GLATKE I RIEMANNOVE MNOGOSTRUKOSTI

Željka Milin-Šipuš, Pavle Pandžić i Juraj Šiftar

Drugi dio standardnog poslijediplomskog kolegija **Geometrija i topologija**. Izvodi se u ljetnom semestru (30 sati predavanja).

Nivo-skupovi

Neka je $F : M \to N$ preslikavanje, $c \in N$.

Nivo-skupovi

Neka je $F : M \to N$ preslikavanje, $c \in N$.

Skup

$$F^{-1}(c) = \{x \in M : F(x) = c\}$$

nazivamo nivo-skupom od F.

Nivo-skupovi

Neka je $F : M \to N$ preslikavanje, $c \in N$.

Skup
$$F^{-1}(c) = \{x \in M : F(x) = c\}$$
nazivamo nivo-skupom od F.

Primjerice, jedinična sfera S^2 je nivo-skup $F^{-1}(1)$ funkcije $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Teorem (Preslikavanja konstantnog ranga)

Neka su M, N glatke mnogostrukosti, $F : M \to N$ glatko preslikavanje konstantnog ranga k.

Teorem (Preslikavanja konstantnog ranga)

Neka su M, N glatke mnogostrukosti, $F : M \to N$ glatko preslikavanje konstantnog ranga k.

Svaki nivo-skup od F je zatvorena smještena podmnogostrukost od M kodimenzije k.

Dokaz

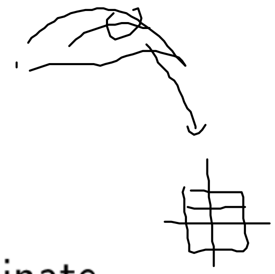
Neka je $c \in N$ i neka S označava nivo-skup $F^{-1}(c) \subset M$.

Dokaz

Neka je $c \in N$ i neka S označava nivo-skup $F^{-1}(c) \subset M$.

Očito je zbog neprekidnosti S zatvoren u M.

Dokaz



Neka je $c \in N$ i neka S označava nivo-skup $F^{-1}(c) \subset M$.

Očito je zbog neprekidnosti S zatvoren u M.

Trebamo pokazati da za svaku točku iz $p \in S$ postoje koordinate sloja za S u M oko p.

Dokaz

Neka je $c \in N$ i neka S označava nivo-skup $F^{-1}(c) \subset M$.

Očito je zbog neprekidnosti S zatvoren u M.

Trebamo pokazati da za svaku točku iz $p \in S$ postoje koordinate sloja za S u M oko p.

Iz Teorema o rangu, postoje glatke koordinatne karte (U, φ) centrirane u p i (V, ψ) centrirane u $c = F(p)$ u kojima F ima koordinatni prikaz

$$F(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0).$$

Dokaz

Neka je $c \in N$ i neka S označava nivo-skup $F^{-1}(c) \subset M$.

Očito je zbog neprekidnosti S zatvoren u M.

Trebamo pokazati da za svaku točku iz $p \in S$ postoje koordinate sloja za S u M oko p.

Iz Teorema o rangu, postoje glatke koordinatne karte (U, φ) centrirane u p i (V, ψ) centrirane u $c = F(p)$ u kojima F ima koordinatni prikaz

$$F(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0).$$

Stoga je $S \cap U$ sloj

$$\{(x^1, \dots, x^m) \in U : x^1 = \dots = x^k = 0)\}.$$

Teorem (Submerzije)

Neka su M, N glatke mnogostrukosti, $F : M \to N$ submerzija.

Teorem (Submerzije)

Neka su M, N glatke mnogostrukosti, $F : M \to N$ submerzija.

Svaki nivo-skup od F je zatvorena smještena podmnogostrukost od M kodimenzije jednake dimenziji od N.

Dokaz. Submerzija je preslikavanje konstantnog ranga jednakog $\dim N$. $\square$

Definicija

Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje.

Definicija

Neka je $F : M \to N$ *glatko preslikavanje.*

Točka $p \in M$ *naziva se regularnom točkom preslikavanja* F *ako je preslikavanje* $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ *surjektivno.*

Definicija

Neka je $F : M \to N$ *glatko preslikavanje.*

Točka $p \in M$ *naziva se regularnom točkom preslikavanja* F *ako je preslikavanje* $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ *surjektivno.*

Ako F_* *nije surjektivno,* p *se naziva kritičnom točkom.*

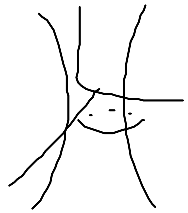
Definicija

Neka je $F : M \to N$ *glatko preslikavanje.*

Točka $p \in M$ *naziva se regularnom točkom preslikavanja* F *ako je preslikavanje* $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ *surjektivno.*

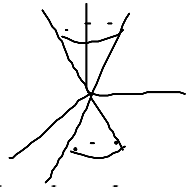
Ako F_* *nije surjektivno,* p *se naziva kritičnom točkom.*

Točka $c \in N$ *naziva se regularnom vrijednošću od* F*, ako je svaka točka nivo-skupa* $F^{-1}(c)$ *regularna. (Tu je uključen slučaj* $F^{-1}(c) = \emptyset$*.)*



$F(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$

$F^{-1}(0)$:



Definicija

Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje.

Točka $p \in M$ naziva se regularnom točkom preslikavanja F ako je preslikavanje $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ surjektivno.

Ako F_* nije surjektivno, p se naziva kritičnom točkom.

Točka $c \in N$ naziva se regularnom vrijednošću od F, ako je svaka točka nivo-skupa $F^{-1}(c)$ regularna. (Tu je uključen slučaj $F^{-1}(c) = \emptyset$.)

Ako neka točka nivo-skupa $F^{-1}(c)$ nije regularna, onda se c naziva kritičnom vrijednošću.

Definicija

Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje.

Točka $p \in M$ naziva se regularnom točkom preslikavanja F ako je preslikavanje $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ surjektivno.

Ako F_* nije surjektivno, p se naziva kritičnom točkom.

Točka $c \in N$ naziva se regularnom vrijednošću od F, ako je svaka točka nivo-skupa $F^{-1}(c)$ regularna. (Tu je uključen slučaj $F^{-1}(c) = \emptyset$.)

Ako neka točka nivo-skupa $F^{-1}(c)$ nije regularna, onda se c naziva kritičnom vrijednošću.

Ako je c regularna vrijednost, tada se nivo-skup $F^{-1}(c)$ naziva regularnim.

Uočimo: Ako je $\dim M < \dim N$, svaka je točka kritična.

Uočimo: Ako je $\dim M < \dim N$, svaka je točka kritična.

Regularan nivo-skup je nivo-skup koji se sastoji od regularnih točaka.

Teorem (Regularni nivo-skupovi)

Svaki regularni nivo-skup glatkog preslikavanja je zatvorena smještena podmnogostrukost od M kodimenzije jednake dimenziji slike.

Dokaz

Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje i $c \in N$ regularna vrijednost preslikavanja F takva da je $F^{-1}(c) \neq \emptyset$.

Dokaz

Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje i $c \in N$ regularna vrijednost preslikavanja F takva da je $F^{-1}(c) \neq \emptyset$.

Preslikavanje F_* ima rang jednak $\dim N$ u svakoj točki skupa $F^{-1}(c)$.

Dokaz

Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje i $c \in N$ regularna vrijednost preslikavanja F takva da je $F^{-1}(c) \neq \emptyset$.

Preslikavanje F_* ima rang jednak $\dim N$ u svakoj točki skupa $F^{-1}(c)$.

Još treba pokazati da je skup točaka $U \subset M$ za koje je $rg\, F = \dim N$ otvoren u M, jer je tada $F|_U : U \to N$ submerzija, te možemo primijeniti prethodni teorem na U (uočimo da je smještena podmnogostrukost od U takodjer smještena podmnogostrukost od M).

Dokaz - nastavak

Pokažimo da je U otvoren. Neka je $p \in U$.

Dokaz - nastavak

Pokažimo da je U otvoren. Neka je $p \in U$.

Označimo $m = \dim M$, $n = \dim N$; uočimo $m \geq n$.

Dokaz - nastavak

Pokažimo da je U otvoren. Neka je $p \in U$.

Označimo $m = \dim M$, $n = \dim N$; uočimo $m \geq n$.

Uzmimo koordinatne okoline oko p i $F(p)$ i promotrimo koordinatni prikaz preslikavanja F_*, $rg\, F_* = n$.

Dokaz - nastavak

Pokažimo da je U otvoren. Neka je $p \in U$.

Označimo $m = \dim M$, $n = \dim N$; uočimo $m \geq n$.

Uzmimo koordinatne okoline oko p i $F(p)$ i promotrimo koordinatni prikaz preslikavanja F_*, $rg\, F_* = n$.

S obzirom na odgovarajuće baze, njegov matrični prikaz (matrica tipa (n, m)) ima $n \times n$-minoru koja je regularna (determinanta joj je različita od 0).

Dokaz - nastavak

Pokažimo da je U otvoren. Neka je $p \in U$.

Označimo $m = \dim M$, $n = \dim N$; uočimo $m \geq n$.

Uzmimo koordinatne okoline oko p i $F(p)$ i promotrimo koordinatni prikaz preslikavanja F_*, $rg\, F_* = n$.

S obzirom na odgovarajuće baze, njegov matrični prikaz (matrica tipa (n, m)) ima $n \times n$-minoru koja je regularna (determinanta joj je različita od 0).

Zbog neprekidnosti, determinanta će biti različita od 0 i u nekoj okolini od p, što povlači da je F ranga n u toj okolini.

Dokaz - nastavak

Pokažimo da je U otvoren. Neka je $p \in U$.

Označimo $m = \dim M$, $n = \dim N$; uočimo $m \geq n$.

Uzmimo koordinatne okoline oko p i $F(p)$ i promotrimo koordinatni prikaz preslikavanja F_*, $rg\, F_* = n$.

S obzirom na odgovarajuće baze, njegov matrični prikaz (matrica tipa (n, m)) ima $n \times n$-minoru koja je regularna (determinanta joj je različita od 0).

Zbog neprekidnosti, determinanta će biti različita od 0 i u nekoj okolini od p, što povlači da je F ranga n u toj okolini.

Zbog proizvoljnosti od p, U možemo pokriti otvorenim skupovima.

Napomena.

Ako je $f : M \to \mathbf{R}$ glatko preslikavanje, tada je $p \in M$ regularna točka ako i samo ako je $df_p \neq 0$.

Napomena.

Ako je $f : M \to \mathbf{R}$ glatko preslikavanje, tada je $p \in M$ regularna točka ako i samo ako je $df_p \neq 0$.

Primjer 1. Sfera S^n je smještena podmnogostrukost kao regularni nivo-skup funkcije $f : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|^2$ (diferencijal $df = 2\sum_{i=1}^{n} x^i dx^i$ iščezava samo u ishodištu.)

Propozicija

Podskup S glatke n-mnogostrukosti M je smještena k-podmnogostrukost od M ako i samo ako svaka točka $p \in S$ ima okolinu U u M tako da je $U \cap S$ nivo-skup submerzije $F : U \to \mathbf{R}^{n-k}$.

Dokaz

Neka je S smještena k-podmnogostrukost.

Dokaz

Neka je S smještena k-podmnogostrukost.

Ako su $(x^1, \ldots, x^n)$ koordinate sloja za S na otvorenom skupu $U \subset M$, tada je preslikavanje $F : U \to \mathbf{R}^{n-k}$, u koordinatama dano s $F(x) = (x^{k+1}, \ldots, x^n)$, submerzija za koju je jedan od nivo-skupova $S \cap U$.

Dokaz - nastavak

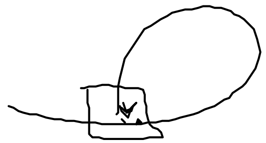
Obratno, pretpostavimo da oko svake točke $p \in S$ postoji okolina U i submerzija $F : U \to \mathbf{R}^{n-k}$ takva da je $S \cap U = F^{-1}(c)$, za neki $c \in \mathbf{R}^{n-k}$.

Dokaz - nastavak

Obratno, pretpostavimo da oko svake točke $p \in S$ postoji okolina U i submerzija $F : U \to \mathbf{R}^{n-k}$ takva da je $S \cap U = F^{-1}(c)$, za neki $c \in \mathbf{R}^{n-k}$.

Koristeći teorem za nivo-skupove submerzija, dobivamo da je $S \cap U$ smještena podmnogostrukost od U.

Dokaz - nastavak



Obratno, pretpostavimo da oko svake točke $p \in S$ postoji okolina U i submerzija $F : U \to \mathbf{R}^{n-k}$ takva da je $S \cap U = F^{-1}(c)$, za neki $c \in \mathbf{R}^{n-k}$.

Koristeći teorem za nivo-skupove submerzija, dobivamo da je $S \cap U$ smještena podmnogostrukost od U.

Sada Lema **??** povlači da je S smještena podmnogostrukost. $\square$

Primjer 4.

Vektorski prostor matrica reda n, $M_n(\mathbf{R})$, je glatka mnogostrukost dimenzije n^2.

Primjer 4.

Vektorski prostor matrica reda n, $M_n(\mathbf{R})$, je glatka mnogostrukost dimenzije n^2.

Opća linearna grupa $Gl(n, \mathbf{R})$ (regularnih matrica) je otvorena podmnogostrukost dimenzije n^2.

Primjer 5. Ortogonalna grupa $O(n, \mathbf{R})$

Matrica A je ortogonalna ako vrijedi $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I$, gdje je I jedinična matrica reda n.

Primjer 5. Ortogonalna grupa $O(n, \mathbf{R})$

Matrica A je ortogonalna ako vrijedi $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I$, gdje je I jedinična matrica reda n.

Pokažimo da je $O(n, \mathbf{R})$ smještena podmnogostrukost od $Gl(n, \mathbf{R})$.

Označimo sa $\mathcal{S}(n, \mathbf{R})$ prostor simetričnih matrica i promotrimo preslikavanje

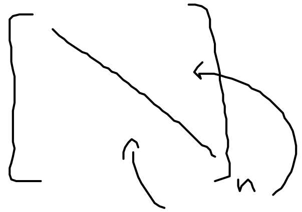
$$F : Gl(n, \mathbf{R}) \to \mathcal{S}(n, \mathbf{R})$$

$$F(A) = AA^T.$$

Označimo sa $\mathcal{S}(n, \mathbf{R})$ prostor simetričnih matrica i promotrimo preslikavanje

$$F : Gl(n, \mathbf{R}) \to \mathcal{S}(n, \mathbf{R})$$

$$F(A) = AA^T.$$



$$\frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Pokazat ćemo da je I regularna vrijednost preslikavanja F, te je skup $F^{-1}(I) = O(n, \mathbf{R})$ smještena podmnogostrukost kodimenzije $\dfrac{n(n+1)}{2}$, odnosno dimenzije

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Promotrimo *push-forward*

$$F_* : T_A Gl(n, \mathbf{R}) \to T_{F(A)} \mathcal{S}(n, \mathbf{R})$$

preslikavanja F u točki $A \in O(n, \mathbf{R}) \subset Gl(n, \mathbf{R})$.

Promotrimo *push-forward*

$$F_* : T_A Gl(n, \mathbf{R}) \to T_{F(A)} \mathcal{S}(n, \mathbf{R})$$

preslikavanja F u točki $A \in O(n, \mathbf{R}) \subset Gl(n, \mathbf{R})$.

Dobivamo

$$F_*(X) = AX^\tau + XA^\tau,$$

gdje je $X \in M_n(\mathbf{R})$ (identificiramo $T_A Gl(n, \mathbf{R})$ sa $M_n(\mathbf{R}) \cong \mathbf{R}^{n^2}$, $T_{F(A)} \mathcal{S}(n, \mathbf{R})$ sa $\mathcal{S}(n, \mathbf{R})$).

Zaista, neka je $c : I \to M_n(\mathbf{R})$ krivulja $c(t) = A + tB$, $c(0) = A$, $c'(0) = B$.

Zaista, neka je $c : I \to M_n(\mathbf{R})$ krivulja $c(t) = A + tB$, $c(0) = A$, $c'(0) = B$.

Sada je

$$F_* B = F_* c'(0) = (F \circ c)'(0) = \frac{d}{dt}|_{t=0} F(A + tB)$$

$$= \frac{d}{dt}|_{t=0} (A + tB)(A + tB)^\tau = AB^\tau + BA^\tau.$$

Zaista, neka je $c : I \to M_n(\mathbf{R})$ krivulja $c(t) = A + tB$, $c(0) = A$, $c'(0) = B$.

Sada je

$$F_* B = F_* c'(0) = (F \circ c)'(0) = \frac{d}{dt}|_{t=0} F(A + tB)$$

$$= \frac{d}{dt}|_{t=0}(A + tB)(A + tB)^\tau = AB^\tau + BA^\tau.$$

Ako je $Y \in \mathcal{S}(n, \mathbf{R})$ proizvoljan, tada se $\frac{1}{2}YA$ preslika u Y,

$$F_*(YA/2) = A(YA/2)^\tau + (YA/2)A^\tau = Y,$$

pa smo pokazali da je F_* surjektivno preslikavanje.

$dF_A(B) = AB^\tau + BA^\tau$

$dF_I(B) = B^\tau + B$

Primjer 6. Specijalna linearna grupa $Sl(n, \mathbf{R})$

$$Sl(n, \mathbf{R}) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) : \det A = 1\}.$$

Primjer 6. Specijalna linearna grupa $Sl(n, \mathbf{R})$

$$Sl(n, \mathbf{R}) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) : \det A = 1\}.$$

Pokažimo da je 1 regularna vrijednost preslikavanja $\det : Gl(n, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$. (Tada će slijediti da je $Sl(n, \mathbf{R}) = \det^{-1}(1)$ smještena podmnogostrukost od $Gl(n, \mathbf{R})$.)

Primjer 6. Specijalna linearna grupa $Sl(n, \mathbf{R})$

$$Sl(n, \mathbf{R}) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) : \det A = 1\}.$$

Pokažimo da je 1 regularna vrijednost preslikavanja $\det : Gl(n, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$. (Tada će slijediti da je $Sl(n, \mathbf{R}) = \det^{-1}(1)$ smještena podmnogostrukost od $Gl(n, \mathbf{R})$.)

Trebamo pokazati da je det submerzija.

Neka je $A \in Gl(n, \mathbf{R})$ po volji odabrana matrica.

Neka je $A \in Gl(n, \mathbf{R})$ po volji odabrana matrica.

Za diferencijal od det vrijedi

$$d(\det)_A(B) = (\det A) tr(A^{-1}B), \quad B \in M_N(\mathbf{R}).$$

Neka je $A \in Gl(n, \mathbf{R})$ po volji odabrana matrica. $d\,(\det_I)(B) = tr\,B$

Za diferencijal od det vrijedi

$$d(\det)_A(B) = (\det A)tr(A^{-1}B), \quad B \in M_N(\mathbf{R}).$$

Ako stavimo $B = A$, tada imamo

$$d(\det)_A(A) = (\det A)tr(A^{-1}A) = (\det A) \cdot n \neq 0, \quad A \in Sl(n, \mathbf{R}).$$

Dakle, diferencijal $d\det$ ne iščezava niti u jednoj točki od $Sl(n, \mathbf{R})$, pa je det submerzija.

Dakle, diferencijal $d\det$ ne iščezava niti u jednoj točki od $Sl(n, \mathbf{R})$, pa je det submerzija.

Time je pokazano da je $Sl(n, \mathbf{R})$ smještena podmnogostrukost dimenzije $n^2 - 1$.

Napomena.

$Sp(2n, \mathbb{R})$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} = J$

$A^T J A = J$

$O(p,q)$: $\quad A^T I_{p,q} A = I_{p,q}$

$$I_{p,q} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} p \\ \\ \\ q \\ \\ \\ \end{array}$$

Funkcija $F : M \to N$ koja odredjuje podmnogostrukost S kao regularni nivo-skup naziva se *definirajućom funkcijom*.

Napomena.

Funkcija $F : M \to N$ koja odredjuje podmnogostrukost S kao regularni nivo-skup naziva se *definirajućom funkcijom*.

Ako za neki otvoren pokrivač $\{U_i\}$ od M, F odredjuje svaku podmnogostrukost $U_i \cap S$ kao regularni nivo-skup, F se naziva lokalno definirajućom funkcijom.

Propozicija

Neka je S smještena podmnogostrukost. Ako je $F : U \to N$ lokalno definirajuća funkcija za S, tada je $T_pS = \ker F_*$, $p \in U$.

$O(n)$: $F(A) = AA^T$

$$dF_I(B) = B^T + B$$

jezgra : B : $B^T = -B$ antisimetrične matrice. $\mathfrak{o}(n)$

$SL(n,\mathbb{R})$: $d\det_I(B) = \operatorname{tr} B$

$\ker$: B : $\operatorname{tr} B = 0$ $\quad \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$

G Liejeva grupa, $\subseteq GL(n,\mathbb{R})$

$G_I = \mathfrak{g}$ je Liejeva algebra, uz operaciju

$$[X,Y] = XY - YX$$

$B^T = -B$, $C^T = -C$

$$\Rightarrow (BC - CB)^T = C^TB^T - B^TC^T = CB - BC = -(BC - CB)$$

$$\operatorname{tr}[B,C] = \operatorname{tr} BC - \operatorname{tr} CB = 0$$

Općenito def. $[\ ]$: (za $G \leq GL(n,\mathbb{R})$)

$g \in G$ $\quad \operatorname{Int}_g : G \to G$, $h \mapsto ghg^{-1}$ $\quad\Big|\quad$ $(d\operatorname{Int}_g)_I : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $X \mapsto gXg^{-1}$

$$(d\operatorname{Int}_g)_I = \operatorname{Ad}_g$$

$$\operatorname{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$$

$$d\operatorname{Ad}_I(Y)(X) = YX - XY$$

$$(= \operatorname{ad}_Y(X))$$

Imerzirane podmnogostrukosti

Imerzirane podmnogostrukosti su slike injektivnih imerzija (ne nužno smještenja). Precizirajmo:

Imerzirane podmnogostrukosti

Imerzirane podmnogostrukosti su slike injektivnih imerzija (ne nužno smještenja). Precizirajmo:

Definicija

Neka je M glatka mnogostrukost. Imerzirana podmnogostrukost dimenzije k od M je podskup $N \subset M$ snabdjeven strukturom k-mnogostrukosti (ne nužno s relativnom topologijom) i glatkom strukturom tako da je inkluzija $i : N \hookrightarrow M$ glatka imerzija.

Dobivamo ih najčešće na sljedeći način: neka je $F : N \to M$ injektivna imerzija, skup $F(N)$ snabdijemo topologijom u kojoj je skup $U \subset F(N)$ otvoren ako i samo ako je $F^{-1}(U)$ otvoren u N.

Dobivamo ih najčešće na sljedeći način: neka je $F : N \to M$ injektivna imerzija, skup $F(N)$ snabdijemo topologijom u kojoj je skup $U \subset F(N)$ otvoren ako i samo ako je $F^{-1}(U)$ otvoren u N.

Uz tu je topologiju $F(N)$ topološka k-mnogostrukost homeomorfna sa N.

Nadalje, $F(N)$ ima jedinstvenu glatku strukturu za koju je preslikavanje $F : N \to F(N)$ difeomorfizam.

Nadalje, $F(N)$ ima jedinstvenu glatku strukturu za koju je preslikavanje $F : N \to F(N)$ difeomorfizam.

Koordinatna preslikavanja na $F(N)$ su $\varphi \circ F^{-1}$ gdje su φ koordinatna preslikavanja na N.

Nadalje, $F(N)$ ima jedinstvenu glatku strukturu za koju je preslikavanje $F : N \to F(N)$ difeomorfizam.

Koordinatna preslikavanja na $F(N)$ su $\varphi \circ F^{-1}$ gdje su φ koordinatna preslikavanja na N.

Sada je preslikavanje $i : F(N) \hookrightarrow M$ sigurno glatka imerzija jer je kompozicija difeomorfizma i imerzije

$$F(N) \to N \to M.$$

Propozicija

Imerzirane podmnogostrukosti su upravo slike injektivnih imerzija.

Propozicija

Imerzirane podmnogostrukosti su upravo slike injektivnih imerzija.

Dokaz. Ako je $N \subset M$ imerzirana podmnogostrukost, tada je $i : N \hookrightarrow M$ injektivna imerzija po definiciji.

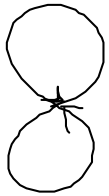
Propozicija

Imerzirane podmnogostrukosti su upravo slike injektivnih imerzija.

Dokaz. Ako je $N \subset M$ imerzirana podmnogostrukost, tada je $i : N \hookrightarrow M$ injektivna imerzija po definiciji.

Obratno, slika injektivne imerzije ima jedinstvenu topologiju i glatku strukturu tako da postaje imerzirana podmnogostrukost za koju je dana imerzija difeomorfizam na sliku. $\square$

Primjer.

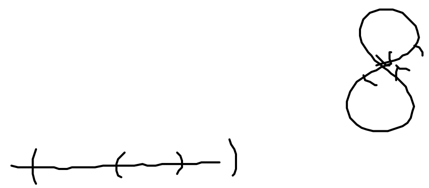


Krivulja osmica je imerzirana, ali ne i smještena podmnogostrukost.

Primjer.

Krivulja osmica je imerzirana, ali ne i smještena podmnogostrukost.

Uočimo: imerzirana podmnogostrukost je smještena podmnogostrukost ako i samo ako ima relativnu topologiju tj. ako i samo ako je imerzija smještenje.



Propozicija

Neka je $F : N \to M$ imerzija. Tada je F lokalno smještenje: za svaku točku $p \in N$ postoji okolina U od p u N takva da je $F|_U : U \to M$ smještenje.

Definicija

Neka je $S \subset M$ imerzirana k-podmnogostrukost. Lokalna parametrizacija od S je (glatko) smještenje $X : U \to M$, $U \subset \mathbf{R}^k$ otvoren, kojemu je slika otvoren podskup od S i koje je glatko kao preslikavanje u S.

Definicija

Neka je $S \subset M$ imerzirana k-podmnogostrukost. Lokalna parametrizacija od S je (glatko) smještenje $X : U \to M$, $U \subset \mathbf{R}^k$ otvoren, kojemu je slika otvoren podskup od S i koje je glatko kao preslikavanje u S.

Uočimo, ako je $S = M$, tada je lokalna parametrizacija od M inverz koordinatnog preslikavanja.

Propozicija

Neka je $S \subset M$ imerzirana podmnogostrukost. Tada je svaka točka $p \in S$ u slici lokalne parametrizacije od S.

Propozicija

Neka je $S \subset M$ imerzirana podmnogostrukost. Tada je svaka točka $p \in S$ u slici lokalne parametrizacije od S.

Ako je $X : U \to M$ lokalna parametrizacija, tada postoji jedinstvena glatka koordinatna karta (V, φ) za S takva da je $X = i \circ \varphi^{-1}$, gdje je $i : S \hookrightarrow M$ inkluzija.

Primjer.

Preslikavanje $F : \mathbf{B}^2 \to \mathbf{R}^3$, $\mathbf{B}^2$ je otvoren krug u $\mathbf{R}^3$, dano s

$$F(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$$

je glatka lokalna parametrizacija od S^2 kojoj je slika gornja otvorena polusfera.

Primjer.

Preslikavanje

$$c : \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle \to \mathbf{R}^2, \qquad c(t) = (\sin 2t, \cos t),$$

je glatka lokalna parametrizacija imerzirane *osmice* kojoj je slika dio krivulje u otvorenoj gornjoj poluravnini.

Napomena.

Koje se mnogostrukosti mogu smjestiti u euklidski prostor?
Odgovor je: sve.

Teorem (Whitneyev teorem o smještenju, 1936.)

Svaka glatka n-mnogostrukost dopušta smještenje u $\mathbf{R}^{2n+1}$ *kao zatvorena podmnogostrukost.*

Teorem (Whitneyev teorem o imerziji)

Svaka glatka n-mnogostrukost dopušta imerziju u $\mathbf{R}^{2n}$.

Teorem (Nashov teorem o izometričnom smještenju, 1956.)

Svaka Riemannova n-mnogostrukost dopušta izometrično smještenje u $\mathbf{R}^m$, za neki m.

Tenzori na vektorskim prostorima

Neka je V realan vektorski prostor dimenzije n, V^* njegov dual.

Tenzori na vektorskim prostorima

Neka je V realan vektorski prostor dimenzije n, V^* njegov dual.

Kovarijantni k-tenzor na V je multilinearno preslikavanje

$$F : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \to \mathbf{R}.$$

Tenzori na vektorskim prostorima

Neka je V realan vektorski prostor dimenzije n, V^* njegov dual.

Kovarijantni k-tenzor na V je multilinearno preslikavanje

$$F : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \to \mathbf{R}.$$

Broj k nazivamo *rangom* tenzora. 0-tenzor je realan broj.

Tenzori na vektorskim prostorima

Neka je V realan vektorski prostor dimenzije n, V^* njegov dual.

Kovarijantni k-tenzor na V je multilinearno preslikavanje

$$F : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \to \mathbf{R}.$$

Broj k nazivamo *rangom* tenzora. 0-tenzor je realan broj.

Prostor svih kovarijantnih k-tenzora na V označavamo s $T^k(V)$.

Primjer.

Linearno preslikavanje $\omega : V \to \mathbf{R}$ je kovarijantni 1-tenzor.

Primjer.

Linearno preslikavanje $\omega : V \to \mathbf{R}$ je kovarijantni 1-tenzor.

Kovarijantni 2-tenzor je realna bilinearna funkcija koja djeluje na dva vektora, naziva se *bilinearnom formom* (primjerice, skalarni produkt).

Primjer.

Linearno preslikavanje $\omega : V \to \mathbf{R}$ je kovarijantni 1-tenzor.

Kovarijantni 2-tenzor je realna bilinearna funkcija koja djeluje na dva vektora, naziva se *bilinearnom formom* (primjerice, skalarni produkt).

Determinanta, promatrana kao funkcija od n vektora, je kovarijantni n-tenzor.

Kontravarijantni l-tenzor na V je multilinearno preslikavanje

$$F : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l} \to \mathbf{R}.$$

Kontravarijantni l-tenzor na V je multilinearno preslikavanje

$$F : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l} \to \mathbf{R}.$$

Prostor svih kontravarijantnih l-tenzora na V označavamo s $T_l(V)$.

Mješoviti tenzor tj. *tenzor tipa* $\binom{k}{l}$ $((k,l)-\mathrm{tenzor})$ ili *k-kovarijantni, l-kontravarijantni tenzor na V* je multilinearno preslikavanje

$$F : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \to \mathbf{R}.$$

Mješoviti tenzor tj. *tenzor tipa* $\binom{k}{l}$ ($(k, l) - \mathrm{tenzor}$) ili *k-kovarijantni, l-kontravarijantni tenzor na* V je multilinearno preslikavanje

$$F : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \to \mathbf{R}.$$

Prostor svih (k, l)-tenzora na V označavamo s $T^k_l(V)$.

Identifikacije (izomorfizmi):

1. $T_0^k(V) = T^k(V)$, $T_l^0(V) = T_l(V)$,

Identifikacije (izomorfizmi):

1. $T_0^k(V) = T^k(V)$, $T_l^0(V) = T_l(V)$,
2. $T^1(V) = V^*$, $T_1(V) = V^{**} = V$, $T^0(V) = \mathbf{R}$,
   (kovarijantni 1-tenzori su linearni funkcionali, kontravarijantni 1-tenzori su vektori),

Identifikacije (izomorfizmi):

1. $T^k_0(V) = T^k(V)$, $T^0_l(V) = T_l(V)$,
2. $T^1(V) = V^*$, $T_1(V) = V^{**} = V$, $T^0(V) = \mathbf{R}$,
   (kovarijantni 1-tenzori su linearni funkcionali, kontravarijantni 1-tenzori su vektori),
3. $T^1_1(V) = \mathrm{End}(V)$,
   (mješoviti $(1,1)-$tenzori su linearni operatori : $V \to V$).
   Posljednja tvrdnja se realizira izomorfizmom
   $\Phi : \mathrm{End}(V) \to T^1_1(V)$, $\Phi(A)(\omega, X) = \omega(AX)$.

Tenzorski produkt tenzora $F \in T^k_l(V)$, $G \in T^p_q(V)$ je tenzor $F \otimes G \in T^{k+p}_{l+q}(V)$ definiran s

$$F \otimes G(\omega^1, \ldots, \omega^{l+q}, X_1, \ldots, X_{k+p})$$

$$= F(\omega^1, \ldots, \omega^l, X_1, \ldots, X_k) G(\omega^{l+1}, \ldots, \omega^{l+q}, X_{k+1}, \ldots, X_{k+p}).$$

Tenzorski produkt tenzora $F \in T_l^k(V)$, $G \in T_q^p(V)$ je tenzor $F \otimes G \in T_{l+q}^{k+p}(V)$ definiran s

$$F \otimes G(\omega^1, \ldots, \omega^{l+q}, X_1, \ldots, X_{k+p})$$

$$= F(\omega^1, \ldots, \omega^l, X_1, \ldots, X_k) G(\omega^{l+1}, \ldots, \omega^{l+q}, X_{k+1}, \ldots, X_{k+p}).$$

Operacija tenzorskog produkta je bilinearna i asocijativna.

Propozicija

Neka je V n-dimenzionalan vektorski prostor, (E_i) baza za V, (ϵ^i) dualna baza.

Propozicija

Neka je V n-dimenzionalan vektorski prostor, (E_i) baza za V, (ϵ^i) dualna baza.

Skup svih tenzora oblika

$$\mathcal{B} = \{\epsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{i_k},\ 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n\}$$

je baza za $T^k(V)$.

Propozicija

Neka je V n-dimenzionalan vektorski prostor, (E_i) baza za V, (ϵ^i) dualna baza.

Skup svih tenzora oblika

$$\mathcal{B} = \{\epsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{i_k}, \ 1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n\}$$

je baza za $T^k(V)$.

Prostor $T^k(V)$ je dimenzije n^k.

Posebno:

1. $\dim T^1(V) = n$,

Posebno:

1. $\dim T^1(V) = n$,
2. $\dim T^2(V) = n^2$

Posebno:

1. $\dim T^1(V) = n$,
2. $\dim T^2(V) = n^2$

   $T^2(V)$ je prostor svih bilinearnih formi na V. Elementi tog prostora su

$$T = \sum_{i,j} T_{ij} \epsilon^i \otimes \epsilon^j.$$

Posebno:

1. $\dim T^1(V) = n$,
2. $\dim T^2(V) = n^2$

   $T^2(V)$ je prostor svih bilinearnih formi na V. Elementi tog prostora su
   $$T = \sum_{i,j} T_{ij} \epsilon^i \otimes \epsilon^j.$$

   Posebno, ako je $\dim V = 2$, dobivamo
   $$T = T_{11}\epsilon^1 \otimes \epsilon^1 + T_{12}\epsilon^1 \otimes \epsilon^2 + T_{21}\epsilon^2 \otimes \epsilon^1 + T_{22}\epsilon^2 \otimes \epsilon^2.$$

Neka je $(E_1, \ldots, E_n)$ baza za V, $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ dualna baza za V^*.

Neka je $(E_1, \dots, E_n)$ baza za V, $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ dualna baza za V^*.

Baza za $T^k_l V$ je dana tenzorima oblika

$$E_{j_1} \otimes \cdots \otimes E_{j_l} \otimes \epsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{i_k},$$

gdje su $i_p, j_q \in \{1, \dots, n\}$, koji djeluju na elemente baze

$$E_{j_1} \otimes \cdots \otimes E_{j_l} \otimes \epsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{i_k}(\epsilon^{s_1}, \dots, \epsilon^{s_k}, E_{r_1}, \dots, E_{r_k}) = \delta^{s_1}_{j_1} \cdots \delta^{s_s}_{j_l} \delta^{i_1}_{r_1} \cdots \delta^{r_k}_{i_k}.$$

Proizvoljan tenzor $F \in T^k_l(V)$ može se napisati kao linearna kombinacija elemenata baze

$$F = \sum_{i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_l} F^{j_1\cdots j_l}_{i_1\cdots i_k} E_{j_1} \otimes \cdots \otimes E_{j_l} \otimes \epsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{i_k},$$

gdje je

$$F^{j_1\cdots j_l}_{i_1\cdots i_k} = F(\epsilon^{j_1}, \ldots, \epsilon^{j_l}, E_{i_1}, \ldots, E_{i_k}).$$

Trag (*kontrakcija*) snizuje rang tenzora za 2: U specijalnom slučaju $tr : T_1^1(V) \to \mathbf{R}$ je trag od F kao linearnog operatora sa V u V.

Trag (*kontrakcija*) snizuje rang tenzora za 2: U specijalnom slučaju $tr : T^1_1(V) \to \mathbf{R}$ je trag od F kao linearnog operatora sa V u V.

Općenito definiramo

$$tr : T^{k+1}_{l+1} \to T^k_l$$

tako da je $tr(F)(\omega^1, \dots, \omega^l, V_1, \dots, V_k)$ trag endomorfizma $F(\omega^1, \dots, \omega^l, \cdot, V_1, \dots, V_k, \cdot) \in T^1_1(V)$.