Riemannova metrika

Neka je M glatka mnogostrukost dimenzije n. *Riemannova metrika* na M je (glatko) kovarijantno 2-tenzorsko polje $g \in \mathcal{T}^2(M)$ koje je

1. simetrično tj. $g(X, Y) = g(Y, X)$,
2. pozitivno definitno tj. $g(X, X) > 0$, za $X \neq 0$.

Riemannova metrika

Neka je M glatka mnogostrukost dimenzije n. *Riemannova metrika* na M je (glatko) kovarijantno 2-tenzorsko polje $g \in \mathcal{T}^2(M)$ koje je

1. simetrično tj. $g(X,Y) = g(Y,X)$,
2. pozitivno definitno tj. $g(X,X) > 0$, za $X \neq 0$.

(X i Y su tangencijalni vektori na M u nekoj točki p.)

Dakle, Riemannovom metrikom je na svakom tangencijalnom prostoru T_pM odredjen skalarni produkt.

Dakle, Riemannovom metrikom je na svakom tangencijalnom prostoru T_pM odredjen skalarni produkt.

Mnogostrukost sa Riemannovom metrikom, (M, g), naziva se *Riemannova mnogostrukost*.

Dakle, Riemannovom metrikom je na svakom tangencijalnom prostoru T_pM odredjen skalarni produkt.

Mnogostrukost sa Riemannovom metrikom, (M, g), naziva se *Riemannova mnogostrukost*.

Riemannova geometrija je proučavanje svojstava Riemannovih mnogostrukosti.

Dakle, Riemannovom metrikom je na svakom tangencijalnom prostoru T_pM odredjen skalarni produkt.

Mnogostrukost sa Riemannovom metrikom, (M, g), naziva se *Riemannova mnogostrukost*.

Riemannova geometrija je proučavanje svojstava Riemannovih mnogostrukosti.

Geometrijska svojstva od M koja ovise samo o g nazivaju se *intrinzičnim*, *unutrašnjim* ili *metričkim* svojstvima.

Dakle, Riemannovom metrikom je na svakom tangencijalnom prostoru T_pM odredjen skalarni produkt.

Mnogostrukost sa Riemannovom metrikom, (M, g), naziva se *Riemannova mnogostrukost*.

Riemannova geometrija je proučavanje svojstava Riemannovih mnogostrukosti.

Geometrijska svojstva od M koja ovise samo o g nazivaju se *intrinzičnim*, *unutrašnjim* ili *metričkim* svojstvima.

Često pišemo

$$g_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle_g,$$

za $X, Y \in T_pM$.

Neka su (x^i) glatke lokalne koordinate na M. Tada Riemannovu metriku možemo zapisati kao

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

gdje je (g_{ij}) simetrična, pozitivno definitna matrica glatkih funkcija, $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$.

Neka su (x^i) glatke lokalne koordinate na M. Tada Riemannovu metriku možemo zapisati kao

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

gdje je (g_{ij}) simetrična, pozitivno definitna matrica glatkih funkcija, $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$.

Koristeći simetrični produkt za tenzore, g možemo pisati kao

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (g_{ij} dx^i \otimes dx^j + g_{ij} dx^i \otimes dx^j)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (g_{ij} dx^i \otimes dx^j + g_{ij} dx^j \otimes dx^i) = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j.$$

Primjer.

Euklidska metrika $\bar{g}$ na $\mathbf{R}^n$ u standardnim koordinatama definirana je kao

$$\bar{g} = \sum_{i,j} \delta_{ij} dx^i dx^j.$$

Primjer.

Euklidska metrika $\bar{g}$ na $\mathbf{R}^n$ u standardnim koordinatama definirana je kao

$$\bar{g} = \sum_{i,j} \delta_{ij} dx^i dx^j .$$

A poz. def

$\langle x | y \rangle = (Ax | y)$

Drugačije zapisano,

$$\bar{g} = (dx^1)^2 + \cdots (dx^n)^2$$

ili

$$(\bar{g}_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} .$$

Primjer.

Euklidska metrika $\bar{g}$ na $\mathbf{R}^n$ u standardnim koordinatama definirana je kao

$$\bar{g} = \sum_{i,j} \delta_{ij} dx^i dx^j.$$

Drugačije zapisano,

$$\bar{g} = (dx^1)^2 + \cdots (dx^n)^2$$

ili

$$(\bar{g}_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Primijenimo li $\bar{g}$ na vektore $v, w \in T_p\mathbf{R}^n$ dobivamo

$$\bar{g}_p(v, w) = \sum_{i,j} \delta_{ij} v^i w^j = \sum_{i=1}^{n} v^i w^i = v \cdot w.$$

Primjer – promjena koordinata.

Odredimo koordinatni zapis euklidske metrike na $\mathbf{R}^2$, $\bar{g} = dx^2 + dy^2$, u polarnim koordinatama (r, φ). Znamo $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Primjer – promjena koordinata.

Odredimo koordinatni zapis euklidske metrike na $\mathbf{R}^2$, $\bar{g} = dx^2 + dy^2$, u polarnim koordinatama (r, φ). Znamo $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Imamo

$$\begin{aligned} \bar{g} &= dx^2 + dy^2 = d(r\cos\varphi)^2 + d(r\sin\varphi)^2 \\ &= (\cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi)^2 + (\sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi)^2 \\ &= dr^2 + r^2 d\varphi^2. \end{aligned}$$

Primjer – promjena koordinata.

Odredimo koordinatni zapis euklidske metrike na $\mathbf{R}^2$, $\bar{g} = dx^2 + dy^2$, u polarnim koordinatama (r, φ). Znamo $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Imamo

$$\begin{aligned} \bar{g} &= dx^2 + dy^2 = d(r\cos\varphi)^2 + d(r\sin\varphi)^2 \\ &= (\cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi)^2 + (\sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi)^2 \\ &= dr^2 + r^2 d\varphi^2. \end{aligned}$$

Dakle

$$\bar{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Propozicija

Na svakoj se glatkoj mnogostrukosti može definirati Riemannova metrika.

Dokaz

Neka je $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ otvoren pokrivač za M koordinatnim kartama i neka je ψ_α glatka particija jedinica podredjena tom pokrivaču.

Dokaz

Neka je $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ otvoren pokrivač za M koordinatnim kartama i neka je ψ_α glatka particija jedinica podredjena tom pokrivaču.

Definirajmo na U_α

$$g_\alpha(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}) = \delta_{kl}.$$

Dokaz

Neka je $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ otvoren pokrivač za M koordinatnim kartama i neka je ψ_α glatka particija jedinica podredjena tom pokrivaču.

Definirajmo na U_α

$$g_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) = \delta_{kl}.$$

Sada je Riemannova metrika na M dana sa

$$g = \sum_\alpha \psi_\alpha g_\alpha.$$

Dokaz - nastavak

Kako je prethodna suma konačna u okolini svake točke, prethodnim je izrazom dobro definirano glatko kovarijatno tenzorsko polje.

Dokaz - nastavak

Kako je prethodna suma konačna u okolini svake točke, prethodnim je izrazom dobro definirano glatko kovarijatno tenzorsko polje.

Ono je očito simetrično, a pozitivna definitnost izlazi iz sljedećeg: neka je $X \in T_pM$, $X \neq 0$,

$$g_p(X, X) = \sum_\alpha \psi_\alpha(p) g_\alpha|_p(X, X).$$

Dokaz - nastavak

Kako je prethodna suma konačna u okolini svake točke, prethodnim je izrazom dobro definirano glatko kovarijatno tenzorsko polje.

Ono je očito simetrično, a pozitivna definitnost izlazi iz sljedećeg: neka je $X \in T_pM$, $X \neq 0$,

$$g_p(X,X) = \sum_{\alpha} \psi_\alpha(p) g_\alpha|_p(X,X).$$

Budući da je $g_\alpha|_p(X,X) > 0$ za svaki α, te da je $\psi_\alpha \geq 0$ za svaki α i postoji $\psi_\alpha > 0$, slijedi da je $g_p(X,X) > 0$. $\square$

Uvodjenjem Riemannove metrike, u mogućnosti smo odredjivati duljinu (normu) tangencijalnog vektora i kut izmedju dva tangencijalna vektora.

Uvodjenjem Riemannove metrike, u mogućnosti smo odredjivati duljinu (normu) tangencijalnog vektora i kut izmedju dva tangencijalna vektora.

Neka je $X \in T_pM$, tada je duljina (norma) od X

$$|X|_g = g(X, X)^{1/2} = \langle X, X \rangle_g^{1/2}.$$

Uvodjenjem Riemannove metrike, u mogućnosti smo odredjivati duljinu (normu) tangencijalnog vektora i kut izmedju dva tangencijalna vektora.

Neka je $X \in T_pM$, tada je duljina (norma) od X

$$|X|_g = g(X,X)^{1/2} = \langle X,X\rangle_g^{1/2}.$$

Neka su $X, Y \in T_pM$, tada je mjera kuta izmedju njih jedinstveni $\theta \in [0,\pi]$ takav da je

$$\cos\theta = \frac{\langle X,Y\rangle_g}{|X|_g|Y|_g}.$$

Uvodjenjem Riemannove metrike, u mogućnosti smo odredjivati duljinu (normu) tangencijalnog vektora i kut izmedju dva tangencijalna vektora.

Neka je $X \in T_pM$, tada je duljina (norma) od X

$$|X|_g = g(X, X)^{1/2} = \langle X, X \rangle_g^{1/2}.$$

Neka su $X, Y \in T_pM$, tada je mjera kuta izmedju njih jedinstveni $\theta \in [0, \pi]$ takav da je

$$\cos\theta = \frac{\langle X, Y \rangle_g}{|X|_g |Y|_g}.$$

Za dva vektora $X, Y \in T_pM$ kažemo da su *ortogonalni* ako je $\langle X, Y \rangle_g = 0$.

Primjer – Riemannova podmnogostrukost

Neka je (M, g) Riemannova mnogostrukost, $S \subset M$ imerzirana podmnogostrukost. Definiramo glatko, simetrično 2-kovarijantno tenzorsko polje $g|_S$ na S kao $g|_S = i^* g$, gdje je $i : S \hookrightarrow M$ inkluzija.

Primjer – Riemannova podmnogostrukost

Neka je (M, g) Riemannova mnogostrukost, $S \subset M$ imerzirana podmnogostrukost. Definiramo glatko, simetrično 2-kovarijantno tenzorsko polje $g|_S$ na S kao $g|_S = i^* g$, gdje je $i : S \hookrightarrow M$ inkluzija.

Po definiciji to znači

$$g|_S(X, Y) = i^* g(X, Y) = g(i_* X, i_* Y) = g(X, Y).$$

Dakle $g|_S$ je upravo restrikcija od g na tangencijalne vektore od S.

Primjer – Riemannova podmnogostrukost

Neka je (M, g) Riemannova mnogostrukost, $S \subset M$ imerzirana podmnogostrukost. Definiramo glatko, simetrično 2-kovarijantno tenzorsko polje $g|_S$ na S kao $g|_S = i^*g$, gdje je $i : S \hookrightarrow M$ inkluzija.

Po definiciji to znači

$$g|_S(X, Y) = i^*g(X, Y) = g(i_*X, i_*Y) = g(X, Y).$$

Dakle $g|_S$ je upravo restrikcija od g na tangencijalne vektore od S.

Kako je restrikcija skalarnog produkta na vektore iz T_pS opet pozitivno definitna, to $g|_S$ definira Riemannovu metriku na S – nazivamo ju *induciranom metrikom*. S tom metrikom, podmnogostrukost S nazivamo *Riemannovom podmnogostrukošću*.

Neka je (M, g) Riemannova mnogostrukost, $S \subset M$ Riemannova podmnogostrukost.

Neka je (M, g) Riemannova mnogostrukost, $S \subset M$ Riemannova podmnogostrukost.

Za vektor $N \in T_pM$ kažemo da je *normalan na S* ako je N ortogonalan na T_pS s obzirom na g.

Neka je (M, g) Riemannova mnogostrukost, $S \subset M$ Riemannova podmnogostrukost.

Za vektor $N \in T_pM$ kažemo da je *normalan na* S ako je N ortogonalan na T_pS s obzirom na g.

Skup $N_pS \subset T_pM$ svih normalnih vektora na S u p je potprostor od T_pM. Naziva se *normalnim prostorom* od S u p.

Neka je (M, g) Riemannova mnogostrukost, $S \subset M$ Riemannova podmnogostrukost.

Za vektor $N \in T_pM$ kažemo da je *normalan na* S ako je N ortogonalan na T_pS s obzirom na g.

Skup $N_pS \subset T_pM$ svih normalnih vektora na S u p je potprostor od T_pM. Naziva se *normalnim prostorom* od S u p.

Normalni svežanj definiramo kao

$$NS = \coprod_{p \in S} N_pS.$$

Primjer – Sfera S^n

Inducirani metriku metrike $\bar{g}$ na sferi $S^n \hookrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$, označavamo $\overset{\circ}{g}$,

$$\overset{\circ}{g} = \bar{g}|_{S^n}$$

i nazivamo *okruglom metrikom*.

Primjer – Riemannova metrika podmnogostrukosti preko parametrizacije

Neka je $U \subset \mathbf{R}^n$ otvoren skup i $M \subset \mathbf{R}^{n+1}$ graf glatke funkcije $f : U \to \mathbf{R}$.

Primjer – Riemannova metrika podmnogostrukosti preko parametrizacije

Neka je $U \subset \mathbf{R}^n$ otvoren skup i $M \subset \mathbf{R}^{n+1}$ graf glatke funkcije $f : U \to \mathbf{R}$.

Tada je preslikavanje

$$X : U \to \mathbf{R}^{n+1}, \;\; X(u^1, \ldots, u^n) = (u^1, \ldots, u^n, f(u))$$

glatka globalna parametrizacija od M.

Primjer – Riemannova metrika podmnogostrukosti preko parametrizacije

Neka je $U \subset \mathbf{R}^n$ otvoren skup i $M \subset \mathbf{R}^{n+1}$ graf glatke funkcije $f : U \to \mathbf{R}$.

Tada je preslikavanje

$$X : U \to \mathbf{R}^{n+1}, \;\; X(u^1, \ldots, u^n) = (u^1, \ldots, u^n, f(u))$$

glatka globalna parametrizacija od M.

Odredimo induciranu metriku od M (kao podmnogostrukosti u $\mathbf{R}^{n+1}$) u tim koordinatama

$$X^*\bar{g} = X^*((dx^1)^2 + \cdots (dx^{n+1})^2) = (du^1)^2 + \cdots (du^n)^2 + df^2.$$

Specijalno, metrika gornje polusfere S^2 parametrizirane s

$$X : \mathbf{B}^2 \to \mathbf{R}^3, \;\; X(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$$

dana je s

$$\overset{\circ}{g} = X^*\bar{g} = du^2 + dv^2 + \left(\frac{udu + vdv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right)^2.$$

Sferu S^2_R radijusa R možemo parametrizirati i na sljedeći način:

$$X : U \to \mathbf{R}^3, \quad U = \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$$

$$X(\varphi, \theta) = R(\cos\varphi\cos\theta, \sin\varphi\cos\theta, \sin\theta).$$

Sferu S^2_R radijusa R možemo parametrizirati i na sljedeći način:

$$X : U \to \mathbf{R}^3, \quad U = \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$$

$$X(\varphi, \theta) = R(\cos\varphi\cos\theta, \sin\varphi\cos\theta, \sin\theta).$$

Tada je

$$\begin{aligned} \mathring{g} &= d(R\cos\varphi\cos\theta)^2 + d(R\sin\varphi\cos\theta)^2 + d(R\sin\theta)^2 \\ &= R^2\cos^2\theta(d\varphi)^2 + R^2(d\theta)^2. \end{aligned}$$

Primjer – Prva fundamentalna forma za plohe u $\mathbf{R}^3$.

Neka je $X : U \to S$ lokalna parametrizacija plohe S, $X = X(u, v)$.
Tada su X_u, X_v tangencijalni vektori plohe.

Primjer – Prva fundamentalna forma za plohe u $\mathbf{R}^3$.

Neka je $X : U \to S$ lokalna parametrizacija plohe S, $X = X(u, v)$.
Tada su X_u, X_v tangencijalni vektori plohe.

Uvodimo

$$E = X_u \cdot X_u, \quad F = X_u \cdot X_v, \quad G = X_v \cdot X_v.$$

Primjer – Prva fundamentalna forma za plohe u $\mathbf{R}^3$.

Neka je $X : U \to S$ lokalna parametrizacija plohe S, $X = X(u, v)$.
Tada su X_u, X_v tangencijalni vektori plohe.

Uvodimo

$$E = X_u \cdot X_u, \quad F = X_u \cdot X_v, \quad G = X_v \cdot X_v.$$

Pišemo

$$g = (ds)^2 = E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2$$

ili

$$g = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Primjer – Produktna metrika

Neka su (M_1, g_1), (M_2, g_2) dvije Riemannove mnogostrukosti.

Primjer – Produktna metrika

Neka su (M_1, g_1), (M_2, g_2) dvije Riemannove mnogostrukosti.

Tada produkt $M_1 \times M_2$ ima prirodno definiranu Riemannovu metriku $g = g_1 \otimes g_2$

$$g(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2) = g_1(X_1, Y_1) + g_2(X_2, Y_2),$$

gdje su $X_i, Y_i \in T_{p_i}M_i$, uz identifikaciju $T_{(p_1,p_2)}(M_1 \times M_2) = T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2$.

U lokalnim koordinatama $(x^1, \ldots, x^n)$ za M_1 i $(x^{n+1}, \ldots, x^{n+m})$ za M_2, prikaz od g je $g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j$, gdje je

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} (g_1)_{ij} & 0 \\ 0 & (g_2)_{ij} \end{pmatrix}.$$

U lokalnim koordinatama $(x^1, \ldots, x^n)$ za M_1 i $(x^{n+1}, \ldots, x^{n+m})$ za M_2, prikaz od g je $g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j$, gdje je

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} (g_1)_{ij} & 0 \\ 0 & (g_2)_{ij} \end{pmatrix}.$$

Specijalno, za torus $T^2 = S^1 \times S^1$ produktna metrika glasi

$$g = (d\varphi)^2 + (d\theta)^2,$$

što je euklidska metrika u koordinatama (φ, θ).

U lokalnim koordinatama $(x^1, \ldots, x^n)$ za M_1 i $(x^{n+1}, \ldots, x^{n+m})$ za M_2, prikaz od g je $g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j$, gdje je

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} (g_1)_{ij} & 0 \\ 0 & (g_2)_{ij} \end{pmatrix}.$$

Specijalno, za torus $T^2 = S^1 \times S^1$ produktna metrika glasi

$$g = (d\varphi)^2 + (d\theta)^2,$$

što je euklidska metrika u koordinatama (φ, θ).

Pritom je metrika na $S^1 \subset \mathbf{R}^2$ inducirana metrika $g = d\varphi^2$.

Pseudo-Riemannova metrika

Kovarijantni 2-tenzor g na n-dimenzionalnom vektorskom prostoru V nazivamo *nedegeneriranim* ako je $g(X, Y) = 0$ za svaki $Y \in V$ ako i samo ako je $X = 0$.

Pseudo-Riemannova metrika

Kovarijantni 2-tenzor g na n-dimenzionalnom vektorskom prostoru V nazivamo *nedegeneriranim* ako je $g(X, Y) = 0$ za svaki $Y \in V$ ako i samo ako je $X = 0$.

Odgovarajućim izborom baze za V, nedegenerirani simetrični 2-tenzor ima za matrični prikaz dijagonalnu matricu kojoj su elementi dijagonale $-1, 1$.

Pseudo-Riemannova metrika

Kovarijantni 2-tenzor g na n-dimenzionalnom vektorskom prostoru V nazivamo *nedegeneriranim* ako je $g(X, Y) = 0$ za svaki $Y \in V$ ako i samo ako je $X = 0$.

Odgovarajućim izborom baze za V, nedegenerirani simetrični 2-tenzor ima za matrični prikaz dijagonalnu matricu kojoj su elementi dijagonale $-1, 1$.

Broj pozitivnih i negativnih elemenata dijagonale ne ovisi o izboru baze (*Sylvesterov teorem o inerciji*).

Pseudo-Riemannova metrika

Kovarijantni 2-tenzor g na n-dimenzionalnom vektorskom prostoru V nazivamo *nedegeneriranim* ako je $g(X, Y) = 0$ za svaki $Y \in V$ ako i samo ako je $X = 0$.

Odgovarajućim izborom baze za V, nedegenerirani simetrični 2-tenzor ima za matrični prikaz dijagonalnu matricu kojoj su elementi dijagonale $-1, 1$.

Broj pozitivnih i negativnih elemenata dijagonale ne ovisi o izboru baze (*Sylvesterov teorem o inerciji*).

Signatura od g je par $(p, n-p)$, gdje je p broj pozitivnih predznaka, a $n-p$ broj negativnih predznaka u bilo kojem matričnom prikazu.

Pseudo-Riemannova metrika na M je glatko simetrično 2-tenzorsko polje g koje je nedegenerirano u svakoj točki.

Pseudo-Riemannova metrika na M je glatko simetrično 2-tenzorsko polje g koje je nedegenerirano u svakoj točki.

Pseudo-Riemannova metrika sa signaturom $(n-1,1)$ (ponekad: $(-1,1,\ldots 1)$) naziva se Lorentzovom (Minkowski – Lorentzovom) metrikom.

Pseudo-Riemannova metrika na M je glatko simetrično 2-tenzorsko polje g koje je nedegenerirano u svakoj točki.

Pseudo-Riemannova metrika sa signaturom $(n-1, 1)$ (ponekad: $(-1, 1, \ldots 1)$) naziva se Lorentzovom (Minkowski – Lorentzovom) metrikom.

Općenito, glatka mnogostrukost ne mora dopuštati postojanje Lorentzove metrike.

Pseudo-Riemannova metrika na M je glatko simetrično 2-tenzorsko polje g koje je nedegenerirano u svakoj točki.

Pseudo-Riemannova metrika sa signaturom $(n-1,1)$ (ponekad: $(-1,1,\ldots 1)$) naziva se Lorentzovom (Minkowski – Lorentzovom) metrikom.

Općenito, glatka mnogostrukost ne mora dopuštati postojanje Lorentzove metrike.

Primjer: Na $\mathbf{R}^{n+1}$ nedegeneriran simetrični 2-tenzor (pseudo-skalarni produkt) je

$$m = (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 - (x^{n+1})^2.$$

Izometrije

Neka su (M, g) i $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Riemannove mnogostrukosti. Glatko preslikavanje $F : M \to N$ naziva se *izometrijom* ako je difeomorfizam za koji vrijedi

$$F^* \tilde{g} = g.$$

Izometrije

Neka su (M, g) i $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Riemannove mnogostrukosti. Glatko preslikavanje $F : M \to N$ naziva se *izometrijom* ako je difeomorfizam za koji vrijedi

$$F^* \tilde{g} = g.$$

Ako postoji *izometrija* izmedju M i $\tilde{M}$, kažemo da su mnogostrukosti M i $\tilde{M}$ *izometrične*.

Izometrije

Neka su (M, g) i $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Riemannove mnogostrukosti. Glatko preslikavanje $F : M \to N$ naziva se *izometrijom* ako je difeomorfizam za koji vrijedi

$$F^* \tilde{g} = g \, .$$

Ako postoji *izometrija* izmedju M i $\tilde{M}$, kažemo da su mnogostrukosti M i $\tilde{M}$ *izometrične*.

Općenitije, F nazivamo *lokalnom izometrijom*, ako svaka točka $p \in M$ ima okolinu takvu da je $F|_U$ izometrija sa U na otvoren podskup od $\tilde{M}$.

Riemannovu metriku nazivamo *plosnatom*, ako svaka točka $p \in M$ ima okolinu $U \subset M$ takvu da je $(U, g|_U)$ izometrično sa otvorenim podskupom od $\mathbf{R}^n$ s euklidskom metrikom.

Riemannovu metriku nazivamo *plosnatom*, ako svaka točka $p \in M$ ima okolinu $U \subset M$ takvu da je $(U, g|_U)$ izometrično sa otvorenim podskupom od $\mathbf{R}^n$ s euklidskom metrikom.

Riemannova geometrija je proučavanje svojstava Riemannovih mnogostrukosti invarijantnih na izometrije.

Riemannovu metriku nazivamo *plosnatom*, ako svaka točka $p \in M$ ima okolinu $U \subset M$ takvu da je $(U, g|_U)$ izometrično sa otvorenim podskupom od $\mathbf{R}^n$ s euklidskom metrikom.

Riemannova geometrija je proučavanje svojstava Riemannovih mnogostrukosti invarijantnih na izometrije.

Neka je $F : M \to M$ izometrija. Kompozicija izometrija od M i inverz izometrije je ponovno izometrija, stoga skup svih izometrija od M čini grupu koju nazivamo *grupom izometrija* (*simetrija*) od M.

Riemannova mnogostrukost kao metrički prostor

Neka je $c : I \to M$ *dopustiva krivulja* (po dijelovima glatka regularna krivulja).

Riemannova mnogostrukost kao metrički prostor

Neka je $c : I \to M$ *dopustiva krivulja* (po dijelovima glatka regularna krivulja).

Duljinu luka krivulje c definiramo kao

$$L(c) = \int_I ||\dot{c}(t)||dt.$$

Riemannova mnogostrukost kao metrički prostor

Neka je $c : I \to M$ *dopustiva krivulja* (po dijelovima glatka regularna krivulja).

Duljinu luka krivulje c definiramo kao

$$L(c) = \int_I ||\dot{c}(t)||dt.$$

Definiramo Riemannovu udaljenost $d(p, q)$ na M kao infimum duljina svih dopustivih krivulja od p do q.

Riemannova mnogostrukost kao metrički prostor

Neka je $c : I \to M$ *dopustiva krivulja* (po dijelovima glatka regularna krivulja).

Duljinu luka krivulje c definiramo kao

$$L(c) = \int_I ||\dot{c}(t)||dt.$$

Definiramo Riemannovu udaljenost $d(p, q)$ na M kao infimum duljina svih dopustivih krivulja od p do q.

Na povezanoj Riemannovoj mnogostrukosti, d predstavlja metriku i vrijedi da je topologija inducirana tom metrikom jednaka topologiji mnogostrukosti M.

Volumna forma

Propozicija

Na orijentiranoj Riemannovoj n-mnogostrukosti (M, g) *postoji jedinstvena n-forma* dV *koja zadovoljava*

$$dV(E_1, \dots, E_n) = 1$$

gdje je $(E_1, \dots, E_n)$ *orijentirana ortonormirana baza tangencijalnog prostora* T_pM.

n-formu dV nazivamo *Riemannovom volumnom formom*.

n-formu dV nazivamo *Riemannovom volumnom formom.*

Može se pokazati da je u koordinatama dana s

$$dV = \sqrt{\det(g_{ij})}\varphi^1 \wedge \ldots \wedge \varphi^n,$$

gdje je $g_{ij} = g(E_i, E_j)$, $\{\varphi^i\}$ dualna baza za $(E_1, \ldots, E_n)$.

Prostorne forme

Euklidski prostor je vektorski prostor $\mathbf{R}^n$ s euklidskim skalarnim produktom

$$\bar{g}(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} X^i Y^i.$$

Prostorne forme

Euklidski prostor je vektorski prostor $\mathbf{R}^n$ s euklidskim skalarnim produktom

$$\bar{g}(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} X^i Y^i.$$

Neka je V neki unitarni n-dimenzionalni prostor (sa skalarnim produktom $\langle\ ,\ \rangle$), $(E_1, \ldots, E_n)$ ONB za V, $X = \sum_{i=1}^{n} X^i E_i$.

Prostorne forme

Euklidski prostor je vektorski prostor $\mathbf{R}^n$ s euklidskim skalarnim produktom

$$\bar{g}(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} X^i Y^i.$$

Neka je V neki unitarni n-dimenzionalni prostor (sa skalarnim produktom $\langle\ ,\ \rangle$), $(E_1,\dots,E_n)$ ONB za V, $X = \sum_{i=1}^n X^i E_i$.

Preslikavanje $(X^1,\dots,X^n) \mapsto \sum_{i=1}^n X^i E_i$, je izometrija izmedju $(\mathbf{R}^n, \bar{g})$ i (V, g), gdje je $g(X,Y) = \langle X, Y\rangle$, $X, Y \in T_pV \cong V$.

Sfera

Sfera S^n_R je Riemannova mnogostrukost s okruglom metrikom $\mathring{g}_R$ radijusa R.

Sfera

Sfera S_R^n je Riemannova mnogostrukost s okruglom metrikom $\overset{\circ}{g}_R$ radijusa R.

Ortogonalna grupa $O(n+1, \mathbf{R})$ čuva sferu i euklidsku metriku, stoga restrikcija na S_R^n djeluje izometrijama.

Propozicija

Ako su dane dvije točke $p, q \in S^n_R$ *i ortonormirane baze* $\{E_i\}$ *za* $T_pS^n_R$, $\{\tilde{E}_i\}$ *za* $T_qS^n_R$, *tada postoji* $\varphi \in O(n+1, \mathbf{R})$ *takav da je*

$$\varphi(p) = q, \qquad \varphi_* E_i = \tilde{E}_i.$$

Dokaz

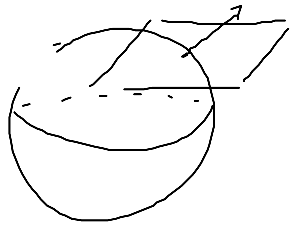
Dovoljno je pokazati da za danu točku $p \in S^n_R$ i ONB $\{E_i\}$ za $T_pS^n_R$, postoji ortogonalan operator koji preslikava "sjeverni pol" $N = (0, \dots, 0, R)$ u točku p i standardnu bazu $\frac{\partial}{\partial x^i}$ u zadanu bazu $\{E_i\}$.

Dokaz

Dovoljno je pokazati da za danu točku $p \in S^n_R$ i ONB $\{E_i\}$ za $T_p S^n_R$, postoji ortogonalan operator koji preslikava "sjeverni pol" $N = (0, \ldots, 0, R)$ u točku p i standardnu bazu $\frac{\partial}{\partial x^i}$ u zadanu bazu $\{E_i\}$.

Neka je $p \in \mathbf{R}^{n+1}$ norme R, $\tilde{p} = p/R$ odgovarajući normirani vektor.

Dokaz



Dovoljno je pokazati da za danu točku $p \in S^n_R$ i ONB $\{E_i\}$ za $T_pS^n_R$, postoji ortogonalan operator koji preslikava "sjeverni pol" $N = (0, \dots, 0, R)$ u točku p i standardnu bazu $\frac{\partial}{\partial x^i}$ u zadanu bazu $\{E_i\}$.

Neka je $p \in \mathbf{R}^{n+1}$ norme R, $\tilde{p} = p/R$ odgovarajući normirani vektor.

Vektori $\{E_1, \dots, E_n, \tilde{p}\}$ čine ONB za $\mathbf{R}^{n+1}$.

Dokaz - nastavak

Neka je $A \in M_{n+1}(\mathbf{R})$ matrica kojoj su stupci koordinate tih vektora.

Dokaz - nastavak

Neka je $A \in M_{n+1}(\mathbf{R})$ matrica kojoj su stupci koordinate tih vektora.

Tada je $A \in O(n+1, \mathbf{R})$ i djelovanjem A na vektore kanonske baze od $\mathbf{R}^{n+1}$ dobivamo $\{E_1, \dots, E_n, \tilde{p}\}$.

$\langle Ax | Ay \rangle = \langle x | y \rangle$

$\langle A^t A x | y \rangle = \langle x | y \rangle$

$A^t A = I$

stupci od A čine ONB

Dokaz - nastavak

Neka je $A \in M_{n+1}(\mathbf{R})$ matrica kojoj su stupci koordinate tih vektora.

Tada je $A \in O(n+1, \mathbf{R})$ i djelovanjem A na vektore kanonske baze od $\mathbf{R}^{n+1}$ dobivamo $\{E_1, \ldots, E_n, \tilde{p}\}$.

Posebno, $A(0, \ldots 0, R) = p$.

Dokaz - nastavak

Neka je $A \in M_{n+1}(\mathbf{R})$ matrica kojoj su stupci koordinate tih vektora.

Tada je $A \in O(n+1, \mathbf{R})$ i djelovanjem A na vektore kanonske baze od $\mathbf{R}^{n+1}$ dobivamo $\{E_1, \ldots, E_n, \tilde{p}\}$.

Posebno, $A(0, \ldots 0, R) = p$.

Nadalje, kako A djeluje linearno na $\mathbf{R}^{n+1}$, matrični prikaz *push-forward*-a od A u paru odgovarajućih baza je ponovo A, dakle

$$A_* \frac{\partial}{\partial x^i} = E_i, \;\; i = 1, \ldots, n.$$

$\square$

Dokaz - nastavak

Neka je $A \in M_{n+1}(\mathbf{R})$ matrica kojoj su stupci koordinate tih vektora.

Tada je $A \in O(n+1, \mathbf{R})$ i djelovanjem A na vektore kanonske baze od $\mathbf{R}^{n+1}$ dobivamo $\{E_1, \dots, E_n, \tilde{p}\}$.

Posebno, $A(0, \dots 0, R) = p$.

Nadalje, kako A djeluje linearno na $\mathbf{R}^{n+1}$, matrični prikaz *push-forward*-a od A u paru odgovarajućih baza je ponovo A, dakle

$$A_* \frac{\partial}{\partial x^i} = E_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

$\square$

Kažemo da $O(n+1)$ djeluje *tranzitivno* na ortonormirane baze na S^n_R.

Napomena.

Djelovanje grupe G na mnogostrukost je preslikavanje sa $G \times M$ u M, $(g, p) \mapsto g \cdot p$, koje zadovoljava

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot p) = (g_1 g_2) \cdot p, \quad g_1, g_2 \in G, \quad p \in M,$$

$$e \cdot p = p, \quad p \in M.$$

Napomena.

Djelovanje grupe G na mnogostrukost je preslikavanje sa $G \times M$ u M, $(g, p) \mapsto g \cdot p$, koje zadovoljava

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot p) = (g_1 g_2) \cdot p, \quad g_1, g_2 \in G, \quad p \in M,$$

$$e \cdot p = p, \quad p \in M.$$

Djelovanje je *tranzitivno* ako za svake dvije točke $p, q \in M$ postoji $g \in G$ takav da je $g \cdot p = q$.

Riemannovu mnogostrukost nazivamo *homogenom* ako dopušta djelovanje Liejeve grupe (izometrijama) koje je glatko i tranzitivno.

Riemannovu mnogostrukost nazivamo *homogenom* ako dopušta djelovanje Liejeve grupe (izometrijama) koje je glatko i tranzitivno.

Riemannovu mnogostrukost nazivamo *izotropnom* ako podgrupa izotropije $G_p = \{g \in G : g \cdot p = p\}$ djeluje tranzitivno na skup jediničnih vektora u T_pM (gdje $g \in G_p$ djeluje na T_pM kao g_*).

Riemannovu mnogostrukost nazivamo *homogenom* ako dopušta djelovanje Liejeve grupe (izometrijama) koje je glatko i tranzitivno.

Riemannovu mnogostrukost nazivamo *izotropnom* ako podgrupa izotropije $G_p = \{g \in G : g \cdot p = p\}$ djeluje tranzitivno na skup jediničnih vektora u T_pM (gdje $g \in G_p$ djeluje na T_pM kao g_*).

Prethodnom propozicijom je dokazano da je sfera S^n_R homogena i izotropna Riemannova mnogostrukost.

$G/G_p \longrightarrow M$ bijekcija

kvoc. skup $\quad gG_p \longmapsto g \cdot p$ (p fiksiran)

Za metrike g_1, g_2 na mnogostrukosti M kažemo da su *konformne* ako postoji pozitivna funkcija $f \in C^\infty(M)$ tako da vrijedi

$$g_2 = fg_1.$$

Za metrike g_1, g_2 na mnogostrukosti M kažemo da su *konformne* ako postoji pozitivna funkcija $f \in C^\infty(M)$ tako da vrijedi

$$g_2 = fg_1.$$

Dvije Riemannove mnogostrukosti (M, g), $(\tilde{M}, \tilde{g})$ su *konformno ekvivalentne* ako postoji difeomorfizam $\varphi : M \to \tilde{M}$ tako da je $\varphi_* \tilde{g}$ konformno sa g.

Za metrike g_1, g_2 na mnogostrukosti M kažemo da su *konformne* ako postoji pozitivna funkcija $f \in C^\infty(M)$ tako da vrijedi

$$g_2 = fg_1.$$

Dvije Riemannove mnogostrukosti (M, g), $(\tilde{M}, \tilde{g})$ su *konformno ekvivalentne* ako postoji difeomorfizam $\varphi : M \to \tilde{M}$ tako da je $\varphi_* \tilde{g}$ konformno sa g.

Vrijedi da su dvije metrike konformne ako i samo ako definiraju jednake kutove (ne nužno i jednake duljine).

Pokažimo da postoji konformna ekvivalencija izmedju $\mathbf{R}^n$ i sfere S_R^n bez jedne točke.

Pokažimo da postoji konformna ekvivalencija izmedju $\mathbf{R}^n$ i sfere S^n_R bez jedne točke.

Ostvaruje se stereografskom projekcijom (iz sjevernog pola N)

$$\sigma : S^n_R \setminus \{N\} \to \mathbf{R}^n,$$

gdje je $\sigma(P)$ točka prostora $\mathbf{R}^n$ (hiperravnine u $\mathbf{R}^{n+1}$) u kojoj pravac NP presijeca hiperravninu $\mathbf{R}^n$.

Pokažimo da postoji konformna ekvivalencija izmedju $\mathbf{R}^n$ i sfere S_R^n bez jedne točke.

Ostvaruje se stereografskom projekcijom (iz sjevernog pola N)

$$\sigma : S_R^n \setminus \{N\} \to \mathbf{R}^n,$$

gdje je $\sigma(P)$ točka prostora $\mathbf{R}^n$ (hiperravnine u $\mathbf{R}^{n+1}$) u kojoj pravac NP presijeca hiperravninu $\mathbf{R}^n$.

Ako je $P = (\xi^1, \ldots, \xi^n, \tau) = (\xi, \tau)$, tada je

$$\sigma(P) = U = (u^1, \ldots, u^n, 0) = (u, 0),$$

a hiperravnina $\mathbf{R}^n$ je zadana s $\tau = 0$ u $\mathbf{R}^{n+1}$.

Prema tome, U je odredjena sa $\overrightarrow{NU} = \lambda \overrightarrow{NP}$, za neki λ.

Prema tome, U je odredjena sa $\overrightarrow{NU} = \lambda \overrightarrow{NP}$, za neki λ.

Dobivamo

$$u^i = \lambda \xi^i,$$

$$-R = \lambda(\tau - R).$$

Prema tome, U je odredjena sa $\overrightarrow{NU} = \lambda \overrightarrow{NP}$, za neki λ.

Dobivamo

$$u^i = \lambda \xi^i,$$

$$-R = \lambda(\tau - R).$$

Eliminacijom λ iz druge jednadžbe, dobivamo

$$\sigma(\xi, \tau) = u = \frac{R\xi}{R - \tau}.$$

Prema tome, U je odredjena sa $\overrightarrow{NU} = \lambda \overrightarrow{NP}$, za neki λ.

Dobivamo

$$u^i = \lambda \xi^i,$$

$$-R = \lambda(\tau - R).$$

Eliminacijom λ iz druge jednadžbe, dobivamo

$$\sigma(\xi, \tau) = u = \frac{R\xi}{R - \tau}.$$

Očito je σ glatko preslikavanje na $S^n_R \setminus \{N\}$. Da bismo pokazali da je difeomorfizam, odredimo mu inverz

$$\xi^i = \frac{u^i}{\lambda}, \;\; \tau = R\frac{\lambda - 1}{\lambda}.$$

Kako točka inverza leži na sferi, to vrijedi $|\xi|^2 + \tau^2 = R^2$

$$\frac{|u|^2}{\lambda^2} + R^2 \frac{(\lambda - 1)^2}{\lambda^2} = R^2,$$

odakle je

$$\lambda = \frac{|u|^2 + R^2}{2R^2}.$$

Kako točka inverza leži na sferi, to vrijedi $|\xi|^2 + \tau^2 = R^2$

$$\frac{|u|^2}{\lambda^2} + R^2 \frac{(\lambda - 1)^2}{\lambda^2} = R^2,$$

odakle je

$$\lambda = \frac{|u|^2 + R^2}{2R^2}.$$

Sada je

$$\sigma^{-1}(u) = (\xi, \tau) = \left(\frac{2R^2}{|u|^2 + R^2}, R\frac{|u|^2 - R^2}{|u|^2 + R^2} \right),$$

odakle je vidljivo da je σ difeomorfizam.

Propozicija

Stereografska projekcija je konformna ekvivalencija izmedju $S^n_R \setminus \{N\}$ *i* $\mathbf{R}^n$.

Dokaz

Pomoću lokalne parametrizacije $\sigma^{-1} : \mathbf{R}^n \to S^n_R \setminus \{N\}$, odredimo povlak metrike $\overset{\circ}{g}_R$.

Dokaz

Pomoću lokalne parametrizacije $\sigma^{-1} : \mathbf{R}^n \to S^n_R \setminus \{N\}$, odredimo povlak metrike $\overset{\circ}{g}_R$.

Neka je $q \in \mathbf{R}^n$, $V \in T_q\mathbf{R}^n$. Tada po definiciji okrugle metrike vrijedi

$$(\sigma^{-1})^* \overset{\circ}{g}_R (V, V) = \overset{\circ}{g}_R (\sigma_*^{-1} V, \sigma_*^{-1} V) = \bar{g}(\sigma_*^{-1} V, \sigma_*^{-1} V),$$

gdje je $\bar{g}$ euklidska metrika na $\mathbf{R}^{n+1}$.

Dokaz

Pomoću lokalne parametrizacije $\sigma^{-1} : \mathbf{R}^n \to S_R^n \setminus \{N\}$, odredimo povlak metrike $\overset{\circ}{g}_R$.

Neka je $q \in \mathbf{R}^n$, $V \in T_q\mathbf{R}^n$. Tada po definiciji okrugle metrike vrijedi

$$(\sigma^{-1})^* \overset{\circ}{g}_R (V, V) = \overset{\circ}{g}_R (\sigma_*^{-1} V, \sigma_*^{-1} V) = \bar{g}(\sigma_*^{-1} V, \sigma_*^{-1} V),$$

gdje je $\bar{g}$ euklidska metrika na $\mathbf{R}^{n+1}$.

Ako pišemo $V = \sum_i V^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, $\sigma^{-1}(u) = (\xi(u), \tau(u))$, tada je

$$\sigma_*^{-1} V = \sum_{i,j} V^i \frac{\partial \xi^j}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial \xi^j} + \sum_i V^i \frac{\partial \tau}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial \tau}$$

$$= \sum_j V\xi^j \frac{\partial}{\partial \xi^j} + V\tau \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Dokaz - nastavak

Nadalje je

$$V\xi^j = V\Big(\frac{2R^2u^j}{|u|^2+R^2}\Big) = \frac{2R^2V^j}{|u|^2+R^2} - \frac{4R^2u^j\langle V, u\rangle}{(|u|^2+R^2)^2},$$

$$V\tau = V\Big(R\frac{|u|^2-R^2}{|u|^2+R^2}\Big) = \frac{2R\langle V, u\rangle}{|u|^2+R^2} - \frac{2R(|u|^2-R^2)\langle V, u\rangle}{(|u|^2+R^2)^2} = \frac{4R^3\langle V,}{(|u|^2+R}$$

gdje smo označili $V(|u|^2) = 2\sum_k V^k u^k = 2\langle V, u\rangle$.

Dokaz - nastavak

Nadalje je

$$V\xi^j = V(\frac{2R^2u^j}{|u|^2+R^2}) = \frac{2R^2V^j}{|u|^2+R^2} - \frac{4R^2u^j\langle V,u\rangle}{(|u|^2+R^2)^2},$$

$$V\tau = V(R\frac{|u|^2-R^2}{|u|^2+R^2}) = \frac{2R\langle V,u\rangle}{|u|^2+R^2} - \frac{2R(|u|^2-R^2)\langle V,u\rangle}{(|u|^2+R^2)^2} = \frac{4R^3\langle V,u}{(|u|^2+R^2}$$

gdje smo označili $V(|u|^2) = 2\sum_k V^k u^k = 2\langle V,u\rangle$.

Prema tome,

$$(\sigma^{-1})^* \overset{\circ}{g}_R = \frac{4R^4}{(|u|^2+R^2)^2}\bar{g},$$

gdje je $\bar{g}$ euklidska metrika na $\mathbf{R}^n$. $\square$

Dokaz - nastavak

Nadalje je

$$V\xi^j = V\left(\frac{2R^2u^j}{|u|^2+R^2}\right) = \frac{2R^2V^j}{|u|^2+R^2} - \frac{4R^2u^j\langle V,u\rangle}{(|u|^2+R^2)^2},$$

$$V\tau = V\left(R\frac{|u|^2-R^2}{|u|^2+R^2}\right) = \frac{2R\langle V,u\rangle}{|u|^2+R^2} - \frac{2R(|u|^2-R^2)\langle V,u\rangle}{(|u|^2+R^2)^2} = \frac{4R^3\langle V,}{(|u|^2+R}$$

gdje smo označili $V(|u|^2) = 2\sum_k V^k u^k = 2\langle V, u\rangle$.

Prema tome,

$$(\sigma^{-1})^* \overset{\circ}{g}_R = \frac{4R^4}{(|u|^2+R^2)^2}\bar{g},$$

gdje je $\bar{g}$ euklidska metrika na $\mathbf{R}^n$. $\square$

Odavde vidimo da je sfera *lokalno konformno plosnata*.

Hiperbolički prostor

Za svaki $R > 0$ u idućoj propoziciji definiramo *hiperbolički prostor radijusa* R, oznaka $\mathbf{H}^n_R$.

Hiperbolički prostor

Za svaki $R > 0$ u idućoj propoziciji definiramo *hiperbolički prostor radijusa* R, oznaka $\mathbf{H}^n_R$.

Ako je $R = 1$, pripadni prostor nazivamo *hiperboličkim prostorom*, oznaka $\mathbf{H}^n$.

Propozicija

Za zadani $R > 0$ sljedeće su Riemannove mnogostrukosti izometrične:

Propozicija

Za zadani $R > O$ sljedeće su Riemannove mnogostrukosti izometrične:

1. *(**Hiperbolički model**)* $\mathbf{H}_R^n$ *je gornja ploha* $(\tau > 0)$ *dvoplošnog hiperboloida u* $\mathbf{R}^{n+1}$*, danog u koordinatama* $(\xi^n, \ldots, \xi^n, \tau)$ *jednadžbom* $|\tau|^2 - |\xi|^2 = R^2$ *s metrikom*

$$h_R^1 = i^* m,$$

gdje je $i : H_R^n \to \mathbf{R}^{n+1}$ *inkluzija, a* m *metrika Minkowskog* $m = (d\xi^n)^2 + \cdots (d\xi^n)^2 - (d\tau)^2$.

Propozicija - nastavak

2. *(**Poincaré-ov model kugle**)* $\mathbf{B}^n_R$ *je otvorena kugla u* $\mathbf{R}^n$ *s metrikom danom u koordinatama* $(u^1, \ldots, u^n)$

$$h_R^2 = 4R^4 \frac{(du^1)^2 + \cdots + (du^n)^2}{(R^2 - |u|^2)^2}.$$

Propozicija - nastavak

2. *(**Poincaré-ov model kugle**) $\mathbf{B}^n_R$ je otvorena kugla u $\mathbf{R}^n$ s metrikom danom u koordinatama $(u^1, \ldots, u^n)$*

$$h_R^2 = 4R^4 \frac{(du^1)^2 + \cdots + (du^n)^2}{(R^2 - |u|^2)^2}.$$

3. *(**Poincaré-ov model gornjeg poluprostora**) Neka je $\mathbf{U}^n_R$ gornji poluprostor u $\mathbf{R}^n$ definiran u koordinatama $(x^1, \ldots, x^{n-1}, y)$ sa $y > 0$ i s metrikom*

$$h_R^3 = R^2 \frac{(dx^1)^2 + \cdots + (dx^{n-1})^2 + (dy)^2}{y^2}.$$

Dokaz

Difeomorfizam

$$\pi : \mathbf{H}_R^n \to \mathbf{B}_R^n$$

je izomorfizam izmedju metrika iz prvog i drugog dijela tvrdnje definiran na sljedeći način:

Dokaz

Difeomorfizam

$$\pi : \mathbf{H}_R^n \to \mathbf{B}_R^n$$

je izomorfizam izmedju metrika iz prvog i drugog dijela tvrdnje definiran na sljedeći način:

Neka je $S = (0, \ldots, 0, -R)$. Za svaku točku $P = (\xi^n, \ldots, \xi^n, \tau)$ definiramo $\pi(P) = u$, gdje je $U = (u, 0)$ točka u kojoj pravac SP presijeca hiperravninu $\tau = 0$.

Dokaz - nastavak

Preslikavanje π nazivamo *hiperboličkom stereografskom projekcijom*. Kao i kod stereografske projekcije sfere, dobivamo

$$\pi(\xi, \tau) = \frac{R\xi}{R + \tau},$$

$$\pi^{-1}(u) = \left(\frac{2R^2 u}{R^2 - |u|^2}, R\frac{R^2 + |u|^2}{R^2 - |u|^2}\right).$$

Dokaz - nastavak

Preslikavanje π nazivamo *hiperboličkom stereografskom projekcijom*. Kao i kod stereografske projekcije sfere, dobivamo

$$\pi(\xi, \tau) = \frac{R\xi}{R+\tau},$$

$$\pi^{-1}(u) = (\frac{2R^2 u}{R^2 - |u|^2}, R\frac{R^2 + |u|^2}{R^2 - |u|^2}).$$

Treba pokazati $(\pi^{-1})^* h_R^1 = h_R^2$.

Dokaz - nastavak

Preslikavanje π nazivamo *hiperboličkom stereografskom projekcijom*. Kao i kod stereografske projekcije sfere, dobivamo

$$\pi(\xi, \tau) = \frac{R\xi}{R+\tau},$$

$$\pi^{-1}(u) = (\frac{2R^2 u}{R^2 - |u|^2}, R\frac{R^2 + |u|^2}{R^2 - |u|^2}).$$

Treba pokazati $(\pi^{-1})^* h_R^1 = h_R^2$.

Uočimo da odavde takodjer slijedi da je h_R^1 pozitivno definitno.

Dokaz - nastavak

Sada definiramo difeomorfizam

$$\kappa : \mathbf{B}_R^n \to \mathbf{U}_R^n$$

$$\kappa(u,v) = (x,y) = \left(\frac{2R^2 u}{|u|^2 + (v-R)^2}, R\frac{R^2 - |u|^2 - v^2}{|u|^2 + (v-R)^2} \right),$$

$$\kappa^{-1}(x,y) = \left(\frac{2R^2 x}{|x|^2 + (y+R)^2}, R\frac{|x|^2 + |y|^2 - R^2}{|x|^2 + (y+R)^2} \right),$$

gdje je $(u,v) = (u^1, \ldots, u^{n-1}, v)$.

Dokaz - nastavak

Sada definiramo difeomorfizam

$$\kappa : \mathbf{B}_R^n \to \mathbf{U}_R^n$$

$$\kappa(u, v) = (x, y) = \left(\frac{2R^2 u}{|u|^2 + (v - R)^2}, R\frac{R^2 - |u|^2 - v^2}{|u|^2 + (v - R)^2} \right),$$

$$\kappa^{-1}(x, y) = \left(\frac{2R^2 x}{|x|^2 + (y + R)^2}, R\frac{|x|^2 + |y|^2 - R^2}{|x|^2 + (y + R)^2} \right),$$

gdje je $(u, v) = (u^1, \dots, u^{n-1}, v)$.

Treba pokazati $(\kappa^{-1})^* h_R^3 = h_R^2$. $\square$

Uočimo: hiperbolička metrika je lokalno konformno plosnata.

Uočimo: hiperbolička metrika je lokalno konformno plosnata.

Napomena – Simetrije od $\mathbf{H}^n_R$. Označimo sa $O(n,1)$ grupu linearnih operatora na $\mathbf{R}^{n+1}$ koja čuva metriku Minkowskog.

Uočimo: hiperbolička metrika je lokalno konformno plosnata.

Napomena – Simetrije od $\mathbf{H}^n_R$. Označimo sa $O(n,1)$ grupu linearnih operatora na $\mathbf{R}^{n+1}$ koja čuva metriku Minkowskog.

Grupa $O(n,1)$ naziva se *Lorentzovom grupom*. Svaki element grupe $O(n,1)$ čuva i dvoplošni hiperboloid $\{\tau^2 - |\xi|^2 = R^2\}$, a sa $O_+(n,1)$ označujemo podgrupu koja čuva gornju plohu $\tau > 0$.

Uočimo: hiperbolička metrika je lokalno konformno plosnata.

Napomena – Simetrije od $\mathbf{H}_R^n$. Označimo sa $O(n,1)$ grupu linearnih operatora na $\mathbf{R}^{n+1}$ koja čuva metriku Minkowskog.

Grupa $O(n,1)$ naziva se *Lorentzovom grupom*. Svaki element grupe $O(n,1)$ čuva i dvoplošni hiperboloid $\{\tau^2 - |\xi|^2 = R^2\}$, a sa $O_+(n,1)$ označujemo podgrupu koja čuva gornju plohu $\tau > 0$.

Stoga $O_+(n,1)$ čuva $\mathbf{H}_R^n$ i m, te djeluje na $\mathbf{H}_R^n$ izometrijama.

Propozicija

$O_+(n,1)$ *djeluje tranzitivno na skup ortonormiranih baza na* $\mathbf{H}^n_R$. *Stoga je* $\mathbf{H}^n_R$ *homogena i izotropna Riemannova mnogostrukost.*

Koneksija

Cilj: "Povezati" različite tangencijalne prostore mnogostrukosti kako bi se računala usmjerena derivacija vektorskih polja.

Koneksija

Cilj: "Povezati" različite tangencijalne prostore mnogostrukosti kako bi se računala usmjerena derivacija vektorskih polja.

Neka je $\pi : E \to M$ vektorski svežanj na M, $\mathcal{E}(M)$ prostor glatkih prereza od E.

Koneksija

Cilj: "Povezati" različite tangencijalne prostore mnogostrukosti kako bi se računala usmjerena derivacija vektorskih polja.

Neka je $\pi : E \to M$ vektorski svežanj na M, $\mathcal{E}(M)$ prostor glatkih prereza od E.

Koneksija od E je preslikavanje

$$\nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M),$$

pišemo $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, koje zadovoljava

Koneksija

Cilj: "Povezati" različite tangencijalne prostore mnogostrukosti kako bi se računala usmjerena derivacija vektorskih polja.

Neka je $\pi : E \to M$ vektorski svežanj na M, $\mathcal{E}(M)$ prostor glatkih prereza od E.

Koneksija od E je preslikavanje

$$\nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M),$$

pišemo $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, koje zadovoljava

(a) $\nabla_X Y$ je linearno nad $C^\infty(M)$ u X,

Koneksija

Cilj: "Povezati" različite tangencijalne prostore mnogostrukosti kako bi se računala usmjerena derivacija vektorskih polja.

Neka je $\pi : E \to M$ vektorski svežanj na M, $\mathcal{E}(M)$ prostor glatkih prereza od E.

Koneksija od E je preslikavanje

$$\nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M),$$

pišemo $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, koje zadovoljava

(a) $\nabla_X Y$ je linearno nad $C^\infty(M)$ u X,

(b) $\nabla_X Y$ je linearno nad $\mathbf{R}$ u Y,

Koneksija

Cilj: "Povezati" različite tangencijalne prostore mnogostrukosti kako bi se računala usmjerena derivacija vektorskih polja.

Neka je $\pi : E \to M$ vektorski svežanj na M, $\mathcal{E}(M)$ prostor glatkih prereza od E.

Koneksija od E je preslikavanje

$$\nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M),$$

pišemo $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, koje zadovoljava

(a) $\nabla_X Y$ je linearno nad $C^\infty(M)$ u X,

(b) $\nabla_X Y$ je linearno nad $\mathbf{R}$ u Y,

(c) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$.

$\nabla_X Y$ se čita *kovarijantna derivacija* od Y u smjeru X.

$\nabla_X Y$ se čita *kovarijantna derivacija* od Y u smjeru X.

Ako je E tangencijalni svežanj TM, pripadnu koneksiju nazivamo *linearnom koneksijom*.

$\nabla_X Y$ se čita *kovarijantna derivacija* od Y u smjeru X.

Ako je E tangencijalni svežanj TM, pripadnu koneksiju nazivamo *linearnom koneksijom*.

Neka je $\{E_i\}$ lokalni reper za TM na otvorenom skupu $U \subset M$ (primjerice koordinatni reper $\frac{\partial}{\partial x^i}$).

$\nabla_X Y$ se čita *kovarijantna derivacija* od Y u smjeru X.

Ako je E tangencijalni svežanj TM, pripadnu koneksiju nazivamo *linearnom koneksijom*.

Neka je $\{E_i\}$ lokalni reper za TM na otvorenom skupu $U \subset M$ (primjerice koordinatni reper $\frac{\partial}{\partial x^i}$).

Možemo pisati

$$\nabla_{E_i} E_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k E_k.$$

$\nabla_X Y$ se čita *kovarijantna derivacija* od Y u smjeru X.

Ako je E tangencijalni svežanj TM, pripadnu koneksiju nazivamo *linearnom koneksijom*.

Neka je $\{E_i\}$ lokalni reper za TM na otvorenom skupu $U \subset M$ (primjerice koordinatni reper $\frac{\partial}{\partial x^i}$).

Možemo pisati

$$\nabla_{E_i} E_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k E_k.$$

n^3 funkcija Γ_{ij}^k nazivaju se *Christoffelovi simboli* od ∇ u danom reperu.

Propozicija

Neka je ∇ *linearna koneksija,* $X, Y \in \mathcal{T}(U)$, $X = \sum_i X^i E_i$, $Y = \sum_i Y^i E_i$.

Propozicija

Neka je ∇ *linearna koneksija,* $X, Y \in \mathcal{T}(U)$*,* $X = \sum_i X^i E_i$*,* $Y = \sum_i Y^i E_i$.

Tada je

$$\nabla_X Y = \sum_k (XY^k + \sum_{i,j} X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) E_k. \tag{1}$$

Primjer: Euklidska koneksija.

$$\bar{\nabla}_X\Big(\sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) = \sum_j (XY^j)\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Primjer: Euklidska koneksija.

$$\bar{\nabla}_X(\sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}) = \sum_j (XY^j) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Drugim riječima, $\bar{\nabla}_X Y$ je vektorsko polje kojemu su komponente usmjerene derivacije koordinata od Y u smjeru X. Svi su Christoffelovi simboli jednaki 0.

Primjer: Euklidska koneksija.

$$\bar{\nabla}_X\Big(\sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) = \sum_j (XY^j)\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Drugim riječima, $\bar{\nabla}_X Y$ je vektorsko polje kojemu su komponente usmjerene derivacije koordinata od Y u smjeru X. Svi su Christoffelovi simboli jednaki 0.

Propozicija

Svaka mnogostrukost dopušta linearnu koneksiju.

Dokaz

Neka je $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ otvoren pokrivač za M koordinatnim kartama i neka je ψ_α glatka particija jedinice podredjena tom pokrivaču.

Dokaz

Neka je $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ otvoren pokrivač za M koordinatnim kartama i neka je ψ_α glatka particija jedinice podredjena tom pokrivaču.

Na U_α konstruiramo ∇^α zadavanjem Christoffelovih simbola za koordinatni reper $\frac{\partial}{\partial x^i}$ i korištenjem formule (1).

Dokaz

Neka je $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ otvoren pokrivač za M koordinatnim kartama i neka je ψ_α glatka particija jedinice podredjena tom pokrivaču.

Na U_α konstruiramo ∇^α zadavanjem Christoffelovih simbola za koordinatni reper $\frac{\partial}{\partial x^i}$ i korištenjem formule (1).

Još trebamo "polijepiti" definirane ∇^α. Koristimo particiju jedinice i definiramo

$$\nabla_X Y = \sum_\alpha \psi_\alpha \nabla^\alpha_X Y.$$

Dokaz - nastavak

Ovako definirano preslikavanje je glatko, linearno nad $\mathbf{R}$ u Y i linearno nad $C^\infty(M)$ u X.