GLATKE I RIEMANNOVE MNOGOSTRUKOSTI

Željka Milin-Šipuš, Pavle Pandžić i Juraj Šiftar

Drugi dio standardnog poslijediplomskog kolegija **Geometrija i topologija**. Izvodi se u ljetnom semestru (30 sati predavanja).

Orijentacija

Neka je V n-dimenzionalan vektorski prostor.

Orijentacija

Neka je V n-dimenzionalan vektorski prostor.

Orijentacija od V je klasa ekvivalencije na skupu svih uredjenih baza od V, pri čemu je relacija ekvivalencije definirana na sljedeći način:

Orijentacija

Neka je V n-dimenzionalan vektorski prostor.

Orijentacija od V je klasa ekvivalencije na skupu svih uredjenih baza od V, pri čemu je relacija ekvivalencije definirana na sljedeći način:

za dvije baze kažemo da su *konzistentno orijentirane*, ako matrica prijelaza iz jedne baze u drugu ima pozitivnu determinantu.

Orijentacija

Neka je V n-dimenzionalan vektorski prostor.

Orijentacija od V je klasa ekvivalencije na skupu svih uredjenih baza od V, pri čemu je relacija ekvivalencije definirana na sljedeći način:

za dvije baze kažemo da su *konzistentno orijentirane*, ako matrica prijelaza iz jedne baze u drugu ima pozitivnu determinantu.

(To je relacija ekvivalencije i ima točno dvije klase.)

Vektorski prostor s izborom orijentacije (primjerice, zadane klasom s predstavnikom $(E_1, \ldots, E_n)$) nazivamo *orijentiranim prostorom*.

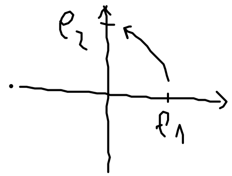
Vektorski prostor s izborom orijentacije (primjerice, zadane klasom s predstavnikom $(E_1, \dots, E_n)$) nazivamo *orijentiranim prostorom*.

Svaka baza koja je u klasi s $(E_1, \dots, E_n)$ naziva se *pozitivno orijentiranom*, inače *negativno orijentiranom*.

Vektorski prostor s izborom orijentacije (primjerice, zadane klasom s predstavnikom $(E_1, \ldots, E_n)$) nazivamo *orijentiranim prostorom*.

Svaka baza koja je u klasi s $(E_1, \ldots, E_n)$ naziva se *pozitivno orijentiranom*, inače *negativno orijentiranom*.

Primjer. Na $\mathbf{R}^n$ postoji standardna orijentacija odredjena kanonskom bazom $(e_1, \ldots, e_n)$.



Sljedeća tvrdnja opisuje vezu izmedju orijentacije od V i alternirajućih tenzora na V.

Sljedeća tvrdnja opisuje vezu izmedju orijentacije od V i alternirajućih tenzora na V.

Propozicija

Neka je V n-dimenzionalan vektorski prostor, $n \geq 1$. Neka je $\Omega \in \Lambda^n(V)$.

Sljedeća tvrdnja opisuje vezu izmedju orijentacije od V i alternirajućih tenzora na V.

Propozicija

Neka je V n-dimenzionalan vektorski prostor, $n \geq 1$. Neka je $\Omega \in \Lambda^n(V) \setminus \{0\}$

Skup uredjenih baza $(E_1, \ldots, E_n)$ za koje je $\Omega(E_1, \ldots, E_n) > 0$ je orijentacija za V.

Dokaz. Slijedi iz činjenice da za linearan operator A i za bilo koje $v_1, \ldots, v_n \in V$ vrijedi

$$\Omega(Av_1, \ldots, Av_n) = \det A \; \Omega(v_1, \ldots, v_n).$$

$\square$

Dokaz. Slijedi iz činjenice da za linearan operator A i za bilo koje $v_1, \ldots, v_n \in V$ vrijedi

$$\Omega(Av_1, \ldots, Av_n) = \det A \, \Omega(v_1, \ldots, v_n).$$

$\square$

Neka je V orijentirani vektorski prostor, Ω n-kovektor koji definira orijentaciju.

Dokaz. Slijedi iz činjenice da za linearan operator A i za bilo koje $v_1, \ldots, v_n \in V$ vrijedi

$$\Omega(Av_1, \ldots, Av_n) = \det A \; \Omega(v_1, \ldots, v_n).$$

$\square$

Neka je V orijentirani vektorski prostor, Ω n-kovektor koji definira orijentaciju.

Kažemo da je Ω *(pozitivno) orijentirani* n-kovektor.

Primjer.

$e^1 \wedge \ldots \wedge e^n$ je pozitivno orijentiran n-kovektor, gdje je (e^i) dualna baza od standardne baze (e_i) od $\mathbf{R}^n$.

Neka je M glatka mnogostrukost. *Orijentacija po točkama* na M je izbor orijentacije na svakom tangencijalnom prostoru.

Neka je M glatka mnogostrukost. *Orijentacija po točkama* na M je izbor orijentacije na svakom tangencijalnom prostoru.

Lokalni reper (E_i) za M je (*pozitivno*) *orijentiran* ako je $(E_i|_p)$ (pozitivno) orijentirana baza za svaki T_pM.

Orijentacija po točkama je *neprekidna* ako je svaka točka od M u domeni nekog orijentiranog lokalnog repera.

Orijentacija po točkama je *neprekidna* ako je svaka točka od M u domeni nekog orijentiranog lokalnog repera.

Orijentacija od M je neprekidna orijentacija po točkama.

Orijentacija po točkama je *neprekidna* ako je svaka točka od M u domeni nekog orijentiranog lokalnog repera.

Orijentacija od M je neprekidna orijentacija po točkama.

Orijentirana mnogostrukost je glatka mnogostrukost s izborom orijentacije.

Orijentacija po točkama je *neprekidna* ako je svaka točka od M u domeni nekog orijentiranog lokalnog repera.

Orijentacija od M je neprekidna orijentacija po točkama.

Orijentirana mnogostrukost je glatka mnogostrukost s izborom orijentacije.

Orijentabilna mnogostrukost je mnogostrukost za koju postoji orijentacija.

Glatka koordinatna karta je (*pozitivno*) *orijentirana* ako je koordinatni reper $(\frac{\partial}{\partial x^i})$ pozitivno orijentiran.

Glatka koordinatna karta je (*pozitivno*) *orijentirana* ako je koordinatni reper $(\frac{\partial}{\partial x^i})$ pozitivno orijentiran.

Kolekcija glatkih koordinatnih karata $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ je *konzistentno orijentirana* ako je ako za svaki α, β funkcija prijelaza $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ ima pozitivan Jacobijan na $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$.

Propozicija

Neka je $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ *otvoren pokrivač od* M *s konzistentno orijentiranim glatkim koordinatnim kartama.*

Propozicija

Neka je $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ *otvoren pokrivač od* M *s konzistentno orijentiranim glatkim koordinatnim kartama.*

Tada postoji jedinstvena orijentacija od M *takva da je svaka karta orijentirana.*

Propozicija

Neka je $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ *otvoren pokrivač od* M *s konzistentno orijentiranim glatkim koordinatnim kartama.*

Tada postoji jedinstvena orijentacija od M *takva da je svaka karta orijentirana.*

Obratno, ako je M *orijentirana, tada je kolekcija svih orijentiranih glatkih karata konzistentno orijentirani pokrivač za* M*.*

Dokaz. Neka je $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ otvoren pokrivač od M s konzistentno orijentiranim glatkim koordinatnim kartama.

Dokaz. Neka je $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ otvoren pokrivač od M s konzistentno orijentiranim glatkim koordinatnim kartama.

To znači da matrica prijelaza izmedju takve dvije karte ima pozitivnu determinantu.

Dokaz. Neka je $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ otvoren pokrivač od M s konzistentno orijentiranim glatkim koordinatnim kartama.

To znači da matrica prijelaza izmedju takve dvije karte ima pozitivnu determinantu.

Time koordinatne baze za dane karte odredjuju istu orijentaciju na T_pM, što odredjuje orijentaciju po točkama na M.

Dokaz. Neka je $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ otvoren pokrivač od M s konzistentno orijentiranim glatkim koordinatnim kartama.

To znači da matrica prijelaza izmedju takve dvije karte ima pozitivnu determinantu.

Time koordinatne baze za dane karte odredjuju istu orijentaciju na T_pM, što odredjuje orijentaciju po točkama na M.

Svaka točka od M je u domeni barem jedne takve karte, odgovarajući koordinatni reper je orijentiran po definiciji, te je orijentacija po točkama neprekidna.

Dokaz. Neka je $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ otvoren pokrivač od M s konzistentno orijentiranim glatkim koordinatnim kartama.

To znači da matrica prijelaza izmedju takve dvije karte ima pozitivnu determinantu.

Time koordinatne baze za dane karte odredjuju istu orijentaciju na T_pM, što odredjuje orijentaciju po točkama na M.

Svaka točka od M je u domeni barem jedne takve karte, odgovarajući koordinatni reper je orijentiran po definiciji, te je orijentacija po točkama neprekidna.

Obrat slično. $\square$

Propozicija

Proizvoljna neiščezavajuća n-forma Ω na M definira jedinstvenu orijentaciju na M za koju je Ω pozitivno orijentirana u svakoj točki.

Propozicija

Proizvoljna neiščezavajuća n-forma Ω *na* M *definira jedinstvenu orijentaciju na* M *za koju je* Ω *pozitivno orijentirana u svakoj točki.*

Obratno, ako je na M *dana orijentacija, tada postoji neiščezavajuća glatka n-forma pozitivno orijentirana u svakoj točki.*

Orijentacija hiperploha.

Neka je M glatka mnogostrukost, $S \subset M$ podmnogostrukost.

Orijentacija hiperploha.

Neka je M glatka mnogostrukost, $S \subset M$ podmnogostrukost.

Vektorsko polje duž S je neprekidno preslikavanje $N : S \to TM$ takvo da je $N_p \in T_pM$, $p \in S$.

Orijentacija hiperploha.

Neka je M glatka mnogostrukost, $S \subset M$ podmnogostrukost.

Vektorsko polje duž S je neprekidno preslikavanje $N : S \to TM$ takvo da je $N_p \in T_pM$, $p \in S$.

Vektor $N_p \in T_pM$ u točki $p \in S$ naziva se *transverzalnim* na S ako je T_pM razapeto s N_p i T_pS.

Orijentacija hiperploha.

Neka je M glatka mnogostrukost, $S \subset M$ podmnogostrukost.

Vektorsko polje duž S je neprekidno preslikavanje $N : S \to TM$ takvo da je $N_p \in T_pM$, $p \in S$.

Vektor $N_p \in T_pM$ u točki $p \in S$ naziva se *transverzalnim* na S ako je T_pM razapeto s N_p i T_pS.

Vektorsko polje N duž S naziva se *transverzalnim* na S ako je N_p transverzalan na S u svakoj točki $p \in S$.

Unutrašnje množenje ili *kontrakcija* je linearno preslikavanje $i_X : \Lambda^k(V) \to \Lambda^{k-1}(V)$, V je konačnodimenzionalan vektorski prostor, definirano sa

$X \in V$

$$i_X\omega(Y_1, \dots, Y_{k-1}) = \omega(X, Y_1, \dots, Y_{k-1}).$$

Oznaka $i_X\omega = X \lrcorner\, \omega$.

Unutrašnje množenje ili *kontrakcija* je linearno preslikavanje $i_X : \Lambda^k(V) \to \Lambda^{k-1}(V)$, V je konačnodimenzionalan vektorski prostor, definirano sa

$$i_X\omega(Y_1, \dots, Y_{k-1}) = \omega(X, Y_1, \dots, Y_{k-1}).$$

Oznaka $i_X\omega = X \lrcorner\, \omega$.

Hiperploha je (imerzirana ili smještena) podmnogostrukost kodimenzije 1.

Propozicija

Neka je M orijentirana glatka n-mnogostrukost, S imerzirana hiperploha u M, N transverzalno vektorsko polje duž S.

Propozicija

Neka je M orijentirana glatka n-mnogostrukost, S imerzirana hiperploha u M, N transverzalno vektorsko polje duž S.

Tada S ima jedinstvenu orijentaciju takvu da je za svako $p \in S$, $(E_1, \ldots, E_{n-1})$ orijentirana baza za T_pS ako i samo ako je $(N_p, E_1, \ldots, E_{n-1})$ orijentirana baza za T_pM.

Propozicija

Neka je M orijentirana glatka n-mnogostrukost, S imerzirana hiperploha u M, N transverzalno vektorsko polje duž S.

Tada S ima jedinstvenu orijentaciju takvu da je za svako $p \in S$, $(E_1, \ldots, E_{n-1})$ orijentirana baza za T_pS ako i samo ako je $(N_p, E_1, \ldots, E_{n-1})$ orijentirana baza za T_pM.

Ako je Ω orijentacijska forma za M, tada je $(N \lrcorner \Omega)$ orijentacijska forma za S s obzirom na tu orijentaciju.

Integracija na $\mathbf{R}^n$

Prisjetimo se najprije da su za ograničenu funkciju na kvadru u $\mathbf{R}^n$ definirani pojmovi integrabilnosti i integrala (u Riemannovom smislu).

Integracija na $\mathbf{R}^n$

Prisjetimo se najprije da su za ograničenu funkciju na kvadru u $\mathbf{R}^n$ definirani pojmovi integrabilnosti i integrala (u Riemannovom smislu).

(Donje i gornje Darbouxove sume, donji i gornji Riemannov integral, f je integrabilna ako su joj donji i gornji integral jednaki.)

Integracija na $\mathbf{R}^n$

Prisjetimo se najprije da su za ograničenu funkciju na kvadru u $\mathbf{R}^n$ definirani pojmovi integrabilnosti i integrala (u Riemannovom smislu).

(Donje i gornje Darbouxove sume, donji i gornji Riemannov integral, f je integrabilna ako su joj donji i gornji integral jednaki.)

Lebesgueov teorem kaže da je funkcija integrabilna ako i samo ako njezin skup prekida ima (Lebesgueovu) mjeru 0. Fubinijev teorem kaže da se uz izvjesne uvjete integral integrabilne funkcije može računati kao iterirani integral, tj. uzastopnim računanjem jednostrukih integrala.

Integrabilnost i integral ograničene funkcije f na proizvoljnom ograničenom skupu $D \subset \mathbf{R}^n$ definira se tako da se f proširi nulom do funkcije $\tilde{f}$ na kvadru $A \supset D$.

Integrabilnost i integral ograničene funkcije f na proizvoljnom ograničenom skupu $D \subset \mathbf{R}^n$ definira se tako da se f proširi nulom do funkcije $\tilde{f}$ na kvadru $A \supset D$.

Primijetimo da čak ako je f neprekidna na D, ne slijedi automatski da je integrabilna, jer skup prekida funkcije $\tilde{f}$ može biti čitav rub od D, a to ne mora biti skup mjere 0.

Integrabilnost i integral ograničene funkcije f na proizvoljnom ograničenom skupu $D \subset \mathbf{R}^n$ definira se tako da se f proširi nulom do funkcije $\tilde{f}$ na kvadru $A \supset D$.

Primijetimo da čak ako je f neprekidna na D, ne slijedi automatski da je integrabilna, jer skup prekida funkcije $\tilde{f}$ može biti čitav rub od D, a to ne mora biti skup mjere 0.

Da bismo izbjegli taj problem, zahtijevat ćemo da skup D ima rub mjere nula. Takav ćemo skup nazivati *domenom integracije*. Za domenu integracije D vrijedi da je svaka neprekidna funkcija $f : D \to \mathbf{R}$ integrabilna na D.

Neka je sada $\omega = f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ neprekidna diferencijalna n-forma na D. (Tj., f je neprekidna funkcija.)

Neka je sada $\omega = f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ neprekidna diferencijalna n-forma na D. (Tj., f je neprekidna funkcija.)

Definiramo
$$\int_D \omega = \int_D f = \int_D f\, dx^1 \ldots dx^n.$$

Neka je sada $\omega = f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ neprekidna diferencijalna n-forma na D. (Tj., f je neprekidna funkcija.)

Definiramo

$$\int_D \omega = \int_D f = \int_D f\, dx^1 \dots dx^n.$$

Općenitije, neka je $U \subseteq \mathbf{R}^n$ otvoren. Željeli bismo definirati $\int_U \omega$, za neprekidnu diferencijalnu n-formu ω na U s kompaktnim nosačem. Niti U niti nosač od ω ne moraju biti domene integracije, pa trebamo sljedeću lemu:

Lema

Neka je K kompaktan a U otvoren podskup od $\mathbf{R}^n$, takvi da vrijedi $K \subset U$. Tada postoji kompaktna domena integracije D takva da je $K \subset D \subset U$.

Lema

Neka je K kompaktan a U otvoren podskup od $\mathbf{R}^n$, takvi da vrijedi $K \subset U$. Tada postoji kompaktna domena integracije D takva da je $K \subset D \subset U$.

Dokaz. Za svaki $p \in K$ postoji otvorena kugla oko p čiji je zatvarač sadržan u U. Sve takve kugle pokrivaju K, pa ga zbog kompaktnosti pokriva već konačno mnogo njih, $\bar{B}_1, \ldots, \bar{B}_m$.

Lema

Neka je K kompaktan a U otvoren podskup od $\mathbf{R}^n$, takvi da vrijedi $K \subset U$. Tada postoji kompaktna domena integracije D takva da je $K \subset D \subset U$.

Dokaz. Za svaki $p \in K$ postoji otvorena kugla oko p čiji je zatvarač sadržan u U. Sve takve kugle pokrivaju K, pa ga zbog kompaktnosti pokriva već konačno mnogo njih, $\bar{B}_1, \dots, \bar{B}_m$.

Svaki $\bar{B}_i$ je domena integracije (jer je sfera skup mjere nula). Zato je $D = \bar{B}_1 \cup \cdots \cup \bar{B}_m$ takodjer domena integracije, i to je traženi skup. $\square$

Sada ako je $U \subseteq \mathbf{R}^n$ otvoren i ω neprekidna diferencijalna n-forma na U s kompaktnim nosačem, definiramo

$$\int_U \omega = \int_D \omega,$$

gdje je $D \subset U$ bilo koja domena integracije koja sadrži nosač od ω.

Sada ako je $U \subseteq \mathbf{R}^n$ otvoren i ω neprekidna diferencijalna n-forma na U s kompaktnim nosačem, definiramo

$$\int_U \omega = \int_D \omega,$$

gdje je $D \subset U$ bilo koja domena integracije koja sadrži nosač od ω.

Definicija ne ovisi o izboru D jer je $\omega = 0$ izvan nosača.

Propozicija

Neka su D i E kompaktne domene integracije u $\mathbf{R}^n$ i neka je ω n-forma na E.

Propozicija

Neka su D i E kompaktne domene integracije u $\mathbf{R}^n$ i neka je ω n-forma na E.

Neka je $G : D \to E$ glatko preslikavanje. Ako je $G : \operatorname{Int} D \to \operatorname{Int} E$ difeomorfizam koji čuva orijentaciju, onda je

$$\int_E \omega = \int_D G^*\omega.$$

Propozicija

Neka su D i E kompaktne domene integracije u $\mathbf{R}^n$ *i neka je* ω *n-forma na* E.

Neka je $G : D \to E$ *glatko preslikavanje. Ako je* $G : \operatorname{Int} D \to \operatorname{Int} E$ *difeomorfizam koji čuva orijentaciju, onda je*

$$\int_E \omega = \int_D G^* \omega.$$

Ako je $G : \operatorname{Int} D \to \operatorname{Int} E$ *difeomorfizam koji okreće orijentaciju, onda je* $\int_E \omega = -\int_D G^* \omega$.

Propozicija

Neka su D i E kompaktne domene integracije u $\mathbf{R}^n$ i neka je ω n-forma na E.

Neka je $G : D \to E$ glatko preslikavanje. Ako je $G : \mathrm{Int}\, D \to \mathrm{Int}\, E$ difeomorfizam koji čuva orijentaciju, onda je

$$\int_E \omega = \int_D G^*\omega.$$

Ako je $G : \mathrm{Int}\, D \to \mathrm{Int}\, E$ difeomorfizam koji okreće orijentaciju, onda je $\int_E \omega = -\int_D G^*\omega$.

Dokaz. Direktna primjena teorema o zamjeni varijabli. $\square$

Korolar

Neka su U i V otvoreni podskupovi od $\mathbf{R}^n$, $G : U \to V$ difeomorfizam koji čuva orijentaciju, i neka je ω neprekidna n-forma na V s kompaktnim nosačem.

Korolar

Neka su U i V otvoreni podskupovi od $\mathbf{R}^n$, $G : U \to V$ difeomorfizam koji čuva orijentaciju, i neka je ω neprekidna n-forma na V s kompaktnim nosačem.

Tada je

$$\int_V \omega = \int_U G^*\omega.$$

Korolar

Neka su U i V otvoreni podskupovi od $\mathbf{R}^n$, $G : U \to V$ difeomorfizam koji čuva orijentaciju, i neka je ω neprekidna n-forma na V s kompaktnim nosačem.

Tada je

$$\int_V \omega = \int_U G^*\omega.$$

Dokaz. Neka je $E \subset V$ kompaktna domena integracije koja sadrži nosač od ω.

Korolar

Neka su U i V otvoreni podskupovi od $\mathbf{R}^n$, $G : U \to V$ difeomorfizam koji čuva orijentaciju, i neka je ω neprekidna n-forma na V s kompaktnim nosačem.

Tada je

$$\int_V \omega = \int_U G^* \omega.$$

Dokaz. Neka je $E \subset V$ kompaktna domena integracije koja sadrži nosač od ω.

Tada je $G^{-1}(E) \subset U$ kompaktna domena integracije koja sadrži nosač od $G^*\omega$.

Korolar

Neka su U i V otvoreni podskupovi od $\mathbf{R}^n$, $G : U \to V$ difeomorfizam koji čuva orijentaciju, i neka je ω neprekidna n-forma na V s kompaktnim nosačem.

Tada je

$$\int_V \omega = \int_U G^*\omega.$$

Dokaz. Neka je $E \subset V$ kompaktna domena integracije koja sadrži nosač od ω.

Tada je $G^{-1}(E) \subset U$ kompaktna domena integracije koja sadrži nosač od $G^*\omega$.

Sada tvrdnja slijedi iz prethodne propozicije. $\square$

Integracija na mnogostrukostima

Neka je M glatka orijentirana mnogostrukost dimenzije n i neka je ω neprekidna n-forma na M.

Integracija na mnogostrukostima

Neka je M glatka orijentirana mnogostrukost dimenzije n i neka je ω neprekidna n-forma na M.

Pretpostavimo najprije da ω ima kompaktan nosač, koji je sadržan u domeni neke orijentirane karte (U, φ).

Integracija na mnogostrukostima

Neka je M glatka orijentirana mnogostrukost dimenzije n i neka je ω neprekidna n-forma na M.

Pretpostavimo najprije da ω ima kompaktan nosač, koji je sadržan u domeni neke orijentirane karte (U, φ).

Tada definiramo

$$\int_M \omega = \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega.$$

Integracija na mnogostrukostima

Propozicija

Ako je ω *kao gore, tada* $\int_M \omega$ *ne ovisi o izboru orijentirane karte* (U, φ) *takve da je nosač od* ω *sadržan u* U.

Integracija na mnogostrukostima

Propozicija

Ako je ω kao gore, tada $\int_M \omega$ ne ovisi o izboru orijentirane karte (U, φ) takve da je nosač od ω sadržan u U.

Dokaz. Slijedi iz zamjene varijabli (Korolar 1.7). $\square$

Integracija na mnogostrukostima

Neka je sada ω bilo koja neprekidna n-forma na M s kompaktnim nosačem.

Integracija na mnogostrukostima

Neka je sada ω bilo koja neprekidna n-forma na M s kompaktnim nosačem.

Neka je $\{(U_i, \varphi_i)\}$ konačan pokrivač nosača od ω orijentiranim kartama. Neka je $\{\psi_i\}$ particija jedinice podredjena tom pokrivaču.

Integracija na mnogostrukostima

Neka je sada ω bilo koja neprekidna n-forma na M s kompaktnim nosačem.

Neka je $\{(U_i, \varphi_i)\}$ konačan pokrivač nosača od ω orijentiranim kartama. Neka je $\{\psi_i\}$ particija jedinice podredjena tom pokrivaču.

Tada definiramo

$$\int_M \omega = \sum_i \int_M \psi_i \omega.$$

Svaki sumand u toj sumi je definiran prema gornjoj diskusiji. Štoviše, vrijedi

Integracija na mnogostrukostima

Lema

Gornja definicija $\int_M \omega$ ne ovisi o o izboru orijentiranih karti ili o particiji jedinice.

Integracija na mnogostrukostima

Lema

Gornja definicija $\int_M \omega$ ne ovisi o o izboru orijentiranih karti ili o particiji jedinice.

Dokaz. Neka je $\{(\tilde{U}_j, \tilde{\varphi}_j)\}$ neki drugi konačan pokrivač nosača od ω orijentiranim kartama, i neka je $\{\tilde{\psi}_j\}$ particija jedinice podredjena tom pokrivaču.

Integracija na mnogostrukostima

Lema

Gornja definicija $\int_M \omega$ ne ovisi o o izboru orijentiranih karti ili o particiji jedinice.

Dokaz. Neka je $\{(\tilde{U}_j, \tilde{\varphi}_j)\}$ neki drugi konačan pokrivač nosača od ω orijentiranim kartama, i neka je $\{\tilde{\psi}_j\}$ particija jedinice podredjena tom pokrivaču.

Tada za svaki i vrijedi $\int_M \psi_i \omega = \int_M \left(\sum_j \tilde{\psi}_j\right) \psi_i \omega$, pa je

$$\sum_i \int_M \psi_i \omega = \sum_{i,j} \int_M \tilde{\psi}_j \psi_i \omega.$$

Integracija na mnogostrukostima

Lema

Gornja definicija $\int_M \omega$ ne ovisi o o izboru orijentiranih karti ili o particiji jedinice.

Dokaz. Neka je $\{(\tilde{U}_j, \tilde{\varphi}_j)\}$ neki drugi konačan pokrivač nosača od ω orijentiranim kartama, i neka je $\{\tilde{\psi}_j\}$ particija jedinice podredjena tom pokrivaču.

Tada za svaki i vrijedi $\int_M \psi_i \omega = \int_M \left(\sum_j \tilde{\psi}_j\right) \psi_i \omega$, pa je

$$\sum_i \int_M \psi_i \omega = \sum_{i,j} \int_M \tilde{\psi}_j \psi_i \omega.$$

Analogno se vidi da je $\sum_j \int_M \tilde{\psi}_j \omega = \sum_{i,j} \int_M \tilde{\psi}_j \psi_i \omega$. $\square$

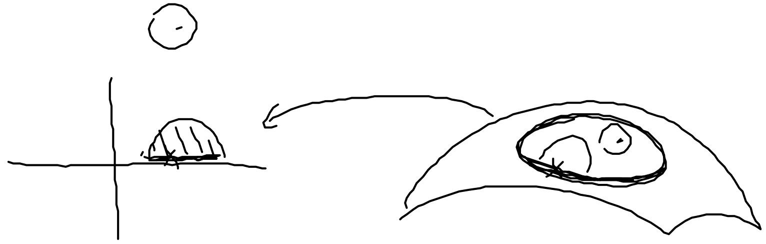
Mnogostrukosti s rubom

Neka je

$$\mathbf{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \;\big|\; x_n \geq 0\}$$

gornji poluprostor u $\mathbf{R}^n$.

Mnogostrukosti s rubom



Neka je

$$\mathbf{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \,\big|\, x_n \geq 0\}$$

gornji poluprostor u $\mathbf{R}^n$.

Hausdorffov prostor M s prebrojivom bazom je topološka mnogostrukost dimenzije n s rubom, ako svaka točka ima okolinu homeomorfnu s otvorenim podskupom od $\mathbf{H}^n$ (u relativnoj topologiji).

Mnogostrukosti s rubom

Neka je

$$\mathbf{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_n \geq 0\}$$

gornji poluprostor u $\mathbf{R}^n$.

Hausdorffov prostor M s prebrojivom bazom je topološka mnogostrukost dimenzije n s rubom, ako svaka točka ima okolinu homeomorfnu s otvorenim podskupom od $\mathbf{H}^n$ (u relativnoj topologiji).

Rub ∂M od M sastoji se od točaka koje u nekoj karti odgovaraju točkama s ruba $\mathbf{H}^n$. Unutrašnje točke su one koje u nekoj karti odgovaraju točkama u unutrašnjosti od $\mathbf{H}^n$.

Mnogostrukosti s rubom

Primijetimo da se pojam ruba mnogostrukosti razlikuje od topološkog pojma granice podskupa topološkog prostora.

Mnogostrukosti s rubom

Primijetimo da se pojam ruba mnogostrukosti razlikuje od topološkog pojma granice podskupa topološkog prostora.

Npr., zatvoreni jedinični krug $\bar{B}$ u $\mathbf{R}^2$ ima kružnicu za rub mnogostrukosti. To je takodjer topološki rub od $\bar{B}$ kao podskupa od $\mathbf{R}^2$.

Mnogostrukosti s rubom

Primijetimo da se pojam ruba mnogostrukosti razlikuje od topološkog pojma granice podskupa topološkog prostora.

Npr., zatvoreni jedinični krug $\bar{B}$ u $\mathbf{R}^2$ ima kružnicu za rub mnogostrukosti. To je takodjer topološki rub od $\bar{B}$ kao podskupa od $\mathbf{R}^2$.

Ako medjutim gledamo $\bar{B}$ kao podskup njega samog, topološki rub je $\emptyset$, a ako ga gledamo kao podskup od $\mathbf{R}^3$, topološki rub je čitav $\bar{B}$.

Mnogostrukosti s rubom

Glatka struktura na mnogostrukosti s rubom definira se isto kao u slučaju mnogostrukosti bez ruba. Tu se treba prisjetiti da za bilo koji $A \subset \mathbf{R}^n$ preslikavanje $F : A \to \mathbf{R}^k$ nazivamo glatkim ako se može proširiti do glatkog preslikavanja $F : U \to \mathbf{R}^k$ za neki otvoren skup $U \supset A$. Ta definicija ne ovisi o izboru otvorenog podskupa U.

Mnogostrukosti s rubom

Glatka struktura na mnogostrukosti s rubom definira se isto kao u slučaju mnogostrukosti bez ruba. Tu se treba prisjetiti da za bilo koji $A \subset \mathbf{R}^n$ preslikavanje $F : A \to \mathbf{R}^k$ nazivamo glatkim ako se može proširiti do glatkog preslikavanja $F : U \to \mathbf{R}^k$ za neki otvoren skup $U \supset A$. Ta definicija ne ovisi o izboru otvorenog podskupa U.

Pojmovi diferencijalnih formi i integrala definiraju se za mnogostrukosti s rubom na isti način kao za mnogostrukosti bez ruba. Sve što smo do sada dokazali za mnogostrukosti bez ruba vrijedi i za mnogostrukosti s rubom.

Integracija po podmnogostrukostima

Neka je $N \subset M$ k-dimenzionalna orijentirana imerzirana podmnogostrukost (sa ili bez ruba). Neka je ω k-forma na M, takva da je nosač forme $\omega\big|_N$ kompaktan.

Integracija po podmnogostrukostima

Neka je $N \subset M$ k-dimenzionalna orijentirana imerzirana podmnogostrukost (sa ili bez ruba). Neka je ω k-forma na M, takva da je nosač forme $\omega\big|_N$ kompaktan.

Definiramo $\int_N \omega = \int_N \omega\big|_N$.

Integracija po podmnogostrukostima

Neka je $N \subset M$ k-dimenzionalna orijentirana imerzirana podmnogostrukost (sa ili bez ruba). Neka je ω k-forma na M, takva da je nosač forme $\omega\big|_N$ kompaktan.

Definiramo $\int_N \omega = \int_N \omega\big|_N$.

Posebno, ako je M kompaktna orijentirana n-dimenzionalna mnogostrukost s rubom, i ako je ω $(n-1)$-forma na M, tada možemo definirati $\int_{\partial M} \omega$, gdje za orijentaciju na ∂M uzimamo induciranu orijentaciju.

Integracija po podmnogostrukostima

Inducirana orijentacija definira se pomoću pojma vanjske normale. Oko svake točke na ∂M možemo izabrati orijentiranu kartu $(U, x^1, \ldots, x^n)$ tako da je $(U \cap \partial M, x^1, \ldots, x^{n-1})$ karta za ∂M (∂M je lokalno dana sa $x^n = 0$.)

Integracija po podmnogostrukostima

Inducirana orijentacija definira se pomoću pojma vanjske normale. Oko svake točke na ∂M možemo izabrati orijentiranu kartu $(U, x^1, \ldots, x^n)$ tako da je $(U \cap \partial M, x^1, \ldots, x^{n-1})$ karta za ∂M (∂M je lokalno dana sa $x^n = 0$.)

Vanjsku normalu na $U \cap \partial M$ definiramo sa $N = -\partial/\partial x^n$. Koristeći particiju jedinice s obzirom na neki pokrivač od ∂M, definiramo N na čitavom ∂M.

Integracija po podmnogostrukostima

Inducirana orijentacija definira se pomoću pojma vanjske normale. Oko svake točke na ∂M možemo izabrati orijentiranu kartu $(U, x^1, \ldots, x^n)$ tako da je $(U \cap \partial M, x^1, \ldots, x^{n-1})$ karta za ∂M (∂M je lokalno dana sa $x^n = 0$.)

Vanjsku normalu na $U \cap \partial M$ definiramo sa $N = -\partial/\partial x^n$. Koristeći particiju jedinice s obzirom na neki pokrivač od ∂M, definiramo N na čitavom ∂M.

Sada transverzalno vektorsko polje N duž hiperplohe ∂M iskoristimo za definiranje (inducirane) orijentacije na ∂M. Definicija N ovisi o izboru karata, medjutim pokazuje se da inducirana orijentacija ne ovisi o izboru karata.

Svojstva integrala

Propozicija

Neka su M i N orijentirane n-dimenzionalne mnogostrukosti, sa ili bez ruba, i neka su ω, η n-forme na M s kompaktnim nosačem.

Svojstva integrala

Propozicija

Neka su M i N orijentirane n-dimenzionalne mnogostrukosti, sa ili bez ruba, i neka su ω, η n-forme na M s kompaktnim nosačem.

1. *Za $a, b \in \mathbf{R}$, vrijedi $\int_M a\omega + b\eta = a\int_M \omega + b\int_M \eta$.*

Svojstva integrala

Propozicija

Neka su M i N orijentirane n-dimenzionalne mnogostrukosti, sa ili bez ruba, i neka su ω, η n-forme na M s kompaktnim nosačem.

1. *Za $a, b \in \mathbf{R}$, vrijedi $\int_M a\omega + b\eta = a\int_M \omega + b\int_M \eta$.*
2. *Ake $\bar{M}$ označava M sa suprotnom orijentacijom, tada je $\int_{\bar{M}} \omega = -\int_M \omega$.*

Svojstva integrala

Propozicija

Neka su M i N orijentirane n-dimenzionalne mnogostrukosti, sa ili bez ruba, i neka su ω, η n-forme na M s kompaktnim nosačem.

1. *Za $a, b \in \mathbf{R}$, vrijedi $\int_M a\omega + b\eta = a \int_M \omega + b \int_M \eta$.*
2. *Ake $\bar{M}$ označava M sa suprotnom orijentacijom, tada je $\int_{\bar{M}} \omega = - \int_M \omega$.*
3. *Ako je ω orijentacijska forma za zadanu orijentaciju, tada je $\int_M \omega > 0$.*

Svojstva integrala

Propozicija

Neka su M i N orijentirane n-dimenzionalne mnogostrukosti, sa ili bez ruba, i neka su ω, η n-forme na M s kompaktnim nosačem.

1. *Za $a, b \in \mathbf{R}$, vrijedi $\int_M a\omega + b\eta = a\int_M \omega + b\int_M \eta$.*
2. *Ake $\bar{M}$ označava M sa suprotnom orijentacijom, tada je $\int_{\bar{M}} \omega = -\int_M \omega$.*
3. *Ako je ω orijentacijska forma za zadanu orijentaciju, tada je $\int_M \omega > 0$.*
4. *Ako je $F : N \to M$ difeomorfizam koji čuva orijentaciju, tada je $\int_M \omega = \int_N F^*\omega$.*

Integrali po parametrizacijama

Za eksplicitno računanje integrala, definicija pomoću particije jedinice najčešće nije pogodna. Umjesto toga, mnogostrukost se podijeli na dijelove dane parametrizacijama, na kojima se integral računa pomoću povlaka.

Integrali po parametrizacijama

Za eksplicitno računanje integrala, definicija pomoću particije jedinice najčešće nije pogodna. Umjesto toga, mnogostrukost se podijeli na dijelove dane parametrizacijama, na kojima se integral računa pomoću povlaka.

Skup $E \subset M$ naziva se domenom integracije ako je skup $\bar{E}$ kompaktan i ako ∂E ima mjeru 0. (Lebesgueova mjera prenosi se s $\mathbf{R}^n$ na M pomoću karti.)

Integrali po parametrizacijama

Za eksplicitno računanje integrala, definicija pomoću particije jedinice najčešće nije pogodna. Umjesto toga, mnogostrukost se podijeli na dijelove dane parametrizacijama, na kojima se integral računa pomoću povlaka.

Skup $E \subset M$ naziva se domenom integracije ako je skup $\bar{E}$ kompaktan i ako ∂E ima mjeru 0. (Lebesgueova mjera prenosi se s $\mathbf{R}^n$ na M pomoću karti.)

Na primjer, svaka kompaktna smještena n-podmnogostrukost s rubom u n-mnogostrukosti M je domena integracije.

Integrali po parametrizacijama

Propozicija

Neka je M glatka orijentirana n-mnogostrukost sa ili bez ruba. Neka su $E_1, \ldots, E_k$ kompaktne domene integracije u M, $D_1, \ldots, D_k$ kompaktne domene integracije u $\mathbf{R}^n$, i neka su za $i = 1, \ldots, k$, $F_i : D_i \to M$ glatka preslikavanja koja zadovoljavaju:

Integrali po parametrizacijama

Propozicija

Neka je M glatka orijentirana n-mnogostrukost sa ili bez ruba. Neka su $E_1, \dots, E_k$ kompaktne domene integracije u M, $D_1, \dots, D_k$ kompaktne domene integracije u $\mathbf{R}^n$, i neka su za $i = 1, \dots, k$, $F_i : D_i \to M$ glatka preslikavanja koja zadovoljavaju:

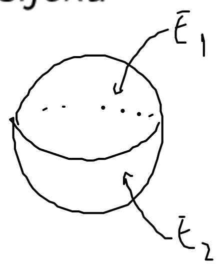
1. *$F_i(D_i) = E_i$ i F_i je difeomorfizam s unutrašnjosti D_i na unutrašnjost E_i koji čuva orijentaciju;*

Integrali po parametrizacijama

Propozicija

Neka je M glatka orijentirana n-mnogostrukost sa ili bez ruba. Neka su $E_1, \ldots, E_k$ kompaktne domene integracije u M, $D_1, \ldots, D_k$ kompaktne domene integracije u $\mathbf{R}^n$, i neka su za $i = 1, \ldots, k$, $F_i : D_i \to M$ glatka preslikavanja koja zadovoljavaju:

1. *$F_i(D_i) = E_i$ i F_i je difeomorfizam s unutrašnjosti D_i na unutrašnjost E_i koji čuva orijentaciju;*
2. *Za svaki $i \neq j$, E_i i E_j imaju ili prazan presjek, ili se sijeku samo na granici.*



Integrali po parametrizacijama

Propozicija

Neka je M glatka orijentirana n-mnogostrukost sa ili bez ruba. Neka su $E_1, \ldots, E_k$ kompaktne domene integracije u M, $D_1, \ldots, D_k$ kompaktne domene integracije u $\mathbf{R}^n$, i neka su za $i = 1, \ldots, k$, $F_i : D_i \to M$ glatka preslikavanja koja zadovoljavaju:

1. *$F_i(D_i) = E_i$ i F_i je difeomorfizam s unutrašnjosti D_i na unutrašnjost E_i koji čuva orijentaciju;*
2. *Za svaki $i \neq j$, E_i i E_j imaju ili prazan presjek, ili se sijeku samo na granici.*

Tada za svaku n-formu ω na M sa nosačem u $E_1 \cup \cdots \cup E_k$ vrijedi

$$\int_M \omega = \sum_i \int_{E_i} \omega = \sum_i \int_{D_i} F^* \omega.$$

Dokaz

1. Pomoću karata i particije jedinice prijedje se na analognu tvrdnju za $\mathbf{R}^n$;

Dokaz

1. Pomoću karata i particije jedinice prijedje se na analognu tvrdnju za $\mathbf{R}^n$;
2. Korištenjem aditivnosti integrala po području vidi se da je dovoljno dokazati $\int_{E_i} \omega = \int_{D_i} F^*\omega$ za fiksni i;

Dokaz

1. Pomoću karata i particije jedinice prijedje se na analognu tvrdnju za $\mathbf{R}^n$;
2. Korištenjem aditivnosti integrala po području vidi se da je dovoljno dokazati $\int_{E_i} \omega = \int_{D_i} F^*\omega$ za fiksni i;
3. Posljednju tvrdnju smo već dokazali.

Zadatak

Koristeći sferičke koordinate za parametrizaciju, izračunajte integral forme

$$\omega = x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy$$

po jediničnoj sferi $S^2 \subset \mathbf{R}^3$.

Stokesov teorem

Neka je M glatka orijentirana n-dimenzionalna mnogostrukost s rubom ∂M, na kojem promatramo induciranu orijentaciju.

Stokesov teorem

Neka je M glatka orijentirana n-dimenzionalna mnogostrukost s rubom ∂M, na kojem promatramo inducirani orijentaciju.

Neka je ω glatka $(n-1)$-forma na M s kompaktnim nosačem.

Stokesov teorem

Neka je M glatka orijentirana n-dimenzionalna mnogostrukost s rubom ∂M, na kojem promatramo induciranu orijentaciju.

Neka je ω glatka $(n-1)$-forma na M s kompaktnim nosačem.

Tada vrijedi

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Dokaz

Teorem se najprije dokaže u vrlo specijalnom slučaju: neka je M gornji poluprostor $\mathbf{H}^n$.

Dokaz

Teorem se najprije dokaže u vrlo specijalnom slučaju: neka je M gornji poluprostor $\mathbf{H}^n$.

Budući da ω ima kompaktan nosač, postoji $R > 0$ takav da je nosač od ω sadržan u n-dimenzionalnom kvadru,

$$[-R, R] \times \cdots \times [-R, R] \times [0, R],$$

te da je $\omega = 0$ na čitavom rubu tog kvadra osim na strani $x^n = 0$.

Dokaz - nastavak

U standardnim koordinatama,

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Dokaz - nastavak

U standardnim koordinatama,

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Slijedi da je

$$d\omega = \sum_i d\omega_i \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n =$$

$$\sum_{i,j} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} dx_j \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n =$$

$$\sum_i (-1)^{i-1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} \, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Dokaz - nastavak

Sada izračunamo $\int_{\mathbf{H}^n} d\omega$ koristeći Fubinijev teorem tako da unutarnji integral za i-ti sumand od $d\omega$ bude po x^i, zatim Newton-Leibnizovu formulu za izračunati taj unutarnji integral, i konačno činjenicu da je $\omega = 0$ na cijelom rubu kvadra osim na $x^n = 0$. Slijedi

Dokaz - nastavak

Sada izračunamo $\int_{\mathbf{H}^n} d\omega$ koristeći Fubinijev teorem tako da unutarnji integral za i-ti sumand od $d\omega$ bude po x^i, zatim Newton-Leibnizovu formulu za izračunati taj unutarnji integral, i konačno činjenicu da je $\omega = 0$ na cijelom rubu kvadra osim na $x^n = 0$. Slijedi

$$\int_{\mathbf{H}^n} d\omega = (-1)^n \int_{-R}^{R} \dots \int_{-R}^{R} \omega_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0)\, dx^1 \dots dx^{n-1}.$$

Dokaz - nastavak

S druge strane,

$$\int_{\partial \mathbf{H}^n} \omega = \sum_i \int_{\partial \mathbf{H}^n} \omega_i(x^1, \ldots, x^{n-1}, 0)\, dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Dokaz - nastavak

S druge strane,

$$\int_{\partial \mathbf{H}^n} \omega = \sum_i \int_{\partial \mathbf{H}^n} \omega_i(x^1, \ldots, x^{n-1}, 0)\, dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Budući da na $\partial \mathbf{H}^n$ vrijedi $x^n = 0$, vrijedi i $dx^n = 0$, pa slijedi

$$\int_{\partial \mathbf{H}^n} \omega = \int_{\partial \mathbf{H}^n} \omega_n(x^1, \ldots, x^{n-1}, 0)\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}.$$

Dokaz - nastavak

Budući da koordinate $(x^1, \ldots, x^{n-1})$ daju pozitivnu orijentaciju na $\partial \mathbf{H}^n$ za paran n a negativnu orijentaciju za neparan n, slijedi da je gornji izraz isti kao izraz koji smo dobili za $\int_{\mathbf{H}^n} d\omega$. Time je teorem dokazan u slučaju $M = \mathbf{H}^n$.

Dokaz - nastavak

Budući da koordinate $(x^1, \ldots, x^{n-1})$ daju pozitivnu orijentaciju na $\partial \mathbf{H}^n$ za paran n a negativnu orijentaciju za neparan n, slijedi da je gornji izraz isti kao izraz koji smo dobili za $\int_{\mathbf{H}^n} d\omega$. Time je teorem dokazan u slučaju $M = \mathbf{H}^n$.

U slučaju da je M proizvoljna glatka mnogostrukost s rubom, ali da forma ω ima nosač sadržan u domeni neke karte, koristimo povlak da prebacimo tvrdnju teorema na $\mathbf{H}^n$, a tamo smo je upravo dokazali.

Dokaz - nastavak

Budući da koordinate $(x^1, \dots, x^{n-1})$ daju pozitivnu orijentaciju na $\partial \mathbf{H}^n$ za paran n a negativnu orijentaciju za neparan n, slijedi da je gornji izraz isti kao izraz koji smo dobili za $\int_{\mathbf{H}^n} d\omega$. Time je teorem dokazan u slučaju $M = \mathbf{H}^n$.

U slučaju da je M proizvoljna glatka mnogostrukost s rubom, ali da forma ω ima nosač sadržan u domeni neke karte, koristimo povlak da prebacimo tvrdnju teorema na $\mathbf{H}^n$, a tamo smo je upravo dokazali.

Za općeniti M i općeniti ω, koristimo particiju jedinice da ω napišemo kao sumu formi od kojih svaka ima nosač u domeni neke karte. $\square$

Mnogostrukosti s uglovima

Pojam glatke mnogostrukosti s rubom je previše restriktivan za primjene; na primjer, vrlo je uobičajeno koristiti Stokesov teorem za k-kocku, ili njezinu difeomorfnu sliku, k-ćeliju u $\mathbf{R}^n$. (Sjetimo se da se u diferencijalnom i integralnom računu takodjer dozvoljavaju po dijelovima glatke krivulje i plohe.)

Mnogostrukosti s uglovima

Pojam glatke mnogostrukosti s rubom je previše restriktivan za primjene; na primjer, vrlo je uobičajeno koristiti Stokesov teorem za k-kocku, ili njezinu difeomorfnu sliku, k-ćeliju u $\mathbf{R}^n$. (Sjetimo se da se u diferencijalnom i integralnom računu takodjer dozvoljavaju po dijelovima glatke krivulje i plohe.)

Zato se uvodi pojam *mnogostrukosti s uglovima* (engl. manifold with corners). Definicija je slična definiciji mnogostrukosti s rubom, s tim da se sada dozvoljava da karte preslikavaju otvorene podskupove od M na otvorene podskupove kvadranta

$$\overline{\mathbf{R}^n_+} = \{(x^1, \ldots, x^n) \,\big|\, x^1 \geq 0, \ldots, x^n \geq 0\}.$$

Mnogostrukosti s uglovima

Glatka struktura definira se slično kao za glatke mnogostrukosti ili mnogostrukosti s rubom. Svi se standardni pojmovi i svojstva lako proširuju i na ovaj slučaj. Primijetimo da rub mnogostrukosti s uglovima nije nužno mnogostrukost s uglovima, ali je konačna unija takvih.

Mnogostrukosti s uglovima

Glatka struktura definira se slično kao za glatke mnogostrukosti ili mnogostrukosti s rubom. Svi se standardni pojmovi i svojstva lako proširuju i na ovaj slučaj. Primijetimo da rub mnogostrukosti s uglovima nije nužno mnogostrukost s uglovima, ali je konačna unija takvih.

Sada se formulira i dokaže Stokesov teorem za mnogostrukosti s uglovima. Dokaz je vrlo sličan dokazu u slučaju mnogostrukosti s rubom, s tim da je sada osnovni slučaj $M = \overline{\mathbf{R}^n_+}$.