GLATKE I RIEMANNOVE MNOGOSTRUKOSTI

Željka Milin-Šipuš, Pavle Pandžić i Juraj Šiftar

Drugi dio standardnog poslijediplomskog kolegija **Geometrija i topologija**. Izvodi se u ljetnom semestru (30 sati predavanja).

Definirali smo prostor $T_l^k(V)$ koji se sastoji od (k, l)-tenzora na vektorkom prostoru V, kao prostor multilinearnih preslikavanja

$$F : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \to \mathbf{R}.$$

Tenzorski produkt tenzora $F \in T^k_l(V)$, $G \in T^p_q(V)$ je tenzor $F \otimes G \in T^{k+p}_{l+q}(V)$ definiran s

$$F \otimes G(\omega^1, \dots, \omega^{l+q}, X_1, \dots, X_{k+p})$$

$$= F(\omega^1, \dots, \omega^l, X_1, \dots, X_k) G(\omega^{l+1}, \dots, \omega^{l+q}, X_{k+1}, \dots, X_{k+p}).$$

Tenzorski produkt tenzora $F \in T^k_l(V)$, $G \in T^p_q(V)$ je tenzor $F \otimes G \in T^{k+p}_{l+q}(V)$ definiran s

$$F \otimes G(\omega^1, \ldots, \omega^{l+q}, X_1, \ldots, X_{k+p})$$

$$= F(\omega^1, \ldots, \omega^l, X_1, \ldots, X_k) G(\omega^{l+1}, \ldots, \omega^{l+q}, X_{k+1}, \ldots, X_{k+p}).$$

Operacija tenzorskog produkta je bilinearna i asocijativna.

Neka je $(E_1, \ldots, E_n)$ baza za V, $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ dualna baza za V^*.
Baza za $T^k_l V$ je dana tenzorima oblika

$$E_{j_1} \otimes \cdots \otimes E_{j_l} \otimes \epsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{i_k},$$

gdje su $i_p, j_q \in \{1, \ldots, n\}$, koji djeluju na elemente baze

$$E_{j_1} \otimes \cdots \otimes E_{j_l} \otimes \epsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{i_k}(\epsilon^{s_1}, \ldots, \epsilon^{s_{\cancel{k}}\,s_l}, E_{r_1}, \ldots, E_{r_k}) =$$

$$\delta^{s_1}_{j_1} \cdots \delta^{s_{\cancel{s}}\,l}_{j_l} \delta^{i_1}_{r_1} \cdots \delta^{r_k}_{i_k}.$$

Proizvoljan tenzor $F \in T^k_l(V)$ može se napisati kao linearna kombinacija elemenata baze

$$F = \sum_{i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_l} F^{j_1\cdots j_l}_{i_1\cdots i_k} E_{j_1} \otimes \cdots \otimes E_{j_l} \otimes \epsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{i_k},$$

gdje je

$$F^{j_1\cdots j_l}_{i_1\cdots i_k} = F(\epsilon^{j_1}, \ldots, \epsilon^{j_l}, E_{i_1}, \ldots, E_{i_k}).$$

Proizvoljan tenzor $F \in T^k_l(V)$ može se napisati kao linearna kombinacija elemenata baze

$$F = \sum_{i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_l} F^{j_1\cdots j_l}_{i_1\cdots i_k} E_{j_1} \otimes \cdots \otimes E_{j_l} \otimes \epsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{i_k},$$

gdje je

$$F^{j_1\cdots j_l}_{i_1\cdots i_k} = F(\epsilon^{j_1}, \ldots, \epsilon^{j_l}, E_{i_1}, \ldots, E_{i_k}).$$

To dokazuje da je riječ o bazi (koeficijenti su jednoznačno odredjeni s F).
Uočimo da je svaki element baze tenzorski produkt tenzora $E_r : V^* \to \mathbf{R}$ i $\epsilon^s : V \to \mathbf{R}$.

Apstraktni tenzorski produkt vektorskih prostora

Cilj: Uvesti T_l^k kao apstraktnu strukturu

$$T_l^k(V) = \overbrace{V^{\cancel{*}} \otimes \cdots \otimes V^{\cancel{*}}}^{l} \otimes \overbrace{V^{*} \otimes \cdots \otimes V^{*}}^{k},$$

gdje izraz na desnoj strani zamišljamo kao skup svih linearnih kombinacija tenzorskih produkata elemenata od V^* i V.

Neka je S skup. *Slobodan vektorski prostor nad* S, $\mathbf{R}S$ je skup svih konačnih linearnih kombinacija elemenata iz S sa koeficijentima iz $\mathbf{R}$.

Neka je S skup. *Slobodan vektorski prostor nad S*, $\mathbf{R}S$ je skup svih konačnih linearnih kombinacija elemenata iz S sa koeficijentima iz $\mathbf{R}$.

def. na očiti način

Uz operacije zbrajanja i množenja skalarom ~~definirane po točkama~~, $\mathbf{R}S$ postaje vektorski prostor.

$$\sum \alpha_i s_i + \sum \beta_i s_i = \sum (\alpha_i + \beta_i) s_i$$

$$k \sum \alpha_i s_i = \sum k\alpha_i s_i$$

"po točkama" uz $\mathbf{R}S \equiv$ funkcije $S \to \mathbf{R}$

Neka je S skup. *Slobodan vektorski prostor nad* S, $\mathbf{R}S$ je skup svih konačnih linearnih kombinacija elemenata iz S sa koeficijentima iz $\mathbf{R}$.

Uz operacije zbrajanja i množenja skalarom definirane po točkama, $\mathbf{R}S$ postaje vektorski prostor.

Baza za $\mathbf{R}S$ je upravo S. To je jasno iz definicije: svaki element prostora $\mathbf{R}S$ može se prikazati kao linearna kombinacija elemenata od S, na jedinstven način.

Neka je S skup. *Slobodan vektorski prostor nad* S, $\mathbf{R}S$ je skup svih konačnih linearnih kombinacija elemenata iz S sa koeficijentima iz $\mathbf{R}$.

Uz operacije zbrajanja i množenja skalarom definirane po točkama, $\mathbf{R}S$ postaje vektorski prostor.

Baza za $\mathbf{R}S$ je upravo S. To je jasno iz definicije: svaki element prostora $\mathbf{R}S$ može se prikazati kao linearna kombinacija elemenata od S, na jedinstven način.

Posebno, $\mathbf{R}S$ je konačnodimenzionalan ako i samo ako je S konačan.

Propozicija (Karakteristično svojstvo slobodnih vektorskih prostora)

Neka je S skup i W vektorski prostor.

v. pr. ž viđen kao skup

$$\mathrm{Hom}_{Sets}(S, W) = \mathrm{Hom}_{Vect}(\mathbf{R}S, W)$$

Propozicija (Karakteristično svojstvo slobodnih vektorskih prostora)

Neka je S skup i W vektorski prostor.

Tada svako preslikavanje $F : S \to W$ ima jedinstveno proširenje do linearnog preslikavanja $F : \mathbf{R}S \to W$.

Neka su V, W konačnodimenzionalni realni vektorski prostori i neka je $\mathcal{R}$ potprostor slobodnog vektorskog prostora $\mathbf{R}(V \times W)$ razapet s elementima

$$a(v, w) - (av, w)$$

$$a(v, w) - (v, aw)$$

$$(v, w) + (v', w) - (v + v', w)$$

$$(v, w) + (v, w') - (v, w + w').$$

Tenzorski produkt od V i W, $V \otimes W$, je kvocijentni prostor $\mathbf{R}(V \times W)/\mathcal{R}$.

Tenzorski produkt od V i W, $V \otimes W$, je kvocijentni prostor $\mathbf{R}(V \times W)/\mathcal{R}$.

Klasa ekvivalencije elementa (v, w) označava se sa $v \otimes w$ i naziva *tenzorskim produktom* od v i w.

Tenzorski produkt od V i W, $V \otimes W$, je kvocijentni prostor $\mathbf{R}(V \times W)/\mathcal{R}$.

Klasa ekvivalencije elementa (v, w) označava se sa $v \otimes w$ i naziva *tenzorskim produktom* od v i w.

Svaki element od $V \otimes W$ može se napisati kao linearna kombinacija elemenata oblika $v \otimes w$, no svaki element nije oblika $v \otimes w$.

Propozicija (Karakteristično svojstvo tenzorskog produkta)

Neka su V, W *konačnodimenzionalni realni vektorski prostori,* $A : V \times W \to X$ **bilinearno** *preslikavanje u vektorski prostor* X.

Propozicija (Karakteristično svojstvo tenzorskog produkta)

Neka su V, W konačnodimenzionalni realni vektorski prostori,
$A : V \times W \to X$ **bilinearno** *preslikavanje u vektorski prostor X.*

Tada postoji jedinstveno **linearno** *preslikavanje $\bar{A} : V \otimes W \to X$ tako da sljedeći dijagram komutira ($\pi(v \times w) = v \otimes w$)*

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\pi"'] & X \\ V \otimes W \arrow[ur, "\bar{A}"'] & \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Bil}(V, W; X) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{vect}}(V \otimes W, X)$

Propozicija

Neka su V, W, X konačnodimenzionalni realni vektorski prostori.

Propozicija

Neka su V, W, X konačnodimenzionalni realni vektorski prostori.

1. *Tada je $V^* \otimes W^*$ kanonski izomorfan s vektorskim prostorom $B(V,W)$ svih bilinearnih formi sa $V \times W$ u $\mathbf{R}$.*

Propozicija

Neka su V, W, X konačnodimenzionalni realni vektorski prostori.

1. *Tada je $V^* \otimes W^*$ kanonski izomorfan s vektorskim prostorom $B(V, W)$ svih bilinearnih formi sa $V \times W$ u $\mathbf{R}$.*
2. *Ako je (E_i) baza za V, (F_j) baza za W, tada je skup svih elemenata oblika $E_i \otimes F_j$ baza za $V \otimes W$. Stoga je $\dim(V \otimes W) = (\dim V)(\dim W)$.*

Propozicija

Neka su V, W, X konačnodimenzionalni realni vektorski prostori.

1. *Tada je $V^* \otimes W^*$ kanonski izomorfan s vektorskim prostorom $B(V, W)$ svih bilinearnih formi sa $V \times W$ u $\mathbf{R}$.*
2. *Ako je (E_i) baza za V, (F_j) baza za W, tada je skup svih elemenata oblika $E_i \otimes F_j$ baza za $V \otimes W$. Stoga je $\dim(V \otimes W) = (\dim V)(\dim W)$.*
3. *Postoji jedinstveni izomorfizam sa $V \otimes (W \otimes X) \to (V \otimes W) \otimes X$ koji preslikava $v \otimes (w \otimes x)$ u $(v \otimes w) \otimes x$.*

Dokaz

1° Definiramo

$$\Phi : V^* \times W^* \to B(V, W)$$

$$\phi(\omega, \eta)(v, w) = \omega(v)\eta(w).$$

Dokaz

1° Definiramo

$$\Phi : V^* \times W^* \to B(V, W)$$

$$\phi(\omega, \eta)(v, w) = \omega(v)\eta(w).$$

Lako se pokaže da je Φ bilinearno preslikavanje, pa se po Karakterističnom svojstvu faktorizira do jedinstvenog linearnog preslikavanja $\bar{\Phi} : V^* \otimes W^* \to B(V, W)$.

Dokaz

1° Definiramo

$$\Phi : V^* \times W^* \to B(V, W)$$

$$\phi(\omega, \eta)(v, w) = \omega(v)\eta(w).$$

Lako se pokaže da je Φ bilinearno preslikavanje, pa se po Karakterističnom svojstvu faktorizira do jedinstvenog linearnog preslikavanja $\bar{\Phi} : V^* \otimes W^* \to B(V, W)$.

Provjerimo da je $\bar{\Phi}$ izomorfizam.

Dokaz - nastavak

Neka su (E_i) i (F_j) baze za V i W, (ϵ^i), (φ^j) njihove dualne baze.

Dokaz - nastavak

Neka su (E_i) i (F_j) baze za V i W, (ϵ^i), (φ^j) njihove dualne baze.

Prostor $V^* \otimes W^*$ razapet je elementima oblika $\omega \otimes \eta$, $\omega \in V^*$, $\eta \in W^*$, stoga se svaki element $\tau \in V^* \otimes W^*$ može napisati u obliku

$$\tau = \sum_{i,j} \tau_{ij} \epsilon^i \otimes \varphi^j.$$

Dokaz - nastavak

Neka su (E_i) i (F_j) baze za V i W, (ϵ^i), (φ^j) njihove dualne baze.

Prostor $V^* \otimes W^*$ razapet je elementima oblika $\omega \otimes \eta$, $\omega \in V^*$, $\eta \in W^*$, stoga se svaki element $\tau \in V^* \otimes W^*$ može napisati u obliku

$$\tau = \sum_{i,j} \tau_{ij} \epsilon^i \otimes \varphi^j.$$

Sada definiramo preslikavanje $\Psi : B(V, W) \to V^* \otimes W^*$

$$\Psi(B) = \sum_{k,l} B(E_k, F_l) \epsilon^k \otimes \varphi^l.$$

Dokaz - nastavak

Neka su (E_i) i (F_j) baze za V i W, (ϵ^i), (φ^j) njihove dualne baze.

Prostor $V^* \otimes W^*$ razapet je elementima oblika $\omega \otimes \eta$, $\omega \in V^*$, $\eta \in W^*$, stoga se svaki element $\tau \in V^* \otimes W^*$ može napisati u obliku

$$\tau = \sum_{i,j} \tau_{ij} \epsilon^i \otimes \varphi^j.$$

Sada definiramo preslikavanje $\Psi : B(V, W) \to V^* \otimes W^*$

$$\Psi(B) = \sum_{k,l} B(E_k, F_l) \epsilon^k \otimes \varphi^l.$$

Lako se vidi da je Ψ inverz od $\bar{\Phi}$ i obratno. $\square$

Korolar

Neka je V konačnodimenzionalan realni vektorski prostor. Tada je prostor $T_l^k(V)$ svih (k,l)-tenzora na V kanonski izomorfan sa
$$\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{l} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{k}.$$

Tenzori na mnogostrukostima

Neka je M glatka mnogostrukost. Tenzore na M konstruiramo na vektorskom prostoru T_pM.

Tenzori na mnogostrukostima

Neka je M glatka mnogostrukost. Tenzore na M konstruiramo na vektorskom prostoru T_pM.

Oznaka za prostor tenzora tipa (k,l) u točki $p \in M$ je $T^k_l(T_pM)$.

Tenzori na mnogostrukostima

Neka je M glatka mnogostrukost. Tenzore na M konstruiramo na vektorskom prostoru T_pM.

Oznaka za prostor tenzora tipa (k, l) u točki $p \in M$ je $T_l^k(T_pM)$.

Vektorski svežanj tenzora tipa (k, l) je

$$T_l^k(M) = \coprod_{p \in M} T_l^k(T_pM).$$

Tenzori na mnogostrukostima

Neka je M glatka mnogostrukost. Tenzore na M konstruiramo na vektorskom prostoru T_pM.

Oznaka za prostor tenzora tipa (k,l) u točki $p \in M$ je $T_l^k(T_pM)$.

Vektorski svežanj tenzora tipa (k,l) je

$$T_l^k(M) = \coprod_{p \in M} T_l^k(T_pM).$$

Proizvoljan tenzor $F \in T_l^k(T_pM)$ može se lokalno napisati kao

$$F = \sum_{i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_l} F_{j_1\dots j_l}^{i_1\dots i_k} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_l}} \otimes dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}.$$

Tenzorsko polje je glatki prerez nekog tenzorskog svežnja $T^k_l(M)$.

Tenzorsko polje je glatki prerez nekog tenzorskog svežnja $T_l^k(M)$.

Oznake: $\mathcal{T}^k$, $\mathcal{T}_l$, $\mathcal{T}_l^k$ za glatke prereze svežnjeva $T^k(M)$, $T_l(M)$, $T_l^k(M)$ redom.

Tenzorsko polje je glatki prerez nekog tenzorskog svežnja $T^k_l(M)$.

Oznake: $\mathcal{T}^k$, $\mathcal{T}_l$, $\mathcal{T}^k_l$ za glatke prereze svežnjeva $T^k(M)$, $T_l(M)$, $T^k_l(M)$ redom.

Povlak

Kao i glatka kovektorska polja, glatka kovarijantna tenzorska polja mogu se *povući* pomoću glatkih preslikavanja:

Povlak

Kao i glatka kovektorska polja, glatka kovarijantna tenzorska polja mogu se *povući* pomoću glatkih preslikavanja:

Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje. Za svaki $k \geq 0$ i $p \in M$ definiramo preslikavanje $F^* : T^k(T_{F(p)}N) \to T^k(T_pM)$, kojeg nazivamo *povlak*

$$F^*(S)(X_1, \dots X_k) = S(F_*X_1, \dots, F_*X_k).$$

Povlak

Kao i glatka kovektorska polja, glatka kovarijantna tenzorska polja mogu se *povući* pomoću glatkih preslikavanja:

Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje. Za svaki $k \geq 0$ i $p \in M$ definiramo preslikavanje $F^* : T^k(T_{F(p)}N) \to T^k(T_pM)$, kojeg nazivamo *povlak*

$$F^*(S)(X_1, \dots X_k) = S(F_*X_1, \dots, F_*X_k).$$

Uočiti svojstva povlaka.

Simetrični tenzori

Simetrični tenzori su oni čija se vrijednost ne mijenja zamjenom argumenata.

Simetrični tenzori

Simetrični tenzori su oni čija se vrijednost ne mijenja zamjenom argumenata.

Neka je V konačnodimenzionalan realan vektorski prostor.

Simetrični tenzori

Simetrični tenzori su oni čija se vrijednost ne mijenja zamjenom argumenata.

Neka je V konačnodimenzionalan realan vektorski prostor.

k-kovarijantan tenzor je *simetričan* ako je

$$T(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_k) = \\ T(X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_k), \;\; 1 \le i < j \le k.$$

Ideja: $T(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3, \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{pmatrix}$

Simetrični tenzori

Simetrični tenzori su oni čija se vrijednost ne mijenja zamjenom argumenata.

Neka je V konačnodimenzionalan realan vektorski prostor.

k-kovarijantan tenzor je *simetričan* ako je

$$T(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots, X_k) = T(X_1, \ldots, X_j, \ldots, X_i, \ldots, X_k), \; 1 \leq i < j \leq k.$$

Skup svih simetričnih kovarijantnih k-tenzora na V označavamo sa $\Sigma^k(V)$. To je potprostor od $T^k(V)$.

Projekcija $\mathrm{Sym}\colon T^k(V) \to \Sigma^k(V)$ naziva se *simetrizacijom* i definira na sljedeći način.

Projekcija $\mathrm{Sym}: T^k(V) \to \Sigma^k(V)$ naziva se *simetrizacijom* i definira na sljedeći način.

Neka je S_k simetrična grupa od k elemenata, $\sigma \in S_k$, $T \in T^k(V)$.

Projekcija $\mathrm{Sym}\colon T^k(V) \to \Sigma^k(V)$ naziva se *simetrizacijom* i definira na sljedeći način.

Neka je S_k simetrična grupa od k elemenata, $\sigma \in S_k$, $T \in T^k(V)$.

Definiramo najprije tenzor

$$^{\sigma}T((X_1, \dots, X_k) = T((X_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, X_{\sigma^{-1}(k)}).$$

Projekcija $\mathrm{Sym}\colon T^k(V) \to \Sigma^k(V)$ naziva se *simetrizacijom* i definira na sljedeći način.

Neka je S_k simetrična grupa od k elemenata, $\sigma \in S_k$, $T \in T^k(V)$.

Definiramo najprije tenzor

$$^{\sigma}T((X_1, \ldots, X_k) = T((X_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, X_{\sigma^{-1}(k)}).$$

Uočimo da vrijedi $^{\tau}(^{\sigma}T) =^{\tau\sigma} T$.

Projekcija $\mathrm{Sym}\colon T^k(V) \to \Sigma^k(V)$ naziva se *simetrizacijom* i definira na sljedeći način.

Neka je S_k simetrična grupa od k elemenata, $\sigma \in S_k$, $T \in T^k(V)$.

Definiramo najprije tenzor

$$^{\sigma}T((X_1, \ldots, X_k) = T((X_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, X_{\sigma^{-1}(k)}).$$

Uočimo da vrijedi $^{\tau}(^{\sigma}T) =^{\tau\sigma} T$.

Sada definiramo

$$\mathrm{Sym}\, T = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} {}^{\sigma}T.$$

Propozicija (Svojstva simetrizacije)

1. *Za svaki kovarijantni tenzor T, $\mathrm{Sym}\, T$ je simetričan tenzor.*

Propozicija (Svojstva simetrizacije)

1. *Za svaki kovarijantni tenzor T, $\mathrm{Sym}\, T$ je simetričan tenzor.*
2. *Tenzor T je simetričan ako i samo ako je $\mathrm{Sym}\, T = T$.*

Za simetrične tenzore S, T na V, tenzorski produkt $S \otimes T$ nije općenito simetričan tenzor.

Za simetrične tenzore S, T na V, tenzorski produkt $S \otimes T$ nije općenito simetričan tenzor.

Za simetrične tenzore $S \in \Sigma^k(V),\ T \in \Sigma^l(V)$ definiramo simetričan produkt kao $(k+l)$-tenzor ST

$$ST = \mathrm{Sym}(S \otimes T).$$

Za simetrične tenzore S, T na V, tenzorski produkt $S \otimes T$ nije općenito simetričan tenzor.

Za simetrične tenzore $S \in \Sigma^k(V),\ T \in \Sigma^l(V)$ definiramo simetričan produkt kao $(k+l)$-tenzor ST

$$ST = \mathrm{Sym}(S \otimes T).$$

Ili eksplicitno

$$ST(X_1, \ldots, X_{k+l}) = \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} S(X_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, X_{\sigma^{-1}(k)}) T(X_{\sigma^{-1}(k+1)}, \ldots, X_{\sigma^{-1}(k+l)}).$$

Propozicija (Svojstva simetričnog produkta)

1. *Operacija simetričnog produkta je simetrična i bilinearna.*

Propozicija (Svojstva simetričnog produkta)

1. *Operacija simetričnog produkta je simetrična i bilinearna.*
2. *Ako su ω i η kovektori, tada*

$$\omega\eta = \frac{1}{2}(\omega \otimes \eta + \eta \otimes \omega).$$

Diferencijalne forme i vanjska derivacija

Alternirajući tenzori su oni tenzori koji mijenjaju predznak svaki put kad se zamijene dvije varijable.

Diferencijalne forme i vanjska derivacija

Alternirajući tenzori su oni tenzori koji mijenjaju predznak svaki put kad se zamijene dvije varijable.

Neka je V konačnodimenzionalan realan vektorski prostor.

Diferencijalne forme i vanjska derivacija

Alternirajući tenzori su oni tenzori koji mijenjaju predznak svaki put kad se zamijene dvije varijable.

Neka je V konačnodimenzionalan realan vektorski prostor.

k-kovarijantni tenzor nazivamo *alternirajućim* ako je

$$T(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_k) = \\ - T(X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_k), \;\; 1 \leq i < j \leq k.$$

Diferencijalne forme i vanjska derivacija

Alternirajući tenzori su oni tenzori koji mijenjaju predznak svaki put kad se zamijene dvije varijable.

Neka je V konačnodimenzionalan realan vektorski prostor.

k-kovarijantni tenzor nazivamo *alternirajućim* ako je

$$T(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots, X_k) = \\ - T(X_1, \ldots, X_j, \ldots, X_i, \ldots, X_k), \;\; 1 \leq i < j \leq k.$$

Skup svih alternirajućih k-tenzora označavamo sa $\Lambda^k(V)$. Njegove elemente takodjer nazivamo *k-kovektorima* ili *vanjskim k-formama*.

Propozicija

Neka je Ω *k-tenzor za koji vrijedi* $\Omega(X_1, \dots, X_k) = 0$*, za linearno zavisne* $X_1, \dots X_k$*.*

Propozicija

Neka je Ω *k-tenzor za koji vrijedi* $\Omega(X_1, \dots, X_k) = 0$*, za linearno zavisne* $X_1, \dots X_k$.

Tada je Ω *alternirajući tenzor i obratno.*

Dokaz. Neka su $X_1, \dots X_k$ linearno zavisni i $\Omega(X_1, \dots, X_k) = 0$.

je za bilo koje lin. zav.,

Dokaz. Neka ~~su~~ $X_1, \dots X_k$ ~~linearno zavisni i~~ $\Omega(X_1, \dots, X_k) = 0$.

Tada je, posebno, $\Omega = 0$ ako su dva vektora jednaka.

Dokaz. Neka su $X_1, \ldots X_k$ linearno zavisni i $\Omega(X_1, \ldots, X_k) = 0$.

Tada je, posebno, $\Omega = 0$ ako su dva vektora jednaka.

Iz toga slijedi

$$0 = \Omega(X_1, \ldots, X_i + X_j, \ldots, X_i + X_j, \ldots, X_k) =$$

$$\Omega(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_i, \ldots, X_k) + \Omega(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots, X_k) +$$
$$\Omega(X_1, \ldots, X_j, \ldots, X_i, \ldots, X_k) + \Omega(X_1, \ldots, X_j, \ldots, X_j, \ldots, X_k).$$

Dokaz. Neka su $X_1, \dots X_k$ linearno zavisni i $\Omega(X_1, \dots, X_k) = 0$.

Tada je, posebno, $\Omega = 0$ ako su dva vektora jednaka.

Iz toga slijedi

$$0 = \Omega(X_1, \dots, X_i + X_j, \dots, X_i + X_j, \dots, X_k) =$$

$$\Omega(X_1, \dots, X_i, \dots, X_i, \dots, X_k) + \Omega(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_k) +$$
$$\Omega(X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_k) + \Omega(X_1, \dots, X_j, \dots, X_j, \dots, X_k).$$

Odavde slijedi da je Ω alternirajući.

Dokaz. Neka su $X_1, \dots X_k$ linearno zavisni i $\Omega(X_1, \dots, X_k) = 0$.

Tada je, posebno, $\Omega = 0$ ako su dva vektora jednaka.

Iz toga slijedi

$$0 = \Omega(X_1, \dots, X_i + X_j, \dots, X_i + X_j, \dots, X_k) =$$

$$\Omega(X_1, \dots, X_i, \dots, X_i, \dots, X_k) + \Omega(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_k) +$$
$$\Omega(X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_k) + \Omega(X_1, \dots, X_j, \dots, X_j, \dots, X_k).$$

Odavde slijedi da je Ω alternirajući.

Dokažimo obrat. Uočimo najprije da ako je Ω alternirajući tenzor, tada je

$$\Omega(X_1, \dots, X_i, \dots, X_i, \dots, X_k) = 0.$$

Dokaz. Neka su $X_1, \ldots X_k$ linearno zavisni i $\Omega(X_1, \ldots, X_k) = 0$.

Tada je, posebno, $\Omega = 0$ ako su dva vektora jednaka.

Iz toga slijedi

$$0 = \Omega(X_1, \ldots, X_i + X_j, \ldots, X_i + X_j, \ldots, X_k) =$$

$$\Omega(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_i, \ldots, X_k) + \Omega(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots, X_k) +$$
$$\Omega(X_1, \ldots, X_j, \ldots, X_i, \ldots, X_k) + \Omega(X_1, \ldots, X_j, \ldots, X_j, \ldots, X_k).$$

Odavde slijedi da je Ω alternirajući.

Dokažimo obrat. Uočimo najprije da ako je Ω alternirajući tenzor, tada je

$$\Omega(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_i, \ldots, X_k) = 0.$$

Ako su $X_1, \ldots X_k$ linearno zavisni, tada se jedan od vektora može izraziti kao linearna kombinacija drugih, odakle slijedi tvrdnja. $\square$

Iz prethodnog slijedi da ne postoje ne-nul alternirajući k-tenzori na V za koje je $k > \dim V$.

Iz prethodnog slijedi da ne postoje ne-nul alternirajući k-tenzori na V za koje je $k > \dim V$.

Svaki 0-tenzor (realni broj) i svaki 1-tenzor (kovektor) su alternirajući (nema argumenata koji se zamjenjuju).

Iz prethodnog slijedi da ne postoje ne-nul alternirajući k-tenzori na V za koje je $k > \dim V$.

Svaki 0-tenzor (realni broj) i svaki 1-tenzor (kovektor) su alternirajući (nema argumenata koji se zamjenjuju).

Alternirajući 2-tenzor je antisimetrična bilinearna forma na V.

Iz prethodnog slijedi da ne postoje ne-nul alternirajući k-tenzori na V za koje je $k > \dim V$.

Svaki 0-tenzor (realni broj) i svaki 1-tenzor (kovektor) su alternirajući (nema argumenata koji se zamjenjuju).

Alternirajući 2-tenzor je antisimetrična bilinearna forma na V.

Svaki se 2-tenzor (za tenzore višeg reda ne vrijedi) može napisati kao suma alternirajućeg i simetričnog tenzora

$$T(X,Y) = \frac{1}{2}\underbrace{(T(X,Y) - T(Y,X))}_{\in\Lambda^2(V)} + \frac{1}{2}\underbrace{(T(X,Y) + T(Y,X))}_{\in\Sigma^2(V)}.$$

Projekcija $\mathrm{Alt}\colon T^k(V) \to \Lambda^k(V)$ naziva se *alternirajućom projekcijom* i definira na sljedeći način

$$\mathrm{Alt}\, T = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\mathrm{sgn} \sigma)({}^{\sigma} T).$$

Projekcija $\mathrm{Alt}\colon T^k(V) \to \Lambda^k(V)$ naziva se *alternirajućom projekcijom* i definira na sljedeći način

$$\mathrm{Alt}\, T = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\mathrm{sgn}\sigma)({}^{\sigma} T).$$

Primjer. Ako je T 2-tenzor, tada je

$$\mathrm{Alt}\, T(X, Y) = \frac{1}{2} \left(T(X, Y) - T(Y, X) \right).$$

Projekcija Alt: $T^k(V) \to \Lambda^k(V)$ naziva se *alternirajućom projekcijom* i definira na sljedeći način

$$\mathrm{Alt}\, T = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\mathrm{sgn}\sigma)({}^{\sigma}T).$$

Primjer. Ako je T 2-tenzor, tada je

$$\mathrm{Alt}\, T(X, Y) = \frac{1}{2}\left(T(X, Y) - T(Y, X)\right).$$

Ako je T 3-tenzor, tada je

$$\mathrm{Alt}\, T(X, Y, Z) = \frac{1}{6}\big(T(X, Y, Z) + T(Y, Z, X) + T(Z, X, Y) -$$

$$T(Y, X, Z) - T(X, Z, Y) - T(Z, Y, X)\big).$$

Propozicija (Svojstva alternirajuće projekcije)

1. *Za svaki kovarijantni tenzor T, $\mathrm{Alt}\, T$ je alternirajući tenzor.*

Propozicija (Svojstva alternirajuće projekcije)

1. *Za svaki kovarijantni tenzor* T, $\mathrm{Alt}\, T$ *je alternirajući tenzor.*

2. *Tenzor* T *je alternirajući ako i samo ako je* $\mathrm{Alt}\, T = T$.

Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor, $(\epsilon^1, \ldots, \epsilon^n)$ baza za V^*.

Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor, $(\epsilon^1, \ldots, \epsilon^n)$ baza za V^*.

Za svaki multi-indeks $I = (i_1, \ldots, i_k)$ duljine k, $1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n$, definiramo kovarijantni k-tenzor ϵ^I

$$\epsilon^I(X_1, \ldots, X_k) = \det \begin{pmatrix} \epsilon^{i_1}(X_1) & \ldots & \epsilon^{i_1}(X_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \epsilon^{i_k}(X_1) & \ldots & \epsilon^{i_k}(X_k) \end{pmatrix} =$$

$$\det \begin{pmatrix} X_1^{i_1} & \ldots & X_k^{i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ X_1^{i_k} & \ldots & X_k^{i_k} \end{pmatrix}.$$

Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor, $(\epsilon^1, \dots, \epsilon^n)$ baza za V^*.

Za svaki multi-indeks $I = (i_1, \dots, i_k)$ duljine k, $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$, definiramo kovarijantni k-tenzor ϵ^I

$$\epsilon^I(X_1, \dots, X_k) = \det \begin{pmatrix} \epsilon^{i_1}(X_1) & \dots & \epsilon^{i_1}(X_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \epsilon^{i_k}(X_1) & \dots & \epsilon^{i_k}(X_k) \end{pmatrix} =$$

$$\det \begin{pmatrix} X_1^{i_1} & \dots & X_k^{i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ X_1^{i_k} & \dots & X_k^{i_k} \end{pmatrix}.$$

Očito je kovarijantni k-tenzor ϵ^I alternirajući tenzor (iz svojstava determinante). Nazivamo ga *elementarnim alternirajućim tenzorom*.

Primjer.

Na $(\mathbf{R}^3)^*$ za dualnu bazu (e^1, e^2, e^3) standardne baze (e_1, e_2, e_3) imamo sljedeće (netrivijalne) elementarne alternirajuće tenzore

$$e^1 = X^1, \;\; e^2 = X^2, \;\; e^3 = X^3,$$

$$\begin{aligned} e^{12}(X, Y) = X^1 Y^2 - Y^1 X^2, \;\; e^{13}(X, Y) &= X^1 Y^3 - Y^1 X^3, \\ e^{23}(X, Y) &= X^2 Y^3 - Y^2 X^3, \end{aligned}$$

$$e^{123}(X, Y, Z) = \det(X, Y, Z).$$

Primjer.

Na $(\mathbf{R}^3)^*$ za dualnu bazu (e^1, e^2, e^3) standardne baze (e_1, e_2, e_3) imamo sljedeće (netrivijalne) elementarne alternirajuće tenzore

$$e^1 = X^1, \;\; e^2 = X^2, \;\; e^3 = X^3,$$

$$\begin{aligned} e^{12}(X,Y) = X^1 Y^2 - Y^1 X^2, \;\; e^{13}(X,Y) = X^1 Y^3 - Y^1 X^3, \\ e^{23}(X,Y) = X^2 Y^3 - Y^2 X^3, \end{aligned}$$

$$e^{123}(X,Y,Z) = \det(X,Y,Z).$$

Tenzori kojima se ponavlja indeks su trivijalni.

Propozicija

Neka je V *n-dimenzionalni vektorski prostor,* (ϵ^i) *baza za* V^**.*

Propozicija

Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor, (ϵ^i) baza za V^*.

Tada je za svaki $k \leq n$ skup vektora $\{\epsilon^I\}$, gdje je I rastući multi-indeks duljine k, baza za $\Lambda^k(V)$.

Propozicija

Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor, (ϵ^i) baza za V^*.

Tada je za svaki $k \leq n$ skup vektora $\{\epsilon^I\}$, gdje je I rastući multi-indeks duljine k, baza za $\Lambda^k(V)$.

Stoga je

$$\mathrm{dim}\Lambda^k(V) = \binom{n}{k}.$$

Ako je $k > n$, tada je $\mathrm{dim}\Lambda^k(V) = 0$.

Za alternirajuće tenzore definiran je bilinearni, asocijativni i antikomutativan produkt, tzv. *wedge* (*vanjski*) produkt.

Za alternirajuće tenzore definiran je bilinearni, asocijativni i antikomutativan produkt, tzv. *wedge* (*vanjski*) produkt.

Ako su $\omega \in \Lambda^k(V)$, $\eta \in \Lambda^l(V)$, tada je $\omega \wedge \eta$ alternirajući $(k+l)$-tenzor

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!\,l!}\mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta)$$

Za alternirajuće tenzore definiran je bilinearni, asocijativni i antikomutativan produkt, tzv. *wedge* (*vanjski*) produkt.

Ako su $\omega \in \Lambda^k(V)$, $\eta \in \Lambda^l(V)$, tada je $\omega \wedge \eta$ alternirajući $(k+l)$-tenzor

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta)$$

Za kovektore, njegova definicija glasi

$$\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k(X_1, \ldots, X_k) = \det(\langle \omega^i, X_j \rangle) = \det(\omega^i(X_j))$$

te je proširujemo po linearnosti.

Primjer.

Primjer k-formi na $\mathbf{R}^3$:

1. 0-forma je neprekidna realna funkcija,

Primjer.

Primjer k-formi na $\mathbf{R}^3$:

1. 0-forma je neprekidna realna funkcija,
2. 1-forma je oblika $f\,dx + g\,dy + h\,dz$, gdje su f, g, h neprekidne funkcije,

Primjer.

Primjer k-formi na $\mathbf{R}^3$:

1. 0-forma je neprekidna realna funkcija,
2. 1-forma je oblika $f\,dx + g\,dy + h\,dz$, gdje su f, g, h neprekidne funkcije,
3. 2-forma je oblika $f\,dx \wedge dy + g\,dx \wedge dz + h\,dy \wedge d\overset{z}{\cancel{x}}$, gdje su f, g, h neprekidne funkcije, primjerice

$$\omega = (\sin xy)\,dx \wedge dy,$$

$$\eta = dx \wedge dy + dx \wedge dz + dy \wedge dz.$$

Primjer.

Primjer k-formi na $\mathbf{R}^3$:

1. 0-forma je neprekidna realna funkcija,
2. 1-forma je oblika $f\,dx + g\,dy + h\,dz$, gdje su f, g, h neprekidne funkcije,
3. 2-forma je oblika $f\,dx \wedge dy + g\,dx \wedge dz + h\,dy \wedge dx$, gdje su f, g, h neprekidne funkcije, primjerice

$$\omega = (\sin xy)\,dx \wedge dy,$$

$$\eta = dx \wedge dy + dx \wedge dz + dy \wedge dz.$$

4. 3-forma je oblika $f\,dx \wedge dy \wedge dz$.

Primjer.

Odredite vanjski produkt 1-formi (kovektora) $\omega = x\,dx - y\,dy$ i $\eta = z\,dx + x\,dz$.

Primjer.

Odredite vanjski produkt 1-formi (kovektora) $\omega = x\,dx - y\,dy$ i $\eta = z\,dx + x\,dz$.

Imamo

$$\omega \wedge \eta = x^2\,dx \wedge dz + yz\,dx \wedge dy - xy\,dy \wedge dz.$$

Za vektorski prostor V definiramo prostor $\Lambda^*(V)$ kao direktnu sumu

$$\Lambda^*(V) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k(V).$$

Za vektorski prostor V definiramo prostor $\Lambda^*(V)$ kao direktnu sumu

$$\Lambda^*(V) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k(V).$$

Vrijedi $\dim \Lambda^*(V) = 2^n$ (slijedi iz Propozicije 0.9).

Za vektorski prostor V definiramo prostor $\Lambda^*(V)$ kao direktnu sumu

$$\Lambda^*(V) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k(V).$$

Vrijedi $\dim \Lambda^*(V) = 2^n$ (slijedi iz Propozicije 0.9).

Zajedno s operacijom vanjskog produkta, $\Lambda^*(V)$ je asocijativna (nekomutativna) algebra, tzv. *vanjska (Grassmannova) algebra* od V.

Za vektorski prostor V definiramo prostor $\Lambda^*(V)$ kao direktnu sumu

$$\Lambda^*(V) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k(V).$$

Vrijedi $\dim \Lambda^*(V) = 2^n$ (slijedi iz Propozicije 0.9).

Zajedno s operacijom vanjskog produkta, $\Lambda^*(V)$ je asocijativna (nekomutativna) algebra, tzv. *vanjska (Grassmannova) algebra* od V.

Štoviše, $\Lambda^*(V)$ je superkomutativna $(\overset{k}{\omega} \wedge \overset{l}{\eta} = (-1)^{kl}\eta \wedge \omega)$ i graduirana $\big((\Lambda^k(V))(\Lambda^l(V)) \subset \Lambda^{k+l}(V)\big)$ algebra.

Diferencijalne forme na glatkoj mnogostrukosti.

Neka je M glatka mnogostrukost. Podskup od $T^k(M)$ svih alternirajućih tenzora definiramo kao

$$\Lambda^k M = \coprod_{p \in M} \Lambda^k(T_p M).$$

Diferencijalne forme na glatkoj mnogostrukosti.

Neka je M glatka mnogostrukost. Podskup od $T^k(M)$ svih alternirajućih tenzora definiramo kao

$$\Lambda^k M = \coprod_{p \in M} \Lambda^k(T_p M).$$

Kao i prije može se pokazati da je $\Lambda^k M$ je glatki vektorski svežanj nad M ranga $\binom{n}{k}$.

Diferencijalne forme na glatkoj mnogostrukosti.

Neka je M glatka mnogostrukost. Podskup od $T^k(M)$ svih alternirajućih tenzora definiramo kao

$$\Lambda^k M = \coprod_{p \in M} \Lambda^k(T_p M).$$

Kao i prije može se pokazati da je $\Lambda^k M$ je glatki vektorski svežanj nad M ranga $\binom{n}{k}$.

Prerez svežnja $\Lambda^k M$ naziva se *diferencijalnom k-formom*.

Diferencijalne forme na glatkoj mnogostrukosti.

Neka je M glatka mnogostrukost. Podskup od $T^k(M)$ svih alternirajućih tenzora definiramo kao

$$\Lambda^k M = \coprod_{p \in M} \Lambda^k(T_p M).$$

Kao i prije može se pokazati da je $\Lambda^k M$ je glatki vektorski svežanj nad M ranga $\binom{n}{k}$.

Prerez svežnja $\Lambda^k M$ naziva se *diferencijalnom k-formom*.

Broj k naziva se *stupnjem forme*. Vektorski prostor glatkih prereza od $\Lambda^k M$ označavamo sa $\mathcal{A}^k(M)$.

U glatkoj koordinatnoj karti, k-formu možemo zapisati kao

$$\omega = \sum\nolimits_I' \omega_I \, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \sum\nolimits_I' \omega_I \, dx^I,$$

gdje $'$ označava sumaciju samo po rastućim multi-indeksima $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$.

U glatkoj koordinatnoj karti, k-formu možemo zapisati kao

$$\omega = {\sum_I}' \omega_I \, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = {\sum_I}' \omega_I \, dx^I,$$

gdje $'$ označava sumaciju samo po rastućim multi-indeksima $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$.

Definiramo

$$\mathcal{A}^*(M) = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{A}^k(M).$$

U glatkoj koordinatnoj karti, k-formu možemo zapisati kao

$$\omega = \sum_I{}' \omega_I \, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \sum_I{}' \omega_I \, dx^I,$$

gdje $'$ označava sumaciju samo po rastućim multi-indeksima $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$.

Definiramo

$$\mathcal{A}^*(M) = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{A}^k(M).$$

Uz vanjski produkt, $\mathcal{A}^*(M)$ postaje asocijativna, superkomutativna graduirana algebra.

Vanjska derivacija.

Neka je M glatka mnogostrukost. Pokazat ćemo da postoji diferencijalni operator $d : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k+1}(M)$ koji zadovoljava

$$d(d(\omega)) = 0.$$

Vanjska derivacija.

Neka je M glatka mnogostrukost. Pokazat ćemo da postoji diferencijalni operator $d : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k+1}(M)$ koji zadovoljava

$$d(d(\omega)) = 0.$$

Operator d bit će definiran u koordinatama

$$d\left({\sum}'_J \omega_J dx^J\right) = {\sum}'_J d\omega_J \wedge dx^J, \qquad (1)$$

gdje je $d\omega_J$ diferencijal funkcije ω_J.

Teorem (Vanjska derivacija)

Postoje jedinstvena linearna preslikavanja $d : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k+1}(M)$*,* $k \geq 0$*, koja zadovoljavaju:*

Teorem (Vanjska derivacija)

Postoje jedinstvena linearna preslikavanja $d : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k+1}(M)$, $k \geq 0$, *koja zadovoljavaju:*

1. *Ako je* f *realna, glatka funkcija (0-forma), tada je* df *diferencijal funkcije* f

$$df(X) = Xf.$$

Teorem (Vanjska derivacija)

Postoje jedinstvena linearna preslikavanja $d : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k+1}(M)$, $k \geq 0$, *koja zadovoljavaju:*

1. *Ako je* f *realna, glatka funkcija (0-forma), tada je* df *diferencijal funkcije* f

$$df(X) = Xf.$$

2. *Ako je* $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$, $\eta \in \mathcal{A}^l(M)$, *tada je*

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

Teorem (Vanjska derivacija)

Postoje jedinstvena linearna preslikavanja $d : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k+1}(M)$, $k \geq 0$, *koja zadovoljavaju:*

1. *Ako je* f *realna, glatka funkcija (0-forma), tada je* df *diferencijal funkcije* f

$$df(X) = Xf.$$

2. *Ako je* $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$, $\eta \in \mathcal{A}^l(M)$, *tada je*

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

3. $d \circ d = 0$.

Teorem - nastavak

Taj operator ima i sljedeća svojstva

1. *U svakoj glatkoj koordinatnoj karti preslikavanje d je dano sa (1).*

Teorem - nastavak

Taj operator ima i sljedeća svojstva

1. *U svakoj glatkoj koordinatnoj karti preslikavanje d je dano sa (1).*
2. *Preslikavanje d je lokalne prirode: ako je $\omega = \omega'$ na otvorenom skupu $U \subset M$, tada je $d\omega = d\omega'$ na U.*

Teorem - nastavak

Taj operator ima i sljedeća svojstva

1. *U svakoj glatkoj koordinatnoj karti preslikavanje* d *je dano sa (1).*
2. *Preslikavanje* d *je lokalne prirode: ako je* $\omega = \omega'$ *na otvorenom skupu* $U \subset M$*, tada je* $d\omega = d\omega'$ *na* U*.*
3. d *komutira s povlakom: ako je* $F : M \to N$ *glatko preslikavanje, te ako je* ω *forma na* N*, tada je*

$$d(F^*\omega) = F^*(d\omega).$$

Teorem - nastavak

Taj operator ima i sljedeća svojstva

1. *U svakoj glatkoj koordinatnoj karti preslikavanje d je dano sa (1).*
2. *Preslikavanje d je lokalne prirode: ako je $\omega = \omega'$ na otvorenom skupu $U \subset M$, tada je $d\omega = d\omega'$ na U.*
3. *d komutira s povlakom: ako je $F : M \to N$ glatko preslikavanje, te ako je ω forma na N, tada je*

$$d(F^*\omega) = F^*(d\omega).$$

(Dokaz je uglavnom napravljen u kolegiju Integrali funkcija više varijabli.)

Primjer.

Neka je ω 1-forma

$$\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

za neke glatke funkcije P, Q, R.

Primjer.

Neka je ω 1-forma

$$\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

za neke glatke funkcije P, Q, R.

Tada je $d\omega$ sljedeća 2-forma

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) dx \wedge dz + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz.$$

Primjer.

Neka je ω 2-forma

$$\omega = \alpha\, dx \wedge dy + \beta\, dx \wedge dz + \gamma\, dy \wedge dz.$$

Primjer.

Neka je ω 2-forma

$$\omega = \alpha\, dx \wedge dy + \beta\, dx \wedge dz + \gamma\, dy \wedge dz.$$

Tada je $d\omega$ sljedeća 3-forma

$$d\omega = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) dx \wedge dy \wedge dz.$$