GLATKE I RIEMANNOVE MNOGOSTRUKOSTI

Željka Milin-Šipuš, Pavle Pandžić i Juraj Šiftar

Drugi dio standardnog poslijediplomskog kolegija **Geometrija i topologija**. Izvodi se u ljetnom semestru (30 sati predavanja).

Podmnogostrukosti

Cilj: Istražiti uvjete pod kojima je podskup glatke mnogostrukosti i sam glatka mnogostrukost.

Podmnogostrukosti

Cilj: Istražiti uvjete pod kojima je podskup glatke mnogostrukosti i sam glatka mnogostrukost.

Najpoznatiji primjeri mnogostrukosti javljaju se kao podskupovi mnogostrukosti, primjerice S^n, T^n – dakle, kao podmnogostrukosti.

Podmnogostrukosti

Cilj: Istražiti uvjete pod kojima je podskup glatke mnogostrukosti i sam glatka mnogostrukost.

Najpoznatiji primjeri mnogostrukosti javljaju se kao podskupovi mnogostrukosti, primjerice S^n, T^n – dakle, kao podmnogostrukosti.

Opisat ćemo ih na dva osnovna načina:

1. kao slike injektivnih imerzija (smještenja),

Podmnogostrukosti

Cilj: Istražiti uvjete pod kojima je podskup glatke mnogostrukosti i sam glatka mnogostrukost.

Najpoznatiji primjeri mnogostrukosti javljaju se kao podskupovi mnogostrukosti, primjerice S^n, T^n – dakle, kao podmnogostrukosti.

Opisat ćemo ih na dva osnovna načina:

1. kao slike injektivnih imerzija (smještenja),
2. kao nivo–skupove submerzija.

Podmnogostrukosti

Razlikovat ćemo: Smještene podmnogostrukosti, imerzirane podmnogostrukosti.

Podmnogostrukosti

Razlikovat ćemo: Smještene podmnogostrukosti, imerzirane podmnogostrukosti.

Koristit ćemo Teorem o inverznoj funkciji koji opisuje lokalno ponašanje glatkog preslikavanja preko njegovog push–forwarda.

Preslikavanja konstantnog ranga

Definicija

Neka je $F : M \to N$ *glatko preslikavanje izmedju glatkih mnogostrukosti* M, N *dimenzija* m, n *redom.*

Preslikavanja konstantnog ranga

Definicija

Neka je $F : M \to N$ *glatko preslikavanje izmedju glatkih mnogostrukosti* M, N *dimenzija* m, n *redom.*

Rang *od* F *u točki* $p \in M$ *je rang linearnog operatora* $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$.

Preslikavanja konstantnog ranga

Definicija

Neka je $F : M \to N$ *glatko preslikavanje izmedju glatkih mnogostrukosti* M, N *dimenzija* m, n *redom.*

Rang *od* F *u točki* $p \in M$ *je rang linearnog operatora* $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$.

Ako F *ima isti rang* k *u svim točkama od* M, *tada* F *nazivamo* **preslikavanjem konstantnog ranga** *i pišemo* $rg\, F = k$.

Imerzija, submerzija i smještenje

Definicija

Imerzija *je glatko preslikavanje* $F : M \to N$ *takvo da je* F_* *injektivno u svakoj točki od* M.

Imerzija, submerzija i smještenje

Definicija

Imerzija *je glatko preslikavanje* $F : M \to N$ *takvo da je* F_* *injektivno u svakoj točki od* M.

Submerzija *je glatko preslikavanje* $F : M \to N$ *takvo da je* F_* *surjektivno u svakoj točki od* M.

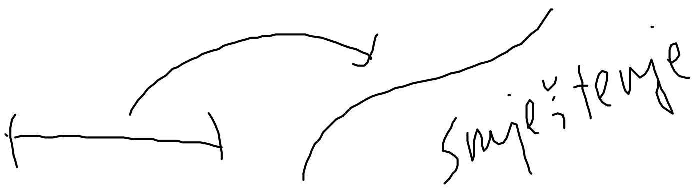
Imerzija, submerzija i smještenje

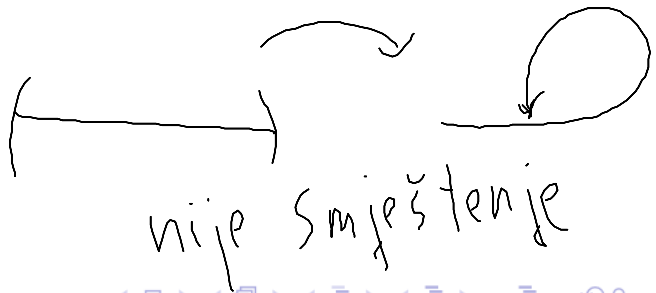
Definicija

Imerzija *je glatko preslikavanje* $F : M \to N$ *takvo da je* F_* *injektivno u svakoj točki od* M.

Submerzija *je glatko preslikavanje* $F : M \to N$ *takvo da je* F_* *surjektivno u svakoj točki od* M.

(Glatko) **smještenje** *je injektivna imerzija* $F : M \to N$ *koja je takodjer i topološko smještenje, tj. homeomorfizam na sliku* $F(M) \subset N$ *u (relativnoj) induciranoj topologiji.*





Imerzija, submerzija i smještenje

Uočimo: $F : M \to N$ je

1. imerzija ako i samo ako je $rg\, F = dim\, M$,

Imerzija, submerzija i smještenje

Uočimo: $F : M \to N$ je

1. imerzija ako i samo ako je $rg\, F = dim\, M$,
2. submerzija ako i samo ako je $rg\, F = dim\, N$.

Primjer 1. Klasična diferencijalna geometrija krivulja i ploha

Glatka krivulja $c : I \to \mathbf{R}^3$, $I \subset \mathbf{R}$ otvoren interval, je regularna ako je $c'(t) \neq 0$, $t \in I$.

Primjer 1. Klasična diferencijalna geometrija krivulja i ploha

Glatka krivulja $c : I \to \mathbf{R}^3$, $I \subset \mathbf{R}$ otvoren interval, je regularna ako je $c'(t) \neq 0$, $t \in I$.

To znači da je c_* injektivno tj. c je imerzija.

Primjer 1. Klasična diferencijalna geometrija krivulja i ploha

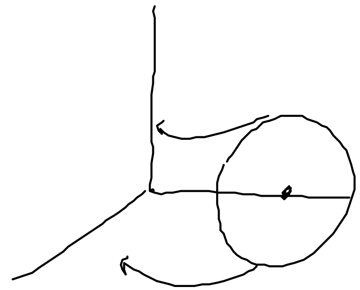
Glatka krivulja $c : I \to \mathbf{R}^3$, $I \subset \mathbf{R}$ otvoren interval, je regularna ako je $c'(t) \neq 0$, $t \in I$.

To znači da je c_* injektivno tj. c je imerzija.

u, v : koord. na U

Kod definicije ploha, glatka (lokalna) parametrizacija $\varphi : U \to \mathbf{R}^3$, $U \subset \mathbf{R}^2$ otvoren i povezan, je regularna ako su $\cancel{\varphi_1}$, $\cancel{\varphi_2}$ linearno nezavisni, te je φ opet imerzija.

$\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}$



Primjerice, glatko preslikavanje $X : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$

$$X(\varphi, \psi) = ((2 + \cos \varphi) \cos \psi, (2 + \cos \varphi) \sin \psi, \sin \varphi)$$

je imerzija s $\mathbf{R}^2$ u $\mathbf{R}^3$ kojemu je slika rotacijski torus u $\mathbf{R}^3$ (nastao rotacijom kružnice $(y-2)^2 + z^2 = 1$ oko z-osi.

Primjerice, glatko preslikavanje $X : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$

$$X(\varphi, \psi) = ((2 + \cos\varphi)\cos\psi, (2 + \cos\varphi)\sin\psi, \sin\varphi)$$

je imerzija s $\mathbf{R}^2$ u $\mathbf{R}^3$ kojemu je slika rotacijski torus u $\mathbf{R}^3$ (nastao rotacijom kružnice $(y-2)^2 + z^2 = 1$ oko z-osi.

To preslikavanje inducira smještenje od $T^2 = S^1 \times S^1$ u $\mathbf{R}^3$ (preslikavanje $(\varphi, \psi) \mapsto (e^{i\varphi}, e^{i\psi})$ je natkrivajuće preslikavanje).

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{T}^2 \arrow[d, hook, dotted, "\text{smještenje}"] \\ & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

Primjer 2.

Projekcija $\pi : \mathbf{R}^{n+k} \to \mathbf{R}^n$ na prvih n koordinata je submerzija.

Primjer 2.

Projekcija $\pi : \mathbf{R}^{n+k} \to \mathbf{R}^n$ na prvih n koordinata je submerzija.

Općenitije, projekcija $\pi : M_1 \times \cdots \times M_k \to M_i$ je submerzija.

Primjer 3.

Inkluzija $i : \mathbf{R}^n \hookrightarrow \mathbf{R}^{n+k}$

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^n, 0 \dots, 0)$$

je smještenje.

Primjer 3.

Inkluzija $i : \mathbf{R}^n \hookrightarrow \mathbf{R}^{n+k}$

$$(x^1, \ldots, x^n) \mapsto (x^1, \ldots, x^n, 0 \ldots, 0)$$

je smještenje.

Općenitije, inkluzija $i : M_j \hookrightarrow M_1 \times \cdots \times M_k$ je smještenje.

$i(m) = (p_1, \ldots, p_{j-1}, m, p_{j+1}, \ldots, p_k)$

$p_r \in M_r$ fiksni

Primjer 4.

Lokalni difeomorfizam $F : M \to N$ je i imerzija i submerzija.

Primjer 5.

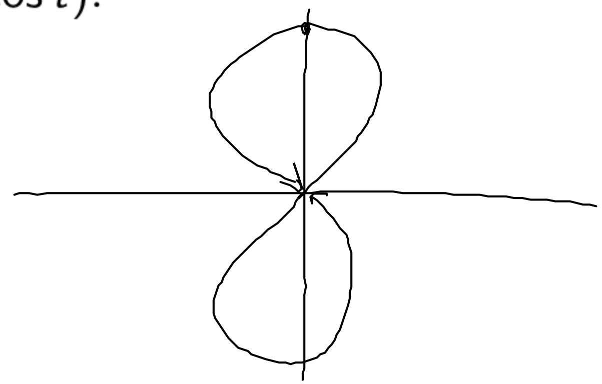
Projekcija vektorskog svežnja $\pi : E \to M$ je submerzija.

Primjer 6.

Injektivna imerzija koja nije smještenje – osmica (Lissajous-ova krivulja)

$$c : \langle -\pi/2, 3\pi/2 \rangle \to \mathbf{R}^2$$

$$c(t) = (\sin 2t, \cos t).$$



Primjer 6.

Injektivna imerzija koja nije smještenje – osmica (Lissajous-ova krivulja)

$$c : \langle -\pi/2, 3\pi/2\rangle \to \mathbf{R}^2$$

$$c(t) = (\sin 2t, \cos t).$$

Njezina se slika podudara sa skupom $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 = 4y^2(1 - y^2)\}$.

Primjer 6.

Injektivna imerzija koja nije smještenje – osmica (Lissajous-ova krivulja)

$$c : \langle -\pi/2, 3\pi/2\rangle \to \mathbf{R}^2$$

$$c(t) = (\sin 2t, \cos t).$$

Njezina se slika podudara sa skupom $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 = 4y^2(1 - y^2)\}$.

Preslikavanje c je injektivna imerzija jer c' nikad ne iščezava.

Primjer 6.

Injektivna imerzija koja nije smještenje – osmica (Lissajous-ova krivulja)

$$c : \langle -\pi/2, 3\pi/2\rangle \to \mathbf{R}^2$$

$$c(t) = (\sin 2t, \cos t).$$

Njezina se slika podudara sa skupom $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 = 4y^2(1 - y^2)\}$.

Preslikavanje c je injektivna imerzija jer c' nikad ne iščezava.

Nije topološko smještenje, jer je njena slika kompaktan skup u relativnoj topologiji, dok njena domena to nije.

Propozicija

Neka je $F : M \to N$ *injektivna imerzija.*

Propozicija

Neka je $F : M \to N$ *injektivna imerzija.*

Ako vrijedi neki od uvjeta:

1. F *je zatvoreno preslikavanje (preslikava zatvorene skupove u zatvorene)*

Propozicija

Neka je $F : M \to N$ injektivna imerzija.

Ako vrijedi neki od uvjeta:

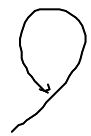
1. *F je zatvoreno preslikavanje (preslikava zatvorene skupove u zatvorene)*
2. *F je pravo (proper) preslikavanje (praslika svakog kompaktnog skupa je kompakt)*

Propozicija

Neka je $F : M \to N$ injektivna imerzija.

Ako vrijedi neki od uvjeta:

1. *F je zatvoreno preslikavanje (preslikava zatvorene skupove u zatvorene)*
2. *F je pravo (proper) preslikavanje (praslika svakog kompaktnog skupa je kompakt)*
3. *M je kompakt,*



Propozicija

Neka je $F : M \to N$ injektivna imerzija.

Ako vrijedi neki od uvjeta:

1. *F je zatvoreno preslikavanje (preslikava zatvorene skupove u zatvorene)*
2. *F je pravo (proper) preslikavanje (praslika svakog kompaktnog skupa je kompakt)*
3. *M je kompakt,*

tada je F smještenje sa zatvorenom slikom.

Primjer.

Pokazali smo da je inkluzija $i : S^n \hookrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ glatko preslikavanje.

Primjer.

Pokazali smo da je inkluzija $i : S^n \hookrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ glatko preslikavanje.

Kako je i_* takodjer injekcija u svakoj točki, to je i injektivna imerzija.

Primjer.

Pokazali smo da je inkluzija $i : S^n \hookrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ glatko preslikavanje.

Kako je i_* takodjer injekcija u svakoj točki, to je i injektivna imerzija.

Propozicija 1.3 povlači da je i glatko smještenje.

Teorem o inverznom preslikavanju na $\mathbf{R}^n$

Neka su U, V otvoreni podskupovi od $\mathbf{R}^n$, $F : U \to V$ glatko preslikavanje.

Teorem o inverznom preslikavanju na $\mathbf{R}^n$

Neka su U, V otvoreni podskupovi od $\mathbf{R}^n$, $F : U \to V$ glatko preslikavanje.

Ako je $DF(p)$ regularan operator u nekoj točki $p \in U$, tada postoje povezane okoline $U_0 \subset U$ od p i $V_0 \subset V$ od $F(p)$ takve da je $F|_{U_0} : U_0 \to V_0$ difeomorfizam.

Važna posljedica je sljedeći teorem – nelinearna verzija odgovarajućeg teorema za linearne operatore:

Važna posljedica je sljedeći teorem – nelinearna verzija odgovarajućeg teorema za linearne operatore:

za $T : V \to W$ linearni operator ranga r, postoje baze za V i W za koje je matrični prikaz operatora T jednak

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teorem o rangu

Neka su $U \subset \mathbf{R}^m$, $V \subset \mathbf{R}^n$ *otvoreni podskupovi,* $F : U \to V$ *glatko preslikavanje konstantnog ranga* k.

Teorem o rangu

Neka su $U \subset \mathbf{R}^m$, $V \subset \mathbf{R}^n$ *otvoreni podskupovi,* $F : U \to V$ *glatko preslikavanje konstantnog ranga* k.

Tada za svaku točku $p \in M$ *postoji glatka koordinatna karta* (U_0, φ) *od* $\mathbf{R}^m$ *oko* p, $\varphi(p) = 0$, *i glatka koordinatna karta* (V_0, ψ) *od* $\mathbf{R}^n$, $U_0 \subset U$, $F(U_0) \subset V_0 \subset V$, *tako da vrijedi*

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x^1, \ldots, x^k, x^{k+1}, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0).$$

DZ: dokažite
(predati za 2 tjedna)

Teorem o rangu

Neka su $U \subset \mathbf{R}^m$, $V \subset \mathbf{R}^n$ *otvoreni podskupovi,* $F : U \to V$ *glatko preslikavanje konstantnog ranga* k*.*

Tada za svaku točku $p \in M$ *postoji glatka koordinatna karta* (U_0, φ) *od* $\mathbf{R}^m$ *oko* p, $\varphi(p) = 0$, *i glatka koordinatna karta* (V_0, ψ) *od* $\mathbf{R}^n$, $U_0 \subset U$, $F(U_0) \subset V_0 \subset V$, *tako da vrijedi*

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x^1, \ldots, x^k, x^{k+1}, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0).$$

Iduća važna posljedica Teorema o inverznom preslikavanju je sljedeći teorem:

Teorem o implicitnom preslikavanju

Neka je $U \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$ *otvoren,*

$$(x, y) = (x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^k).$$

Teorem o implicitnom preslikavanju

Neka je $U \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$ *otvoren,*

$$(x, y) = (x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^k).$$

Neka je $\Phi : U \to \mathbf{R}^k$ *glatko preslikavanje,* $(a, b) \in U$, $c = \Phi(a, b)$.

Teorem o implicitnom preslikavanju

Neka je $U \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$ *otvoren,*

$$(x, y) = (x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^k).$$

Neka je $\Phi : U \to \mathbf{R}^k$ *glatko preslikavanje,* $(a, b) \in U$, $c = \Phi(a, b)$.

Ako je matrica

$$\left(\frac{\partial \phi^i}{\partial y^j}(a, b)\right) \in M_k(\mathbf{R})$$

regularna, tada postoji okolina $V_0 \subset \mathbf{R}^n$ *od* a *i okolina* $W_0 \subset \mathbf{R}^k$ *od* b *i glatko preslikavanje* $F : V_0 \to W_0$ *takvo da je* $\Phi^{-1}(c) \cap V_0 \times W_0$ *graf od* F*, tj.* $\Phi(x, y) = c$ *za* $(x, y) \in V_0 \times W_0$ *ako i samo ako je* $y = F(x)$.

Teorem o inverznom preslikavanju za mnogostrukosti

Neka su M, N glatke mnogostrukosti, $p \in M$, $F : M \to N$ glatko preslikavanje za koje je $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ bijekcija (tj. izomorfizam, regularni operator).

Teorem o inverznom preslikavanju za mnogostrukosti

Neka su M, N glatke mnogostrukosti, $p \in M$, $F : M \to N$ glatko preslikavanje za koje je $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ bijekcija (tj. izomorfizam, regularni operator).

Tada postoje povezane okoline U_0 oko p i V_0 oko $F(p)$ takve da je $F|_{U_0} : U_0 \to V_0$ difeomorfizam.

Dokaz

Kako je F_* bijekcija, to M i N imaju iste dimenzije.

Dokaz

Kako je F_* bijekcija, to M i N imaju iste dimenzije.

Sada primijenimo euklidski rezultat na koordinatni prikaz od F. $\square$

Korolar

Neka su M, N glatke mnogostrukosti iste dimenzije, $F : M \to N$ imerzija ili submerzija.

Korolar

Neka su M, N glatke mnogostrukosti iste dimenzije, $F : M \to N$ imerzija ili submerzija.

Tada je F lokalni difeomorfizam.

Korolar

Neka su M, N glatke mnogostrukosti iste dimenzije, $F : M \to N$ imerzija ili submerzija.

Tada je F lokalni difeomorfizam.

Ako je F takodjer bijekcija, tada je F difeomorfizam.

Korolar

Neka su M, N glatke mnogostrukosti iste dimenzije, $F : M \to N$ imerzija ili submerzija.

Tada je F lokalni difeomorfizam.

Ako je F takodjer bijekcija, tada je F difeomorfizam.

Dokaz. Da je F lokalni difeomorfizam, slijedi iz Teorema o inverznom preslikavanju.

Korolar

Neka su M, N glatke mnogostrukosti iste dimenzije, $F : M \to N$ imerzija ili submerzija.

Tada je F lokalni difeomorfizam.

Ako je F takodjer bijekcija, tada je F difeomorfizam.

Dokaz. Da je F lokalni difeomorfizam, slijedi iz Teorema o inverznom preslikavanju.

S obzirom da je glatkoća lokalno svojstvo, svaki lokalni difeomorfizam koji je i bijekcija jest globalni difeomorfizam. $\square$

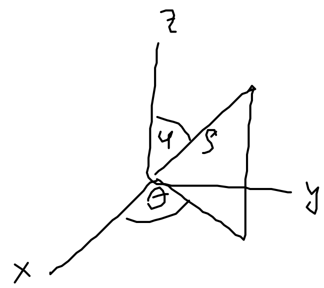
Primjer.

Sferne koordinate

Sferne koordinate (ρ, φ, θ) na $\mathbf{R}^3$ definirane su sa

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y &= \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z &= \rho \cos\varphi. \end{aligned}$$

Ako definiramo $F(\rho, \varphi, \theta) = (\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi)$, tada je F glatko preslikavanje sa $\mathbf{R}^3$ u $\mathbf{R}^3$.



Ako definiramo $F(\rho, \varphi, \theta) = (\rho \sin\varphi \cos\theta, \rho \sin\varphi \sin\theta, \rho\cos\varphi)$, tada je F glatko preslikavanje sa $\mathbf{R}^3$ u $\mathbf{R}^3$.

Jacobijan od F je

$$J_F = \det \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{pmatrix} = \rho^2 \sin\varphi.$$

Neka je $U \subset \mathbf{R}^3$ otvoren skup

$$U = \{(\rho, \varphi, \theta) \in \mathbf{R}^3 : \rho > 0, 0 < \varphi < \pi\}.$$

Neka je $U \subset \mathbf{R}^3$ otvoren skup

$$U = \{(\rho, \varphi, \theta) \in \mathbf{R}^3 : \rho > 0, 0 < \varphi < \pi\}.$$

Na U je očito $J_f \neq 0$.

Neka je $U \subset \mathbf{R}^3$ otvoren skup

$$U = \{(\rho, \varphi, \theta) \in \mathbf{R}^3 : \rho > 0, 0 < \varphi < \pi\}.$$

Na U je očito $J_f \neq 0$.

Iz Korolara 1.4 slijedi da je $F : U \to \mathbf{R}^3$ lokalni difeomorfizam.

Neka je $U \subset \mathbf{R}^3$ otvoren skup

$$U = \{(\rho, \varphi, \theta) \in \mathbf{R}^3 : \rho > 0, 0 < \varphi < \pi\}.$$

Na U je očito $J_f \neq 0$.

Iz Korolara 1.4 slijedi da je $F : U \to \mathbf{R}^3$ lokalni difeomorfizam.

Stavimo $V_0 = F(U_0)$, gdje je $U_0 \subset U$ otvoren skup na kojem je F injektivno.

Tada je inverzno preslikavanje $(F|_{U_0})^{-1} : V_0 \to U_0$ glatko.

Tada je inverzno preslikavanje $(F|_{U_0})^{-1} : V_0 \to U_0$ glatko.

Ovakva je argumentacija mnogo jednostavnija nego eksplicitno odredjivanje inverza od F.

Tada je inverzno preslikavanje $(F|_{U_0})^{-1} : V_0 \to U_0$ glatko.

Ovakva je argumentacija mnogo jednostavnija nego eksplicitno odredjivanje inverza od F.

Za skupove U_0, V_0 mogli smo, primjerice, uzeti

$$U_0 = \{(\rho, \varphi, \theta) \in \mathbf{R}^3 : \rho > 0,\ \ 0 < \varphi < \pi,\ \ 0 < \theta < 2\pi\},$$

$$V_0 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : y \neq 0 \ \text{ ili } \ x < 0\}.$$

Teorem o rangu za mnogostrukosti

Neka su M, N glatke mnogostrukosti dimenzija m i n redom, te neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje konstantnog ranga k.

Teorem o rangu za mnogostrukosti

Neka su M, N *glatke mnogostrukosti dimenzija* m *i* n *redom, te neka je* $F : M \to N$ *glatko preslikavanje konstantnog ranga* k.

Tada za svaki $p \in M$ *postoje glatke koordinate* $(x^1, \dots, x^m)$ *centrirane u* p *i glatke koordinate* $(v^1, \dots, v^n)$ *centrirane u* $F(p)$ *s obzirom na koje* F *ima sljedeći koordinatni prikaz*

$$F(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0).$$

Dokaz. Uzmimo $U \subset M$, $V \subset N$ za koordinatne domene oko p i $F(p)$, te koordinatni prikaz od F.

Dokaz. Uzmimo $U \subset M$, $V \subset N$ za koordinatne domene oko p i $F(p)$, te koordinatni prikaz od F.

Tada tvrdnja slijedi iz euklidskog slučaja. $\square$

Korolar

Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje na glatkoj povezanoj mnogostrukosti M. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

Korolar

Neka je $F : M \to N$ *glatko preslikavanje na glatkoj povezanoj mnogostrukosti* M*. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

1. *Za svaku točku* $p \in M$ *postoje glatke karte oko* p *i* $F(p)$ *s obzirom na koje je koordinatni prikaz od* F *linearan.*

Korolar

Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje na glatkoj povezanoj mnogostrukosti M. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

1. *Za svaku točku $p \in M$ postoje glatke karte oko p i $F(p)$ s obzirom na koje je koordinatni prikaz od F linearan.*
2. *F je konstantnog ranga.*

Dokaz. Pokažimo najprije da 1° povlači 2°.

Dokaz. Pokažimo najprije da 1° povlači 2°.

Neka F ima linearni koordinatni prikaz.

Dokaz. Pokažimo najprije da 1° povlači 2°.

Neka F ima linearni koordinatni prikaz.

Kako je svaki linearni operator konstantnog ranga, slijedi da je rang od F konstantan u okolini svake točke, te zbog povezanosti od M konstantan i na M.

Dokaz. Pokažimo najprije da 1° povlači 2°.

Neka F ima linearni koordinatni prikaz.

Kako je svaki linearni operator konstantnog ranga, slijedi da je rang od F konstantan u okolini svake točke, te zbog povezanosti od M konstantan i na M.

Obratno, ako F ima konstantni rang, tada Teorem o rangu povlači da je njegov prikaz linearan u okolini proizvoljne točke. $\square$

Teorem

Neka je $F : M \to N$ *glatko preslikavanje konstantnog ranga.*

Teorem

Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje konstantnog ranga.

1. *Ako je F surjektivno, tada je F submerzija.*

Teorem

Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje konstantnog ranga.

1. *Ako je F surjektivno, tada je F submerzija.*
2. *Ako je F injektivno, tada je F imerzija.*

Teorem

Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje konstantnog ranga.

1. *Ako je F surjektivno, tada je F submerzija.*
2. *Ako je F injektivno, tada je F imerzija.*
3. *Ako je F bijektivno, tada je F difeomorfizam.*

Dokaz

Uočimo da 3° lako slijedi iz 1° i 2°. Naime, 1° i 2° povlače da je F submerzija i imerzija, pa M i N imaju jednake dimenzije.
Sada Korolar 1.4 povlači da je F difeomorfizam.

Dokaz

Uočimo da 3° lako slijedi iz 1° i 2°. Naime, 1° i 2° povlače da je F submerzija i imerzija, pa M i N imaju jednake dimenzije.
Sada Korolar 1.4 povlači da je F difeomorfizam.

Da dokažemo 2°, stavimo $m = \dim M$, $n = \dim N$, $k = rg\, F$.

Dokaz

Uočimo da 3° lako slijedi iz 1° i 2°. Naime, 1° i 2° povlače da je F submerzija i imerzija, pa M i N imaju jednake dimenzije.
Sada Korolar 1.4 povlači da je F difeomorfizam.

Da dokažemo 2°, stavimo $m = \dim M$, $n = \dim N$, $k = rg\, F$.

Pretpostavimo da F nije imerzija. Tada je $k < m$.

Dokaz- nastavak

Po Teoremu o rangu, u okolini po volji odabrane točke, postoji koordinatna karta u kojoj F ima koordinatni prikaz

$$F(x^1, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0).$$

Dokaz- nastavak

Po Teoremu o rangu, u okolini po volji odabrane točke, postoji koordinatna karta u kojoj F ima koordinatni prikaz

$$F(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0).$$

Sada slijedi $F(0, \dots, 0, \varepsilon) = (0, \dots, 0, 0)$, za bilo koji dovoljno mali ε. Stoga F nije injekcija.

Dokaz- nastavak

Po Teoremu o rangu, u okolini po volji odabrane točke, postoji koordinatna karta u kojoj F ima koordinatni prikaz

$$F(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0).$$

Sada slijedi $F(0, \dots, 0, \varepsilon) = (0, \dots, 0, 0)$, za bilo koji dovoljno mali ε. Stoga F nije injekcija.

Za dokaz tvrdnje 1°, koristimo rezultate o skupovima mjere 0 na mnogostrukosti.

Podmnogostrukosti

Motivacija. Linearni slučaj: L je k-dimenzionalni potprostor od $\mathbf{R}^n$.

Podmnogostrukosti

Motivacija. Linearni slučaj: L je k-dimenzionalni potprostor od $\mathbf{R}^n$.

Tada L možemo dobiti kao

1. jezgru surjektivnog preslikavanja $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n-k}$,

Podmnogostrukosti

V

Motivacija. Linearni slučaj: $\cancel{L}$ je k-dimenzionalni potprostor od $\mathbf{R}^n$.

Tada L možemo dobiti kao

linearnog

1. jezgru surjektivnog preslikavanja $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n-k}$,
2. sliku injektivnog preslikavanja $L : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$.

lin.

Definicija

Neka je U *otvoren podskup u* $\mathbf{R}^n$.

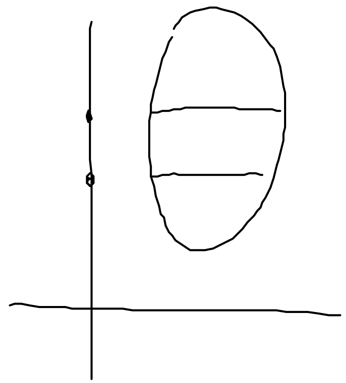
Definicija

Neka je U otvoren podskup u $\mathbf{R}^n$.

Podskup od $\mathbf{R}^n$ oblika

$$S = \{(x^1, \ldots, x^k, x^{k+1}, \ldots, x^n) \in U : x^{k+1} = c^{k+1}, \ldots, x^n = c^n\},$$

gdje su $c^{k+1}, \ldots, c^n$ konstante, nazivamo k-slojem od U. (slice)



Definicija

Neka je M glatka mnogostrukost, (U, φ) koordinatna karta na M.

Definicija

Neka je M glatka mnogostrukost, (U, φ) koordinatna karta na M.

Podskup S od U za koji je $\varphi(S)$ k-sloj od $\varphi(U)$ nazivamo k-slojem od U.

Definicija

Neka je M glatka mnogostrukost, (U, φ) koordinatna karta na M.

Podskup S od U za koji je $\varphi(S)$ k-sloj od $\varphi(U)$ nazivamo k-slojem od U.

Tada koordinate (U, φ) nazivamo koordinatama sloja.

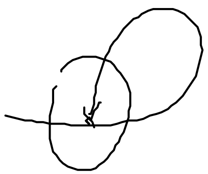
Definicija

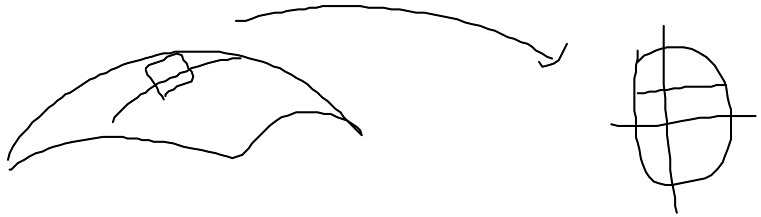
Neka je M glatka mnogostrukost, (U, φ) koordinatna karta na M.

Podskup S od U za koji je $\varphi(S)$ k-sloj od $\varphi(U)$ nazivamo k-slojem od U.

Tada koordinate (U, φ) nazivamo koordinatama sloja.

Podskup $N \subset M$ nazivamo smještenom podmnogostrukošću (regularnom podmnogostrukošću) dimenzije k ako za svaku točku $p \in N$ postoji koordinatna karta (U, φ) od M takva da je $p \in U$ i $U \cap N$ je k-sloj od U.





Razliku $\dim M - \dim N$ nazivamo *kodimenzijom* od N u M.

Razliku $\dim M - \dim N$ nazivamo *kodimenzijom* od N u M.

Primjerice, smještene hiperplohe su smještene podmnogostrukosti kodimenzije 1, otvorene podmnogostrukosti su smještene podmnogostrukosti kodimenzije 0.

Lema (Lokalna priroda smještenih podmnogostrukosti)

Neka je M glatka mnogostrukost i N podskup od M.

Lema (Lokalna priroda smještenih podmnogostrukosti)

Neka je M glatka mnogostrukost i N podskup od M.

Neka svaka točka $p \in N$ ima okolinu $U \subset M$ takvu da je $U \cap N$ smještena k-podmnogostrukost. od U

Lema (Lokalna priroda smještenih podmnogostrukosti)

Neka je M glatka mnogostrukost i N podskup od M.

Neka svaka točka $p \in N$ ima okolinu $U \subset M$ takvu da je $U \cap N$ smještena k-podmnogostrukost.

Tada je N smještena k-podmnogostrukost.

Primjer 1.

Standardno smještenje $\mathbf{R}^k$ u $\mathbf{R}^n$

$$(x^1, \ldots, x^k) \mapsto (x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0)$$

Primjer 2. Graf glatke funkcije

Neka je $F : U \to \mathbf{R}^k$, $U \subset \mathbf{R}^n$ glatka funkcija.

Primjer 2. Graf glatke funkcije

Neka je $F : U \to \mathbf{R}^k$, $U \subset \mathbf{R}^n$ glatka funkcija.

Njezin graf

$$\Gamma(F) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k : x \in U, \;\; y = F(x).\}$$

je smještena n-dimenzionalna podmnogostrukost mnogostrukosti $\mathbf{R}^{n+k}$.

Primjer 2. Graf glatke funkcije

Neka je $F : U \to \mathbf{R}^k$, $U \subset \mathbf{R}^n$ glatka funkcija.

Njezin graf

$$\Gamma(F) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k : x \in U, \;\; y = F(x).\}$$

je smještena n-dimenzionalna podmnogostrukost mnogostrukosti $\mathbf{R}^{n+k}$.

Definiramo preslikavanje $\varphi : U \times \mathbf{R}^k \to U \times \mathbf{R}^k$

$$\varphi(x, y) = (x, y - F(x)).$$

Primjer 2. Graf glatke funkcije

Neka je $F : U \to \mathbf{R}^k$, $U \subset \mathbf{R}^n$ glatka funkcija.

Njezin graf

$$\Gamma(F) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k : x \in U, \;\; y = F(x).\}$$

je smještena n-dimenzionalna podmnogostrukost mnogostrukosti $\mathbf{R}^{n+k}$.

Definiramo preslikavanje $\varphi : U \times \mathbf{R}^k \to U \times \mathbf{R}^k$

$$\varphi(x, y) = (x, y - F(x)).$$

Preslikavanje φ je difeomorfizam s inverzom $\varphi^{-1}(u, v) = (u, v + F(u))$, a $\varphi(\Gamma(F))$ je sloj $\{(u, v) : v = 0\}$ od $U \times \mathbf{R}^k$.

Primjer 3.

Sfera S^2 je smještena podmnogostrukost u $\mathbf{R}^3$.

Primjer 3.

Sfera S^2 je smještena podmnogostrukost u $\mathbf{R}^3$.

Neka je $U = D \times \mathbf{R}$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1)\}$ otvoren podskup od $\mathbf{R}^3$.

Primjer 3.

Sfera S^2 je smještena podmnogostrukost u $\mathbf{R}^3$.

Neka je $U = D \times \mathbf{R}$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1)\}$ otvoren podskup od $\mathbf{R}^3$.

Definiramo preslikavanje $\varphi : U \to U$,
$\varphi(x, y, z) = (x, y, z - \sqrt{1 - x^2 + y^2})$.

Primjer 3.

Sfera S^2 je smještena podmnogostrukost u $\mathbf{R}^3$.

Neka je $U = D \times \mathbf{R}$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1)\}$ otvoren podskup od $\mathbf{R}^3$.

Definiramo preslikavanje $\varphi : U \to U$,
$\varphi(x, y, z) = (x, y, z - \sqrt{1 - x^2 + y^2})$.

Gornja polusfera je sloj

$$\varphi(S^2_+) = \{(u, v, w) \in U : w = 0\}.$$

Primjer 3.

Sfera S^2 je smještena podmnogostrukost u $\mathbf{R}^3$.

Neka je $U = D \times \mathbf{R}$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1)\}$ otvoren podskup od $\mathbf{R}^3$.

Definiramo preslikavanje $\varphi : U \to U$,
$\varphi(x, y, z) = (x, y, z - \sqrt{1 - x^2 + y^2})$.

Gornja polusfera je sloj

$$\varphi(S^2_+) = \{(u, v, w) \in U : w = 0\}.$$

Oko svake točke sfere možemo konstruirati kartu sloja.

Analogno bismo dokazali da je sfera S^n smještena podmnogostrukost u $\mathbf{R}^{n+1}$.

Analogno bismo dokazali da je sfera S^n smještena podmnogostrukost u $\mathbf{R}^{n+1}$.

Drugačije, u sfernim koordinatama (r, φ, θ) imamo $r = 1$.

Teorem

Neka je $N \subset M$ smještena k-podmnogostrukost u M.

Teorem

Neka je $N \subset M$ smještena k-podmnogostrukost u M.

Tada je N s relativnom topologijom topološka mnogostrukost dimenzije k i ima jedinstvenu glatku strukturu tako da je inkluzija $N \hookrightarrow M$ glatko smještenje.

Dokaz (skica)

Osnovna ideja: Ako su $(x^1, \ldots, x^n)$ koordinate sloja za N u M, tada koristimo $(x^1, \ldots, x^k)$ kao koordinate za N.

Dokaz (skica)

Osnovna ideja: Ako su $(x^1, \ldots, x^n)$ koordinate sloja za N u M, tada koristimo $(x^1, \ldots, x^k)$ kao koordinate za N.

1. N je Hausdorffov i zadovoljava 2. aksiom prebrojivosti, jer ta svojstva nasljedjuju podskupovi.

Dokaz - nastavak

2. Neka je (U, φ) koordinatna karta sloja, $\pi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ projekcija.

Dokaz - nastavak

2. Neka je (U, φ) koordinatna karta sloja, $\pi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ projekcija.

Tada

$$V = U \cap N \subset \overset{N}{\cancel{M}}, \quad \tilde{V} = \pi \circ \varphi(V) \subset \mathbf{R}^k, \quad \psi = \pi \circ \varphi|_V : V \to \tilde{V}$$

definira atlas na N, te je N topološka k-mnogostrukost i inkluzija $i : N \hookrightarrow M$ je topološko smještenje.

Dokaz - nastavak

3. N je glatka mnogostrukost: provjeriti jesu li konstruirane karte glatko povezane.

Dokaz - nastavak

3. N je glatka mnogostrukost: provjeriti jesu li konstruirane karte glatko povezane.

4. Jedinstvenost glatke strukture s danim svojstvima: neka je $\mathcal{A}$ neka druga glatka struktura sa svojstvom da je inkluzija glatko smještenje.

Dokaz - nastavak

3. N je glatka mnogostrukost: provjeriti jesu li konstruirane karte glatko povezane.

4. Jedinstvenost glatke strukture s danim svojstvima: neka je $\mathcal{A}$ neka druga glatka struktura sa svojstvom da je inkluzija glatko smještenje.

Dovoljno je pokazati da je svaka karta konstruiranog atlasa (V, ψ) povezana sa svakom kartom od $\mathcal{A}$. $\square$

Teorem

Slika glatkog smještenja je smještena podmnogostrukost.

Dokaz

Neka je $F : N \to M$ glatko smještenje.

Dokaz

Neka je $F : N \to M$ glatko smještenje.

Treba pokazati da svaka točka od $F(N)$ ima koordinatnu okolinu $U \subset M$ tako da je $F(N) \cap U$ sloj u U.

Dokaz - nastavak

Neka je $p \in N$. Preslikavanje F je preslikavanje konstantnog ranga, te Teorem o rangu povlači da postoje koordinatne karte (U, φ) (centrirana u p), (V, ψ) (centrirana u $F(p)$) s obzirom na koje koordinatni prikaz od F glasi

$$F(x^1, \ldots, x^k) = (x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0).$$

Dokaz - nastavak

Neka je $p \in N$. Preslikavanje F je preslikavanje konstantnog ranga, te Teorem o rangu povlači da postoje koordinatne karte (U, φ) (centrirana u p), (V, ψ) (centrirana u $F(p)$) s obzirom na koje koordinatni prikaz od F glasi

$$F(x^1, \dots, x^k) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0).$$

To povlači da je $F(U)$ sloj u V.

Dokaz - nastavak

Kako je smještenje homeomorfizam na sliku u relativnoj topologiji, $F(U)$ otvoren u $F(N)$ znači da postoji otvoren skup $W \subset M$ takav da je $F(U) = W \cap F(N)$.

Dokaz - nastavak

Kako je smještenje homeomorfizam na sliku u relativnoj topologiji, $F(U)$ otvoren u $F(N)$ znači da postoji otvoren skup $W \subset M$ takav da je $F(U) = W \cap F(N)$.

Stavimo $\tilde{V} = V \cap W$, te dobivamo kartu sloja $(\tilde{V}, \psi|_{\tilde{V}})$ koja sadrži $F(p)$ i za koju vrijedi da je $\tilde{V} \cap F(N) = \tilde{V} \cap F(U)$ sloj za $\tilde{V}$. $\square$

Korolar

Smještene podmogostrukosti su upravo slike glatkih smještenja.

Korolar

Smještene podmogostrukosti su upravo slike glatkih smještenja.

Dokaz. Iz prethodna dva teorema.

Korolar

Smještene podmogostrukosti su upravo slike glatkih smještenja.

Dokaz. Iz prethodna dva teorema.

Neka je $N \subset M$ smještena podmnogostrukost. Tada je $N = i(N)$, gdje je $i : N \hookrightarrow M$ smještenje (Teorem 1.10).

Korolar

Smještene podmogostrukosti su upravo slike glatkih smještenja.

Dokaz. Iz prethodna dva teorema.

Neka je $N \subset M$ smještena podmnogostrukost. Tada je $N = i(N)$, gdje je $i : N \hookrightarrow M$ smještenje (Teorem 1.10).

Obratno, ako je $F : \overset{N}{\cancel{M}} \to M$ smještenje, tada je $F(N) \subset M$ smještena podmnogostrukost (Teorem 1.11). $\square$

Tangencijalni prostor smještene podmogostrukosti

Tangencijalni prostor smještene podmogostrukosti moći ćemo, uz odgovarajuće identifikacije, promatrati kao potprostor tangencijalnog prostora mogostrukosti.

Tangencijalni prostor smještene podmogostrukosti

Tangencijalni prostor smještene podmogostrukosti moći ćemo, uz odgovarajuće identifikacije, promatrati kao potprostor tangencijalnog prostora mogostrukosti.

Neka je N smještena podmnogostrukost u M, M glatka mnogostrukost.

Tangencijalni prostor smještene podmogostrukosti

Tangencijalni prostor smještene podmogostrukosti moći ćemo, uz odgovarajuće identifikacije, promatrati kao potprostor tangencijalnog prostora mogostrukosti.

Neka je N smještena podmnogostrukost u M, M glatka mnogostrukost.

Kako je preslikavanje $i : N \hookrightarrow M$ smještenje (posebno, imerzija), u točki $p \in N$ preslikavanje $i_* : T_pN \to T_pM$ je injektivno.

Tangencijalni prostor smještene podmogostrukosti identificiramo sa slikom tog preslikavanja, pa T_pN shvaćamo kao podskup od T_pM.

Tangencijalni prostor smještene podmogostrukosti identificiramo sa slikom tog preslikavanja, pa T_pN shvaćamo kao podskup od T_pM.

Pritom derivaciju (tangencijalni vektor) $X \in T_pN$ identificiramo sa $i_*X \in T_pM$ koji djeluje na $f \in C^\infty(M)$ kao

$$Xf = (i_*X)f = X(f \circ i) = X(f|_N).$$

Propozicija

Kao potprostor od T_pM, tangencijalni prostor T_pN dan je sa

$$T_pN = \{X \in T_pM : Xf = 0 \text{ za } f \in C^\infty(M),\ f|_N = 0\}.$$