minimiziraju udaljenost - tehnički zahtjevnije. Ili kao krivulje (geodetske) zakrivljenosti 0.

Neka je M mnogostrukost s linearnom koneksijom ∇ i neka je c krivulja u M.

Neka je M mnogostrukost s linearnom koneksijom ∇ i neka je c krivulja u M.

Akceleracija od c je vektorsko polje $D_t\dot{c}$ duž c.

Neka je M mnogostrukost s linearnom koneksijom ∇ i neka je c krivulja u M.

Akceleracija od c je vektorsko polje $D_t\dot{c}$ duž c.

Krivulja se naziva *geodetskom* s obzirom na ∇ ako je

$$D_t\dot{c} \equiv 0.$$

Teorem (Egzistencija i jedinstvenost geodetskih krivulja)

Neka je M mnogostrukost s linearnom koneksijom ∇.

Teorem (Egzistencija i jedinstvenost geodetskih krivulja)

Neka je M *mnogostrukost s linearnom koneksijom* ∇.

Za svaku točku $p \in M$, *tangencijalni vektor* $V \in T_pM$ *i* $t_0 \in \mathbf{R}$, *postoji otvoreni interval* $I \subset \mathbf{R}$, $t_0 \in I$, *i geodetska krivulja* $c : I \to M$ *koja zadovoljava* $c(t_0) = p$, $\dot{c}(t_0) = V$.

Teorem (Egzistencija i jedinstvenost geodetskih krivulja)

Neka je M mnogostrukost s linearnom koneksijom ∇.

Za svaku točku $p \in M$, tangencijalni vektor $V \in T_pM$ i $t_0 \in \mathbf{R}$, postoji otvoreni interval $I \subset \mathbf{R}$, $t_0 \in I$, i geodetska krivulja $c : I \to M$ koja zadovoljava $c(t_0) = p$, $\dot{c}(t_0) = V$.

Svake dvije takve geodetske krivulje poklapaju se na presjeku domena.

Dokaz

Neka su (x^i) koordinate u okolini U od p. Koristeći (2) vidimo da je krivulja

$$c(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$$

geodetska ako i samo ako za svaki k vrijedi

$$\ddot{x}^k(t) + \sum_{i,j} \dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)\Gamma_{ij}^k(x(t)) = 0.$$

Dokaz

Neka su (x^i) koordinate u okolini U od p. Koristeći (2) vidimo da je krivulja

$$c(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$$

geodetska ako i samo ako za svaki k vrijedi

$$\ddot{x}^k(t) + \sum_{i,j} \dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)\Gamma^k_{ij}(x(t)) = 0.$$

Dobili smo sustav običnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda za funkcije $x^i(t)$.

Dokaz

Neka su (x^i) koordinate u okolini U od p. Koristeći (2) vidimo da je krivulja

$$c(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$$

geodetska ako i samo ako za svaki k vrijedi

$$\ddot{x}^k(t) + \sum_{i,j} \dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)\Gamma_{ij}^k(x(t)) = 0.$$

Dobili smo sustav običnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda za funkcije $x^i(t)$.

Uvodjenjem varijabli

$$\dot{x}^k(t) = v^k(t),$$
$$\dot{v}^k(t) = -\sum_{i,j} v^i(t)v^j(t)\Gamma_{ij}^k(x(t))$$

dobivamo ekvivalentni sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda.

Dokaz

Neka su (x^i) koordinate u okolini U od p. Koristeći (2) vidimo da je krivulja

$$c(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$$

geodetska ako i samo ako za svaki k vrijedi

$$\ddot{x}^k(t) + \sum_{i,j} \dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)\Gamma^k_{ij}(x(t)) = 0.$$

Dobili smo sustav običnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda za funkcije $x^i(t)$.

Uvodjenjem varijabli

$$\dot{x}^k(t) = v^k(t),$$
$$\dot{v}^k(t) = -\sum_{i,j} v^i(t)v^j(t)\Gamma^k_{ij}(x(t))$$

dobivamo ekvivalentni sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda.

Egzistenciju i jedinstvenost rješenja tog sustava garantira teorija.

Maksimalna geodetska krivulja je geodetska krivulja koja se ne može proširiti na veći interval. Naziva se i geodetskom krivuljom s početnom točkom p i početnim vektorom brzine V.

Neka je M mnogostrukost s linearnom koneksijom ∇. Vektorsko polje V duž c je *paralelno* duž c s obzirom na ∇ ako vrijedi

$$D_t V \equiv 0.$$

Neka je M mnogostrukost s linearnom koneksijom ∇. Vektorsko polje V duž c je *paralelno* duž c s obzirom na ∇ ako vrijedi

$$D_t V \equiv 0.$$

Za vektorsko polje na M kažemo da je *paralelno* ako je paralelno duž svake krivulje. To vrijedi ako i samo ako $\nabla V \equiv 0$ (totalna kovarijantna derivacija).

Sljedeća tvrdnja kaže da se svaki tangencijalni vektor u nekoj točki krivulje može jedinstveno proširiti do paralelnog vektorskog polja duž cijele krivulje:

Sljedeća tvrdnja kaže da se svaki tangencijalni vektor u nekoj točki krivulje može jedinstveno proširiti do paralelnog vektorskog polja duž cijele krivulje:

Teorem (Paralelni pomak)

Neka je $c : I \to M$ *krivulja,* $t_0 \in I$*,* $V_0 \in T_{c(t_0)}M$*. Tada postoji jedinstveno paralelno vektorsko polje* V *duž* c *takvo da je* $V(t_0) = V_0$*.*

Sljedeća tvrdnja kaže da se svaki tangencijalni vektor u nekoj točki krivulje može jedinstveno proširiti do paralelnog vektorskog polja duž cijele krivulje:

Teorem (Paralelni pomak)

Neka je $c : I \to M$ krivulja, $t_0 \in I$, $V_0 \in T_{c(t_0)}M$. Tada postoji jedinstveno paralelno vektorsko polje V duž c takvo da je $V(t_0) = V_0$.

Vektorsko polje iz teorema naziva se *paralelni pomak* od V_0 duž c.

Dokaz (Skica).

Ako je $c(I)$ sadržano u jednoj koordinatnoj karti, tada je V paraleno duž c ako i samo ako je

$$\dot{V}^k(t) = -\sum_{i,j} V^j(t)\dot{c}^i(t)\Gamma^k_{ij}(c(t)), \quad k = 1, \dots n.$$

Dokaz (Skica).

Ako je $c(I)$ sadržano u jednoj koordinatnoj karti, tada je V paraleno duž c ako i samo ako je

$$\dot{V}^k(t) = -\sum_{i,j} V^j(t)\dot{c}^i(t)\Gamma^k_{ij}(c(t)), \quad k = 1, \dots n.$$

To je sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi za $(V^1(t), \dots, V^n(t))$.

Dokaz (Skica).

Ako je $c(I)$ sadržano u jednoj koordinatnoj karti, tada je V paraleno duž c ako i samo ako je

$$\dot{V}^k(t) = -\sum_{i,j} V^j(t)\dot{c}^i(t)\Gamma_{ij}^k(c(t)), \quad k = 1, \ldots n.$$

To je sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi za $(V^1(t), \ldots, V^n(t))$.

Teorem egzistencije i jedinstvenosti garantira postojanje rješenja za svaki $t \in I$ za bilo koji početni uvjet $V(t_0) = V_0$. $\square$

Ako je $c : I \to M$ krivulja, $t_o, t_1 \in I$, tada paralelni pomak definira operator

$$P_{t_0 t_1} : T_{c(t_0)}M \to T_{c(t_1)}M$$

$$P_{t_0 t_1} V_0 = V(t_1),$$

gdje je V paralelni pomak od V_0 duž c.

Ako je $c : I \to M$ krivulja, $t_o, t_1 \in I$, tada paralelni pomak definira operator

$$P_{t_0 t_1} : T_{c(t_0)}M \to T_{c(t_1)}M$$

$$P_{t_0 t_1} V_0 = V(t_1),$$

gdje je V paralelni pomak od V_0 duž c.

Za operator $P_{t_0 t_1}$ može se provjeriti da je linearni izomorfizam. Osim toga vrijedi

$$D_t V(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{P_{t_0 t}^{-1} V(t) - V(t_0)}{t - t_0}.$$

Riemannova koneksija

Motivacija. Riemannove podmnogostrukosti – akceleracija geodetske krivulje ima trivijalnu projekciju na tangencijalni potprostor podmnogostrukosti.

Riemannova koneksija

Motivacija. Riemannove podmnogostrukosti – akceleracija geodetske krivulje ima trivijalnu projekciju na tangencijalni potprostor podmnogostrukosti.

Preciznije, neka je $M \subset \mathbf{R}^n$, V vektorsko polje na M kojeg (pomoću particije jedinice) možemo proširiti do vektorskog polja na $\mathbf{R}^n$. Definiramo preslikavanje

$$\nabla^\top : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$$

$$\nabla^\top_X Y = \pi^\top(\bar{\nabla}_X Y),$$

gdje je $\pi^\top$ je ortogonalna projekcija, $\pi^\top : T_p\mathbf{R}^n \to T_p M$.

Propozicija

Operator $\nabla^\top$ *je koneksija na* M.

Propozicija

Operator $\nabla^{\top}$ *je koneksija na* M.

Linearna koneksija $\nabla^{\top}$ se naziva *tangencijalna koneksija* na M.

Propozicija

Operator $\nabla^{\top}$ *je koneksija na* M*.*

Linearna koneksija $\nabla^{\top}$ se naziva *tangencijalna koneksija* na M.

Euklidska koneksija na $\mathbf{R}^n$ (sa Riemannovom metrikom $\langle \, , \, \rangle$) ima svojstvo

$$\bar{\nabla}_X \langle Y, Z \rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y, Z \rangle + \langle Y, \bar{\nabla}_X Z \rangle.$$

Propozicija

Operator $\nabla^\top$ *je koneksija na* M*.*

Linearna koneksija $\nabla^\top$ se naziva *tangencijalna koneksija* na M.

Euklidska koneksija na $\mathbf{R}^n$ (sa Riemannovom metrikom $\langle\,,\,\rangle$) ima svojstvo

$$\bar{\nabla}_X\langle Y, Z\rangle = \langle\bar{\nabla}_X Y, Z\rangle + \langle Y, \bar{\nabla}_X Z\rangle.$$

Isto svojstvo ima i tangencijalna koneksija.

Svojstvo se može poopćiti na Riemannove (pseudo)-mnogostrukosti. Neka je g Riemannova (ili pseudo-Riemannova mnogostrukost) na M.

Svojstvo se može poopćiti na Riemannove (pseudo)-mnogostrukosti. Neka je g Riemannova (ili pseudo-Riemannova mnogostrukost) na M.

Za linearnu koneksiju ∇ kažemo da je *uskladjena* (*kompatibilna*) s g ako zadovoljava

$$\nabla_X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle. \tag{3}$$

Propozicija

Sljedeća svojstva linearne koneksije ∇ *na Riemannovoj mnogostrukosti su ekvivalentna:*

Propozicija

Sljedeća svojstva linearne koneksije ∇ na Riemannovoj mnogostrukosti su ekvivalentna:

1. ∇ *je uskladjena s* g,

Propozicija

Sljedeća svojstva linearne koneksije ∇ na Riemannovoj mnogostrukosti su ekvivalentna:

1. ∇ *je uskladjena s* g,
2. $\nabla g \equiv 0$,

Propozicija

Sljedeća svojstva linearne koneksije ∇ na Riemannovoj mnogostrukosti su ekvivalentna:

1. ∇ *je uskladjena s* g,
2. $\nabla g \equiv 0$,
3. *Ako su* V, W *vektorska polja duž krivulje* c, *tada*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle D_t V, W\rangle + \langle V, D_t W\rangle,$$

Propozicija

Sljedeća svojstva linearne koneksije ∇ na Riemannovoj mnogostrukosti su ekvivalentna:

1. ∇ *je uskladjena s* g,
2. $\nabla g \equiv 0$,
3. *Ako su* V, W *vektorska polja duž krivulje* c, *tada*
$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle D_t V, W\rangle + \langle V, D_t W\rangle,$$
4. *Ako su* V, W *paralelna vektorska polja duž krivulje* c, *tada je* $\langle V, W\rangle$ *konstantno,*

Propozicija

Sljedeća svojstva linearne koneksije ∇ na Riemannovoj mnogostrukosti su ekvivalentna:

1. ∇ *je uskladjena s* g,
2. $\nabla g \equiv 0$,
3. *Ako su* V, W *vektorska polja duž krivulje* c, *tada*
$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle D_t V, W\rangle + \langle V, D_t W\rangle,$$
4. *Ako su* V, W *paralelna vektorska polja duž krivulje* c, *tada je* $\langle V, W\rangle$ *konstantno,*
5. *Paralelni prijenos* $P_{t_0 t_1} : T_{c(t_0)}M \to T_{c(t_1)}M$ *je izometrija za svaki* t_0, t_1.

Za linearnu koneksiju kažemo da je *simetrična* ako njena *torzija*, tj. $(2,1)$-tenzor $\tau : \mathcal{T}M \times \mathcal{T}M \to \mathcal{T}M$

$$\tau(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

iščezava, tj. vrijedi

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Teorem (Fundamentalni teorem Riemannove geometrije)

Neka je (M, g) *Riemannova (ili pseudo-Riemannova) mnogostrukost. Tada postoji jedinstvena linearna koneksija* ∇ *na* M *koja je simetrična i uskladjena s* g.

Teorem (Fundamentalni teorem Riemannove geometrije)

Neka je (M, g) Riemannova (ili pseudo-Riemannova) mnogostrukost. Tada postoji jedinstvena linearna koneksija ∇ na M koja je simetrična i uskladjena s g.

Ta se koneksija naziva *Riemannovom* ili *Levi-Civita* koneksijom od g.