GLATKE I RIEMANNOVE MNOGOSTRUKOSTI

Željka Milin-Šipuš, Pavle Pandžić i Juraj Šiftar

Drugi dio standardnog poslijediplomskog kolegija **Geometrija i topologija**. Izvodi se u ljetnom semestru (30 sati predavanja).

Motivacija

Tangencijalni vektori omogućuju bez-koordinatnu interpretaciju derivacije krivulje, tangencijalni kovektori omogućuju bez-koordinatnu interpretaciju derivacije realne funkcije na mnogostrukosti.

Motivacija

Tangencijalni vektori omogućuju bez-koordinatnu interpretaciju derivacije krivulje, tangencijalni kovektori omogućuju bez-koordinatnu interpretaciju derivacije realne funkcije na mnogostrukosti.

Integracija. Kovektori vode do diferencijalnih formi, a one se mogu integrirati po izvjesnim podmnogostrukostima.

Dualni vektorski prostor

Neka je V (realni) vektorski prostor, $\dim V < \infty$, V^* dualni prostor od V, tj. prostor svih linearnih funkcionala na V

$$V^* = \{f : V \to \mathbf{R} |\ f \ \text{linearan}\}.$$

Dualni vektorski prostor

Neka je V (realni) vektorski prostor, $\dim V < \infty$, V^* dualni prostor od V, tj. prostor svih linearnih funkcionala na V

$$V^* = \{f : V \to \mathbf{R} |\ f \ \text{linearan}\}.$$

V^* je vektorski prostor uz uobičajene operacije zbrajanja funkcija i množenja funkcija skalarom. Njegove elemente zovemo *kovektori.*

Dualni vektorski prostor

Dualna baza za V^*: neka je $(e_1, \ldots, e_n)$ baza za V.

Dualni vektorski prostor

Dualna baza za V^*: neka je $(e_1, \ldots, e_n)$ baza za V.

Definiramo kovektore $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ djelovanjem na bazi

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}.$$

Dualni vektorski prostor

Dualna baza za V^*: neka je $(e_1, \ldots, e_n)$ baza za V.

Definiramo kovektore $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ djelovanjem na bazi

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}.$$

Kovektori $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ čine bazu od V^* koju nazivamo *dualnom bazom* baze $(e_1, \ldots, e_n)$.

Dualni vektorski prostor

Dualna baza za V^*: neka je $(e_1, \ldots, e_n)$ baza za V.

Definiramo kovektore $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ djelovanjem na bazi

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}.$$

Kovektori $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ čine bazu od V^* koju nazivamo *dualnom bazom* baze $(e_1, \ldots, e_n)$.

Odatle slijedi $\dim V^* = \dim V < \infty$.

Dualni vektorski prostor

Dualna baza za V^*: neka je $(e_1, \ldots, e_n)$ baza za V.

Definiramo kovektore $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ djelovanjem na bazi

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}.$$

Kovektori $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ čine bazu od V^* koju nazivamo *dualnom bazom* baze $(e_1, \ldots, e_n)$.

Odatle slijedi $\dim V^* = \dim V < \infty$.

Pišemo $e_i^* = \epsilon^i$.

Primjer

Neka je $(e_1, \ldots, e_n)$ standardna baza za $\mathbf{R}^n$.

Primjer

Neka je $(e_1, \ldots, e_n)$ standardna baza za $\mathbf{R}^n$.

Označimo sa $(\epsilon^1, \ldots, \epsilon^n)$ dualnu bazu (standardna baza za V^*).

Primjer

Neka je $(e_1, \ldots, e_n)$ standardna baza za $\mathbf{R}^n$.

Označimo sa $(\epsilon^1, \ldots, \epsilon^n)$ dualnu bazu (standardna baza za V^*).

Za vektor $v \in \mathbf{R}^n$, $v = \sum_i v^i e_i$, vrijedi

$$\epsilon^i(v) = v^i.$$

Matrični prikaz kovektora (= linearnih operatora : $V \to \mathbf{R}$) je $(1, n)$ matrica (matrica redak).

Matrični prikaz kovektora (= linearnih operatora : $V \to \mathbf{R}$) je $(1, n)$ matrica (matrica redak).

Pišemo
$$\epsilon^i = (0 \ldots 0\ 1\ 0 \ldots 0).$$

Općenito, ako je V vektorski prostor, (e_i) baza za V, (ϵ^j) dualna baza, $X \in V$, $X = \sum_i X^i e_i$, tada je

$$\epsilon^j(X) = X^j.$$

Općenito, ako je V vektorski prostor, (e_i) baza za V, (ϵ^j) dualna baza, $X \in V$, $X = \sum_i X^i e_i$, tada je

$$\epsilon^j(X) = X^j.$$

Ako je $\omega \in V^*$ po volji odabrani kovektor, $\omega = \sum_j \omega_j \epsilon^j$, tada je

$$\omega_{\cancel{j}}^{\,i} = \omega(e_{\cancel{j}}^{\,i}).$$

Općenito, ako je V vektorski prostor, (e_i) baza za V, (ϵ^j) dualna baza, $X \in V$, $X = \sum_i X^i e_i$, tada je

$$\epsilon^j(X) = X^j.$$

Ako je $\omega \in V^*$ po volji odabrani kovektor, $\omega = \sum_j \omega_j \epsilon^j$, tada je

$$\omega_j = \omega(e_j).$$

Odavde

$$\omega(X) = \sum_j \omega_j X^j.$$

Neka su V, W vektorski prostori, $A : V \to W$ linearni operator.

Neka su V, W vektorski prostori, $A : V \to W$ linearni operator.

Definiramo preslikavanje

$$A^* : W^* \to V^*$$

$$A^*(\omega)(X) = \omega(AX), \ \ \omega \in W^*, \ \ X \in V.$$

Neka su V, W vektorski prostori, $A : V \to W$ linearni operator.

Definiramo preslikavanje

$$A^* : W^* \to V^*$$

$$A^*(\omega)(X) = \omega(AX), \;\; \omega \in W^*, \;\; X \in V.$$

Preslikavanje A^* je linearni operator kojeg nazivamo *dualni (transponirani)* operator.

Dualni operator ima sljedeća svojstva:

Dualni operator ima sljedeća svojstva:

1. $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$

Dualni operator ima sljedeća svojstva:

1. $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$
2. $(Id_V)^* : V^* \to V^*$ je identiteta na V^*.

Drugi dual $V^{**} := (V^*)^* \cong V$, itd.

Drugi dual $V^{**} := (V^*)^* \cong V$, itd.

Postoji prirodni izomorfizam vektorskih prostora V i V^{**}: vektoru $X \in V$ pridružen je linearni funkcional $\xi(X) : V^* \to \mathbf{R}$ ($\xi(X) \in V^{**}$) definiran sa

$$\xi(X)(\omega) = \omega(X), \;\; \omega \in V^*.$$

Propozicija

Ako je $\dim V < \infty$, *tada je preslikavanje* $\xi : V \to V^{**}$ *izomorfizam.*

Propozicija

Ako je $\dim V < \infty$*, tada je preslikavanje* $\xi : V \to V^{**}$ *izomorfizam.*

Definiramo *sparivanje* vektora i kovektora: $\langle \omega, X \rangle = \omega(X)$ ili $\xi(X)(\omega)$ (simetrična notacija).

Tangencijalni kovektori na mnogostrukosti

Neka je M glatka mnogostrukost, T_pM tangencijalni prostor u $p \in M$.

Tangencijalni kovektori na mnogostrukosti

Neka je M glatka mnogostrukost, T_pM tangencijalni prostor u $p \in M$.

Kotangencijalni prostor u $p \in M$ je

$$T_p^*M = (T_pM)^*.$$

Tangencijalni kovektori na mnogostrukosti

Neka je M glatka mnogostrukost, T_pM tangencijalni prostor u $p \in M$.

Kotangencijalni prostor u $p \in M$ je

$$T_p^*M = (T_pM)^*.$$

Elementi od T_p^*M nazivaju se *tangencijalni kovektori* u p.

Koordinatni prikaz tangencijalnih kovektora

Neka je $(U, (x^i))$ koordinatna karta na M, $(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p)$ standardna baza za tangencijalni prostor.

Koordinatni prikaz tangencijalnih kovektora

Neka je $(U, (x^i))$ koordinatna karta na M, $(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p)$ standardna baza za tangencijalni prostor.

Označimo dualnu bazu $(\lambda^i|_p)$.

Koordinatni prikaz tangencijalnih kovektora

Neka je $(U, (x^i))$ koordinatna karta na M, $(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p)$ standardna baza za tangencijalni prostor.

Označimo dualnu bazu $(\lambda^i|_p)$.

Za $\omega \in T_p^*M$, $\omega = \sum_i \omega_i \lambda^i|_p$ vrijedi

$$\omega_i = \omega(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p).$$

Promjena koordinata

Neka su $(\tilde{x}^j)$ druge lokalne koordinate oko točke p, $(\tilde{\lambda}^i|_p)$ dualna baza za $(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}|_p)$.

Promjena koordinata

Neka su $(\tilde{x}^j)$ druge lokalne koordinate oko točke p, $(\tilde{\lambda}^i|_p)$ dualna baza za $(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}|_p)$.

Odredimo koordinate kovektora ω s obzirom na obje baze.

Za tangencijalne vektore vrijedi (lančano pravilo)

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p = \sum_j \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(p)\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}|_p. \tag{1}$$

Za tangencijalne vektore vrijedi (lančano pravilo)

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p = \sum_j \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}|_p. \tag{1}$$

Za kovektor ω vrijedi

$$\omega = \sum_i \omega_i \lambda^i|_p = \sum_j \tilde{\omega}_j \tilde{\lambda}^j|_p.$$

Za tangencijalne vektore vrijedi (lančano pravilo)

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p = \sum_j \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(p)\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}|_p. \tag{1}$$

Za kovektor ω vrijedi

$$\omega = \sum_i \omega_i \lambda^i|_p = \sum_j \tilde{\omega}_j \tilde{\lambda}^j|_p.$$

Slijedi da je

$$\omega_i = \omega(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p) = \sum_j \omega\left(\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(p)\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}|_p\right) = \sum_j \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(p)\tilde{\omega}_j.$$

Transformacija koordinata tangencijalnih vektora

$$\tilde{X}^j = \sum_i \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(p) X^i \tag{2}$$

Transformacija koordinata tangencijalnih vektora

$$\tilde{X}^j = \sum_i \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(p) X^i \tag{2}$$

Transformacija koordinata tangencijalnih kovektora

$$\omega_i = \sum_j \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(p) \tilde{\omega}_j \tag{3}$$

Transformacija (1) direktno slijedi iz lančanog pravila, te se smatra fundamentalnom.

Transformacija (1) direktno slijedi iz lančanog pravila, te se smatra fundamentalnom.

Uočimo transformacije (2) i (3).

Transformacija (1) direktno slijedi iz lančanog pravila, te se smatra fundamentalnom.

Uočimo transformacije (2) i (3).

Tangencijalne kovektore nazivamo *kovarijantnima* jer se njihove komponente transformiraju na isti način kao u transformaciji (1) (množenjem Jacobijeve matrice s "novim koordinatama" da bi se dobilo "stare koordinate").

Transformacija (1) direktno slijedi iz lančanog pravila, te se smatra fundamentalnom.

Uočimo transformacije (2) i (3).

Tangencijalne kovektore nazivamo *kovarijantnima* jer se njihove komponente transformiraju na isti način kao u transformaciji (1) (množenjem Jacobijeve matrice s "novim koordinatama" da bi se dobilo "stare koordinate").

Tangencijalne vektore nazivamo *kontravarijantnima*.

Kotangencijalni svežanj kao glatka mnogostrukost i vektorski svežanj

Disjunktna unija

$$T^*M = \coprod_{p \in M} T_p^*M$$

naziva se *kotangencijalni svežanj* od M.

Kotangencijalni svežanj kao glatka mnogostrukost i vektorski svežanj

Disjunktna unija
$$T^*M = \coprod_{p \in M} T_p^*M$$
naziva se *kotangencijalni svežanj* od M.

Prirodna projekcija $\pi : T^*M \to M$ preslikava $\omega \in T_p^*M$ u $p \in M$.

Kotangencijalni svežanj kao glatka mnogostrukost i vektorski svežanj

Disjunktna unija
$$T^*M = \coprod_{p \in M} T_p^*M$$
naziva se *kotangencijalni svežanj* od M.

Prirodna projekcija $\pi : T^*M \to M$ preslikava $\omega \in T_p^*M$ u $p \in M$.

Za glatke lokalne koordinate $(U, (x^i))$, baza od T^*M dualna bazi $(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p)$ je $(\lambda^i|_p)$.

Kotangencijalni svežanj kao glatka mnogostrukost i vektorski svežanj

Disjunktna unija

$$T^*M = \coprod_{p \in M} T_p^*M$$

naziva se *kotangencijalni svežanj* od M.

Prirodna projekcija $\pi : T^*M \to M$ preslikava $\omega \in T_p^*M$ u $p \in M$.

Za glatke lokalne koordinate $(U, (x^i))$, baza od T^*M dualna bazi $(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p)$ je $(\lambda^i|_p)$.

Definirana su preslikavanja $\lambda^1, \ldots, \lambda^n : U \to T^*M$ koja se nazivaju *koordinatna kovektorska polja*.

Propozicija

Neka je M glatka mnogostrukost, T^*M kotangencijalni svežanj od M.

Propozicija

Neka je M glatka mnogostrukost, T^*M kotangencijalni svežanj od M.

Uz standardnu projekciju i prirodnu strukturu vektorskog prostora na svakom vlaknu, T^*M ima jedinstvenu strukturu glatke mnogostrukosti uz koju postaje vektorski svežanj nad M za koji su sva koordinatna kovektorska polja glatki lokalni prerezi.

Dokaz

Neka je (U, φ) glatka koordinatna karta na M,
$\varphi(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p))$.

Dokaz

Neka je (U, φ) glatka koordinatna karta na M,
$\varphi(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p))$.

Koordinatnu kartu na T^*M definiramo kao $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$, gdje je
$\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \mathbf{R}^{2n}$

$$\tilde{\varphi}(\sum_i \omega_i \lambda^i|_p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p), \omega_1, \ldots, \omega_n).$$

Dokaz

Neka je (U, φ) glatka koordinatna karta na M,
$\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$.

Koordinatnu kartu na T^*M definiramo kao $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$, gdje je
$\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \mathbf{R}^{2n}$

$$\tilde{\varphi}(\sum_i \omega_i \lambda^i|_p) = (x^1(p), \dots, x^n(p), \omega_1, \dots, \omega_n).$$

Te se koordinate nazivaju *standardnim lokalnim koordinatama* na T^*M.

Dokaz-nastavak

Funkcija prijelaza: Neka su (U, φ) i (V, ψ) dvije glatke karte za M, $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$, $(\pi^{-1}(V), \tilde{\psi})$ odgovarajuće karte od T^*M.

Dokaz-nastavak

Funkcija prijelaza: Neka su (U, φ) i (V, ψ) dvije glatke karte za M, $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$, $(\pi^{-1}(V), \tilde{\psi})$ odgovarajuće karte od T^*M.

Tada je

$$\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}^{-1}(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n, \tilde{\omega}_1, \ldots, \tilde{\omega}_n) = \left(x^1(\tilde{x}), \ldots, x^n(\tilde{x}), \sum_j \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^1}(\tilde{x})\tilde{\omega}_j, \ldots, \sum_j \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^n}(\tilde{x})\tilde{\omega}_j \right)$$

glatko preslikavanje.

Dokaz-nastavak

Lokalna trivijalizacija: $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbf{R}^n$

$$\Phi(\sum_i \omega_i \lambda^i|_p) = (p, (\omega_1, \ldots, \omega_n)).$$

Dokaz-nastavak

Lokalna trivijalizacija: $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbf{R}^n$

$$\Phi(\sum_i \omega_i \lambda^i|_p) = (p, (\omega_1, \ldots, \omega_n)).$$

Preslikavanje Φ je očito linearno na vlaknima i vrijedi $\pi_1 \circ \Phi = \pi$.

Dokaz-nastavak

Lokalna trivijalizacija: $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbf{R}^n$

$$\Phi(\sum_i \omega_i \lambda^i|_p) = (p, (\omega_1, \ldots, \omega_n)).$$

Preslikavanje Φ je očito linearno na vlaknima i vrijedi $\pi_1 \circ \Phi = \pi$.

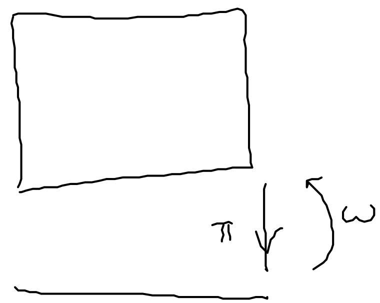
Uočimo da je kompozicija

$$\pi^{-1}(U) \to U \times \mathbf{R}^n \to \varphi(U) \times \mathbf{R}^n$$

jednaka koordinatnom preslikavanju $\tilde{\varphi}$.

Definicija

Prerez svežnja T^*M naziva se kovektorskim poljem ili diferencijalnom 1-formom.



$\pi \circ \omega = id$

Definicija

Prerez svežnja T^*M naziva se kovektorskim poljem ili diferencijalnom 1-formom.

Neka je ω kovektorsko polje. Pišemo $\omega_p = \omega(p)$.

U lokalnim koordinatama na $U \subset M$, kovektorsko polje ω ima prikaz preko koordinatnih kovektorskih polja (λ^i) kao

$$\omega = \sum_i \omega_i \lambda^i,$$

gdje su $\omega_i : U \to \mathbf{R}$ koordinatne (komponentne) funkcije.

U lokalnim koordinatama na $U \subset M$, kovektorsko polje ω ima prikaz preko koordinatnih kovektorskih polja (λ^i) kao

$$\omega = \sum_i \omega_i \lambda^i,$$

gdje su $\omega_i : U \to \mathbf{R}$ koordinatne (komponentne) funkcije.

Za njih vrijedi

$$\omega_i(p) = \omega_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p \right).$$

Propozicija (Kriterij za glatka kovektorska polja)

Neka je M glatka mnogostrukost, $\omega : M \to T^*M$ kovektorsko polje.

Propozicija (Kriterij za glatka kovektorska polja)

Neka je M glatka mnogostrukost, $\omega : M \to T^*M$ kovektorsko polje.

1. *Ako je $\omega = \sum_i \omega_i \lambda^i$ u nekoj glatkoj koordinatnoj karti od M, tada je ω glatko polje ako i samo ako su njegove koordinatne funkcije ω_i glatke.*

Propozicija (Kriterij za glatka kovektorska polja)

Neka je M glatka mnogostrukost, $\omega : M \to T^*M$ kovektorsko polje.

1. *Ako je $\omega = \sum_i \omega_i \lambda^i$ u nekoj glatkoj koordinatnoj karti od M, tada je ω glatko polje ako i samo ako su njegove koordinatne funkcije ω_i glatke.*

2. *ω je glatko ako i samo ako je za svako glatko vektorsko polje X na otvorenom podskupu $U \subset M$, funkcija $\langle \omega, X \rangle$ definirana sa*
$$\langle \omega, X \rangle(p) = \langle \omega_p, X_p \rangle = \omega_p(X_p)$$
glatka.

Lokalni koreper je uredjena n-torka $(\epsilon^1, \ldots, \epsilon^n)$ kovektorskih polja definiranih na nekom otvorenom podskupu $U \subset M$ takvih da $(\epsilon^i|_p)$ čine bazu za $T_p^* M$, $p \in M$.

Lokalni koreper je uredjena n-torka $(\epsilon^1, \ldots, \epsilon^n)$ kovektorskih polja definiranih na nekom otvorenom podskupu $U \subset M$ takvih da $(\epsilon^i|_p)$ čine bazu za $T_p^* M$, $p \in M$.

Ako je $U = M$, tada govorimo o *globalnom koreperu*.

Ako je (E_i) lokalni reper za TM nad U, tada je jedinstveno odredjen lokalni koreper (ϵ^i) koji zadovoljava

$$\epsilon^i(E_j) = \delta^i_j.$$

Ako je (E_i) lokalni reper za TM nad U, tada je jedinstveno odredjen lokalni koreper (ϵ^i) koji zadovoljava

$$\epsilon^i(E_j) = \delta^i_j.$$

Taj se koreper naziva *dualnim koreperom* danog repera.

Ako je (E_i) lokalni reper za TM nad U, tada je jedinstveno odredjen lokalni koreper (ϵ^i) koji zadovoljava

$$\epsilon^i(E_j) = \delta^i_j.$$

Taj se koreper naziva *dualnim koreperom* danog repera.

Dualni koreper je glatki koreper, ako je (E_i) glatki reper (slijedi iz drugog dijela propozicije).

Primjerice, u danoj koordinatnoj karti, koordinatna kovektorska polja (λ^i) čine glatki lokalni koreper, koji nazivamo *standardnim koreperom*.

Primjerice, u danoj koordinatnoj karti, koordinatna kovektorska polja (λ^i) čine glatki lokalni koreper, koji nazivamo *standardnim koreperom*.

Označimo sa $\mathcal{T}^*M$ skup svih glatkih kovektorskih polja na M.

Primjerice, u danoj koordinatnoj karti, koordinatna kovektorska polja (λ^i) čine glatki lokalni koreper, koji nazivamo *standardnim koreperom*.

Označimo sa $\mathcal{T}^*M$ skup svih glatkih kovektorskih polja na M.

Uz uobičajene operacije, $\mathcal{T}^*M$ je realan vektorski prostor.

Kovektorska polja možemo i množiti glatkim realnim funkcijama: za $f \in C^\infty(M)$ i $\omega \in \mathcal{T}^*M$ kovektorsko polje $f\omega$ definirano je s

$$(f\omega)_p = f(p)\omega_p.$$

Kovektorska polja možemo i množiti glatkim realnim funkcijama: za $f \in C^\infty(M)$ i $\omega \in \mathcal{T}^*M$ kovektorsko polje $f\omega$ definirano je s

$$(f\omega)_p = f(p)\omega_p.$$

Time $\mathcal{T}^*M$ postaje modul nad $C^\infty(M)$.

Diferencijal funkcije

Primjer. Neka je $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = x^2$.

Diferencijal funkcije

Primjer. Neka je $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = x^2$.

Definiramo vektorsko polje

$$X = grad\, f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} = 2x \frac{\partial}{\partial x}.$$

Diferencijal funkcije

Primjer. Neka je $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = x^2$.

Definiramo vektorsko polje

$$X = grad\, f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} = 2x \frac{\partial}{\partial x}.$$

Ovakva definicija gradijenta nije neovisna o koordinatama, u polarnim koordinatama (r, φ) na $\mathbf{R}^2$, X nije jednako

$$\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Diferencijal funkcije

Primjer. Neka je $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = x^2$.

Definiramo vektorsko polje

$$X = grad\, f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} = 2x \frac{\partial}{\partial x}.$$

Ovakva definicija gradijenta nije neovisna o koordinatama, u polarnim koordinatama (r, φ) na $\mathbf{R}^2$, X nije jednako

$$\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Zadatak: izrazite X u polarnim koordinatama.

Diferencijal funkcije

Definicija

Neka je f glatka realna funkcija na glatkoj mnogostrukosti M.

Diferencijal funkcije

Definicija

Neka je f glatka realna funkcija na glatkoj mnogostrukosti M.

Kovektorsko polje df definirano s

$$df_p(X_p) = X_p(f), \quad X_p \in T_pM$$

naziva se diferencijalom funkcije f.

Diferencijal funkcije

Definicija

Neka je f glatka realna funkcija na glatkoj mnogostrukosti M.

Kovektorsko polje df definirano s

$$df_p(X_p) = X_p(f), \;\; X_p \in T_pM$$

naziva se diferencijalom funkcije f.

Propozicija

Diferencijal glatke funkcije je glatko kovektorsko polje.

Dokaz. Očito $df_p(X_p)$ ovisi linearno o X_p.

Dokaz. Očito $df_p(X_p)$ ovisi linearno o X_p.

Nadalje, koristeći Propoziciju 1.4 zaključujemo da je df glatko polje, jer je funkcija

$$\langle df, X\rangle = Xf$$

glatka. $\square$

Koordinatni prikaz diferencijala funkcije

Neka su $(U, (x^i))$ glatke koordinate na M, (λ^i) koordinatni koreper.

Koordinatni prikaz diferencijala funkcije

Neka su $(U, (x^i))$ glatke koordinate na M, (λ^i) koordinatni koreper.

Tada je

$$df_p = \sum_i A_i(p)\lambda^i|_p,$$

gdje su $A_i : U \to \mathbf{R}$ funkcije za koje vrijedi

$$A_i(p) = df_p(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p) = \frac{\partial}{\partial x^i}|_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$

Koordinatni prikaz diferencijala funkcije

Neka su $(U,(x^i))$ glatke koordinate na M, (λ^i) koordinatni koreper.

Tada je

$$df_p = \sum_i A_i(p)\lambda^i|_p,$$

gdje su $A_i : U \to \mathbf{R}$ funkcije za koje vrijedi

$$A_i(p) = df_p(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p) = \frac{\partial}{\partial x^i}|_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$

Dakle je

$$df_p = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\lambda^i|_p.$$

Vidimo da su koordinatne funkcije od df s obzirom na po volji odabranu koordinatnu kartu parcijalne derivacije od f s obzirom na koordinate.

Vidimo da su koordinatne funkcije od df s obzirom na po volji odabranu koordinatnu kartu parcijalne derivacije od f s obzirom na koordinate.

Zbog toga, df smatramo analogonom klasičnog gradijenta.

Koordinatni prikaz diferencijala funkcije x^j

Primijenimo prethodno na koordinatne funkcije x^j,
$x^j(x^1, \ldots, x^n) = x^j$, $j = 1, \ldots, n$.

Koordinatni prikaz diferencijala funkcije x^j

Primijenimo prethodno na koordinatne funkcije x^j, $x^j(x^1, \ldots, x^n) = x^j$, $j = 1, \ldots, n$.

Dobivamo

$$dx^j : U \to \mathbf{R}$$

$$dx^j|_p = \sum_i \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p)\lambda^i|_p = \lambda^j|_p.$$

Zaključak: Koordinatni koreper je (dx^j).

Zaključak: Koordinatni koreper je (dx^j).

Prema tome

$$df_p = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) dx^i|_p$$

Zaključak: Koordinatni koreper je (dx^j).

Prema tome

$$df_p = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) dx^i|_p$$

odnosno

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Primjer

Diferencijal funkcije $f(x,y) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = x^2 y \cos x$ dan je s

$$df = (2xy\cos x - x^2 y \sin x)dx + x^2 \cos x dy.$$

Propozicija (Svojstva diferencijala)

Neka je M glatka mnogostrukost, $f, g \in C^\infty(M)$. Tada je

Propozicija (Svojstva diferencijala)

Neka je M glatka mnogostrukost, $f, g \in C^\infty(M)$. Tada je

1. $d(af + bg) = a\,df + b\,dg, \quad a, b \in \mathbf{R}$

Propozicija (Svojstva diferencijala)

Neka je M glatka mnogostrukost, $f, g \in C^\infty(M)$. Tada je

1. $d(af + bg) = a\,df + b\,dg, \quad a, b \in \mathbf{R}$
2. $d(fg) = f\,dg + g\,df$

Propozicija (Svojstva diferencijala)

Neka je M glatka mnogostrukost, $f, g \in C^\infty(M)$. Tada je

1. $d(af + bg) = a\,df + b\,dg, \quad a, b \in \mathbf{R}$
2. $d(fg) = f\,dg + g\,df$
3. $d(f/g) = (g\,df - f\,dg)/g^2, \quad g \neq 0$

Propozicija (Svojstva diferencijala)

Neka je M glatka mnogostrukost, $f, g \in C^\infty(M)$. Tada je

1. $d(af + bg) = a\,df + b\,dg, \quad a, b \in \mathbf{R}$
2. $d(fg) = f\,dg + g\,df$
3. $d(f/g) = (g\,df - f\,dg)/g^2, \quad g \neq 0$
4. $d(h \circ f) = (h' \circ f)df$, *gdje je* $h : J \to \mathbf{R}$, $\operatorname{Im} f \subset J$

Propozicija (Svojstva diferencijala)

Neka je M glatka mnogostrukost, $f, g \in C^\infty(M)$. Tada je

1. $d(af + bg) = a\, df + b\, dg, \quad a, b \in \mathbf{R}$
2. $d(fg) = f\, dg + g\, df$
3. $d(f/g) = (g\, df - f\, dg)/g^2, \quad g \neq 0$
4. $d(h \circ f) = (h' \circ f)df$, *gdje je* $h : J \to \mathbf{R}$, $\operatorname{Im} f \subset J$
5. *Ako je f konstantna funkcija, tada je $df = 0$.*

Propozicija

Neka je M glatka mnogostrukost, $f \in C^\infty(M)$.

Propozicija

Neka je M glatka mnogostrukost, $f \in C^\infty(M)$.

Tada je $df = 0$ ako i samo ako je f konstantna na svakoj komponenti povezanosti od M.

Propozicija

Neka je M glatka mnogostrukost, $f \in C^\infty(M)$.

Tada je $df = 0$ ako i samo ako je f konstantna na svakoj komponenti povezanosti od M.

Interpretacija. Linearni funkcional df_p je najbolja aproksimacija od $\triangle f$ oko p, gdje je $\triangle f = f(p+v) - f(p)$.

Propozicija

Neka je M glatka mnogostrukost, $f \in C^\infty(M)$.

Tada je $df = 0$ ako i samo ako je f konstantna na svakoj komponenti povezanosti od M.

Interpretacija. Linearni funkcional df_p je najbolja aproksimacija od $\triangle f$ oko p, gdje je $\triangle f = f(p+v) - f(p)$.

Zaista,

$$\triangle f \approx \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) v^i = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) dx^i|_p(v) = df_p(v).$$

Propozicija

Neka je M glatka mnogostrukost, $c : I \to M$ glatka krivulja, $f \in C^\infty(M)$.

Propozicija

Neka je M glatka mnogostrukost, $c : I \to M$ glatka krivulja, $f \in C^\infty(M)$.

Derivacija glatke funkcije $f \circ c : I \to \mathbf{R}$ je dana s

$$(f \circ c)'(t) = df_{c(t)}(c'(t)).$$

Propozicija

Neka je M glatka mnogostrukost, $c : I \to M$ glatka krivulja, $f \in C^\infty(M)$.

Derivacija glatke funkcije $f \circ c : I \to \mathbf{R}$ je dana s

$$(f \circ c)'(t) = df_{c(t)}(c'(t)).$$

Dokaz.

$$df_{c(t_0)}(c'(t_0)) = c'(t_0)f = (c_* \frac{d}{dt}|_{t_0})f = \frac{d}{dt}|_{t_0}(f \circ c) = (f \circ c)'(t_0).$$

$\square$

Napomena

Za $f : M \to \mathbf{R}$ definirali smo linearna preslikavanja

$$f_* : T_pM \to T_{f(p)}\mathbf{R}$$

i

$$df_p : T_pM \to \mathbf{R}.$$

Napomena

Za $f : M \to \mathbf{R}$ definirali smo linearna preslikavanja

$$f_* : T_pM \to T_{f(p)}\mathbf{R}$$

i

$$df : T_pM \to \mathbf{R}.$$

Njihovi matrični prikazi u standardnim bazama su matrice retci parcijalnih derivacija funkcije f.

Povlak

Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje, i neka je za $p \in M$

$$F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$$

push-forward preslikavanja F.

Povlak

Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje, i neka je za $p \in M$

$$F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$$

push-forward preslikavanja F.

Povlak (*pullback*) je dualno preslikavanje

$$(F_*)^* : T^*_{F(p)}N \to T^*_pM.$$

Povlak

Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje, i neka je za $p \in M$

$$F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$$

push-forward preslikavanja F.

Povlak (*pullback*) je dualno preslikavanje

$$(F_*)^* : T^*_{F(p)}N \to T^*_pM.$$

Pišemo

$$F^* = (F_*)^*.$$

Povlak

Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje, i neka je za $p \in M$

$$F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$$

push-forward preslikavanja F.

Povlak (*pullback*) je dualno preslikavanje

$$(F_*)^* : T^*_{F(p)}N \to T^*_pM.$$

Pišemo

$$F^* = (F_*)^*.$$

Djelovanje: $\omega \in T^*_{F(p)}N,\ \ X \in T_pM$

$$(F^*\omega)(X) = \omega(F_*X).$$

Pokazat ćemo da je povlak glatkog kovektorskog polja ponovno glatko kovektorsko polje.

Pokazat ćemo da je povlak glatkog kovektorskog polja ponovno glatko kovektorsko polje.

Neka je $G : M \to N$ glatko preslikavanje, ω glatko kovektorsko polje na N.

Pokazat ćemo da je povlak glatkog kovektorskog polja ponovno glatko kovektorsko polje.

Neka je $G : M \to N$ glatko preslikavanje, ω glatko kovektorsko polje na N.

Definiramo $G^*\omega$ na M kao

$$(G^*\omega)_p = G^*(\omega_{G(p)}).$$

Pokazat ćemo da je povlak glatkog kovektorskog polja ponovno glatko kovektorsko polje.

Neka je $G : M \to N$ glatko preslikavanje, ω glatko kovektorsko polje na N.

Definiramo $G^*\omega$ na M kao

$$(G^*\omega)_p = G^*(\omega_{G(p)}).$$

Uočimo da je, za razliku od push-outa vektorskih polja, povlak kovektorskog polja uvijek dobro definiran.

Pokazat ćemo da je povlak glatkog kovektorskog polja ponovno glatko kovektorsko polje.

Neka je $G : M \to N$ glatko preslikavanje, ω glatko kovektorsko polje na N.

Definiramo $G^*\omega$ na M kao

$$(G^*\omega)_p = G^*(\omega_{G(p)}).$$

Uočimo da je, za razliku od push-outa vektorskih polja, povlak kovektorskog polja uvijek dobro definiran.

Treba dokazati da je na taj način definirano glatko kovektorsko polje (Propozicija 1.11).

Lema

Neka je $G : M \to N$ *glatko preslikavanje,* $f \in C^\infty(N)$, $\omega \in \mathcal{T}^*(N)$.

Lema

Neka je $G : M \to N$ *glatko preslikavanje,* $f \in C^\infty(N)$, $\omega \in \mathcal{T}^*(N)$.

Tada je

$$G^* df = d(f \circ G),$$

$$G^*(f\omega) = (f \circ G) G^* \omega.$$

Lema

Neka je $G : M \to N$ *glatko preslikavanje,* $f \in C^\infty(N)$, $\omega \in \mathcal{T}^*(N)$.

Tada je

$$G^* df = d(f \circ G),$$

$$G^*(f\omega) = (f \circ G) G^* \omega.$$

(Definiramo $G^*(f) = f \circ G$.*)*

Lema

Neka je $G : M \to N$ *glatko preslikavanje,* $f \in C^\infty(N)$, $\omega \in \mathcal{T}^*(N)$.

Tada je

$$G^* df = d(f \circ G),$$

$$G^*(f\omega) = (f \circ G)G^*\omega.$$

(Definiramo $G^*(f) = f \circ G$*.)*

Propozicija

Neka je $G : M \to N$ *glatko preslikavanje,* $\omega \in \mathcal{T}^*(N)$.

Lema

Neka je $G : M \to N$ *glatko preslikavanje,* $f \in C^\infty(N)$, $\omega \in \mathcal{T}^*(N)$.

Tada je

$$G^* df = d(f \circ G),$$

$$G^*(f\omega) = (f \circ G) G^* \omega.$$

(Definiramo $G^*(f) = f \circ G$*.)*

Propozicija

Neka je $G : M \to N$ *glatko preslikavanje,* $\omega \in \mathcal{T}^*(N)$.

Tada je $G^*\omega$ *glatko kovektorsko polje na* M.

Dokaz. Neka je $p \in M$, (x^i) glatke koordinate u okolini p, (y^i) glatke koordinate u okolini $G(p)$.

Dokaz. Neka je $p \in M$, (x^i) glatke koordinate u okolini p, (y^i) glatke koordinate u okolini $G(p)$.

Koordinatni zapis kovektorskog polja ω je

$$\omega = \sum_j \omega_j dy^j.$$

Dokaz. Neka je $p \in M$, (x^i) glatke koordinate u okolini p, (y^i) glatke koordinate u okolini $G(p)$.

Koordinatni zapis kovektorskog polja ω je

$$\omega = \sum_j \omega_j dy^j.$$

Koristeći lemu dvaput, dobivamo

$$G^*\omega = G^*(\sum_j \omega_j dy^j) = \sum_j (\omega_j \circ G) G^* dy^j = \sum_j (\omega_j \circ G) d(y^j \circ G).$$

Odavde slijedi tvrdnja. $\square$

Računanje povlaka u koordinatama

$$G^*\omega = \sum_j G^*(\omega_j dy^j) = \sum_j (\omega_j \circ G) d(y^j \circ G) = \sum_j (\omega_j \circ G) d(G^j),$$

gdje je G^j j-ta koordinatna funkcija od G u danim koordinatama.

Računanje povlaka u koordinatama

$$G^*\omega = \sum_j G^*(\omega_j dy^j) = \sum_j (\omega_j \circ G) d(y^j \circ G) = \sum_j (\omega_j \circ G) d(G^j),$$

gdje je G^j j-ta koordinatna funkcija od G u danim koordinatama.

Primjer. $G : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $G(x, y, z) = (x^2 y, y \sin z) = (u, v)$, $\omega \in \mathcal{T}^*(\mathbf{R}^2)$

$$\omega = udv + vdu.$$

Računanje povlaka u koordinatama

$$G^*\omega = \sum_j G^*(\omega_j dy^j) = \sum_j (\omega_j \circ G) d(y^j \circ G) = \sum_j (\omega_j \circ G) d(G^j),$$

gdje je G^j j-ta koordinatna funkcija od G u danim koordinatama.

Primjer. $G : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $G(x, y, z) = (x^2 y, y \sin z) = (u, v)$,
$\omega \in \mathcal{T}^*(\mathbf{R}^2)$

$$\omega = udv + vdu.$$

Povlak od ω po G dan je sa

$$G^*\omega = (u \circ G) d(v \circ G) + (v \circ G) d(u \circ G)$$

$$= 2xy^2 \sin z dx + 2x^2 y \sin z dy + x^2 y^2 \cos z dz.$$

Linijski integral

Primjer. Linijski integral kovektorskog polja ω na $[a, b] \subset \mathbf{R}$.

Linijski integral

Primjer. Linijski integral kovektorskog polja ω na $[a, b] \subset \mathbf{R}$.

Neka je $\omega = f(t)dt$, t standardna koordinata na $\mathbf{R}$, $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ glatka funkcija.

Linijski integral

Primjer. Linijski integral kovektorskog polja ω na $[a, b] \subset \mathbf{R}$.

Neka je $\omega = f(t)dt$, t standardna koordinata na $\mathbf{R}$, $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ glatka funkcija.

Definiramo

$$\int_{[a,b]} \omega = \int_a^b f(t)dt.$$

Propozicija

Neka je ω glatko kovektorsko polje na $[a, b] \subset \mathbf{R}$, $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ rastući difeomorfizam.

Linijski integral

Primjer. Linijski integral kovektorskog polja ω na $[a, b] \subset \mathbf{R}$.

Neka je $\omega = f(t)dt$, t standardna koordinata na $\mathbf{R}$, $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ glatka funkcija.

Definiramo

$$\int_{[a,b]} \omega = \int_a^b f(t)dt.$$

Propozicija

Neka je ω glatko kovektorsko polje na $[a, b] \subset \mathbf{R}$, $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ rastući difeomorfizam.

Tada je

$$\int_{[c,d]} \varphi^* \omega = \int_{[a,b]} \omega.$$

Dokaz. Neka je s standardna koordinata na $[c, d]$, tada je koordinatni prikaz povlaka $\varphi^*\omega$ jednak $(\varphi^*\omega)_s = f(\varphi(s))\varphi'(s)$.

Dokaz. Neka je s standardna koordinata na $[c, d]$, tada je koordinatni prikaz povlaka $\varphi^*\omega$ jednak $(\varphi^*\omega)_s = f(\varphi(s))\varphi'(s)$.

Sada iskoristimo formulu za zamjenu varijabli u običnom integralu.

$\square$

Neka je $c : [a, b] \to M$ glatka krivulja (*smooth curve segment* – ima glatko proširenje na otvoren interval koji sadrži $[a, b]$), ω glatko kovektorsko polje na glatkoj mnogostrukosti M.

Neka je $c : [a, b] \to M$ glatka krivulja (*smooth curve segment* – ima glatko proširenje na otvoren interval koji sadrži $[a, b]$), ω glatko kovektorsko polje na glatkoj mnogostrukosti M.

Linijski integral od ω duž c je realan broj

$$\int_c \omega = \int_{[a,b]} c^* \omega.$$

Propozicija

Neka je $c : [a, b] \to M$ *(po dijelovima) glatka krivulja.*

Propozicija

Neka je $c : [a, b] \to M$ *(po dijelovima) glatka krivulja.*

Tada je

$$\int_c \omega = \int_a^b \omega_{c(t)}(c'(t))dt.$$

Primjer. Neka je $M = \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$,

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Primjer. Neka je $M = \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$,

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Neka je $c : [0, 2\pi] \to M$ krivulja

$$c(t) = (\cos t, \sin t).$$

Primjer. Neka je $M = \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$,

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Neka je $c : [0, 2\pi] \to M$ krivulja

$$c(t) = (\cos t, \sin t).$$

Tada je

$$\int_c \omega = \int_{[0,2\pi]} \frac{\cos t(\cos tdt) - \sin t(-\sin tdt)}{\sin^2 t + \cos^2 t} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Teorem (Fundamentalni teorem za linijske integrale)

Neka je M glatka mnogostrukost, $f : M \to \mathbf{R}$ glatka funkcija, $c : [a, b] \to M$ (po dijelovima) glatka krivulja.

Teorem (Fundamentalni teorem za linijske integrale)

Neka je M glatka mnogostrukost, $f : M \to \mathbf{R}$ glatka funkcija, $c : [a, b] \to M$ (po dijelovima) glatka krivulja.

Tada je

$$\int_c df = f(c(b)) - f(c(a)).$$

Definicija

Glatko kovektorsko polje ω *je egzaktno na* M *ako postoji funkcija* $f \in C^\infty(M)$ *takva da je* $\omega = df$.

Definicija

Glatko kovektorsko polje ω *je egzaktno na* M *ako postoji funkcija* $f \in C^\infty(M)$ *takva da je* $\omega = df$*.*

Funkcija f *naziva se potencijalom od* ω*.*

Definicija

Glatko kovektorsko polje ω je egzaktno na M ako postoji funkcija $f \in C^\infty(M)$ takva da je $\omega = df$.

Funkcija f naziva se potencijalom od ω.

Glatko kovektorsko polje ω je konzervativno ako je linijski integral od ω po bilo kojoj zatvorenoj po dijelovima glatkoj krivulji jednak 0.

Teorem

Glatko kovektorsko polje je konzervativno ako i samo ako je egzaktno.

Teorem

Glatko kovektorsko polje je konzervativno ako i samo ako je egzaktno.

Primjer. Kovektorsko polje na $M = \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

nije egzaktno jer nije konzervativno.

Neka je f potencijal kovektorskog polja ω (dakle, ω je egzaktno), $(U, (x^i))$ koordinatna karta na M.

Neka je f potencijal kovektorskog polja ω (dakle, ω je egzaktno), $(U,(x^i))$ koordinatna karta na M.

Za glatku funkciju f vrijedi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}.$$

Neka je f potencijal kovektorskog polja ω (dakle, ω je egzaktno), $(U, (x^i))$ koordinatna karta na M.

Za glatku funkciju f vrijedi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}.$$

Ako pišemo $\omega = \sum_i \omega_i dx^i$, tada uvjet $\omega = df$ povlači $\omega_i = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$, te iz prethodnog slijedi

$$\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}. \tag{4}$$

Definicija

Glatko kovektorsko polje ω *je zatvoreno na* M *ako komponente od* ω *u svakoj glatkoj karti zadovoljavaju (4).*

Definicija

Glatko kovektorsko polje ω je zatvoreno na M ako komponente od ω u svakoj glatkoj karti zadovoljavaju (4).

Lema

Svako egzaktno kovektorsko polje je zatvoreno.

Uočimo: Uvjet (4) nije potrebno provjeriti u *svakoj* koordinatnoj karti, nego za familiju karata koje pokrivaju M:

Uočimo: Uvjet (4) nije potrebno provjeriti u *svakoj* koordinatnoj karti, nego za familiju karata koje pokrivaju M:

Propozicija

Neka je ω glatko kovektorsko polje. Ako ω zadovoljava (4) u nekoj koordinatnoj karti oko svake točke, tada je ω zatvoreno polje.

Uočimo: Uvjet (4) nije potrebno provjeriti u *svakoj* koordinatnoj karti, nego za familiju karata koje pokrivaju M:

Propozicija

Neka je ω glatko kovektorsko polje. Ako ω zadovoljava (4) u nekoj koordinatnoj karti oko svake točke, tada je ω zatvoreno polje.

Propozicija

Neka je $G : M \to N$ lokalni difeomoerfizam.

Uočimo: Uvjet (4) nije potrebno provjeriti u *svakoj* koordinatnoj karti, nego za familiju karata koje pokrivaju M:

Propozicija

Neka je ω glatko kovektorsko polje. Ako ω zadovoljava (4) u nekoj koordinatnoj karti oko svake točke, tada je ω zatvoreno polje.

Propozicija

Neka je $G : M \to N$ lokalni difeomoerfizam.

Tada povlak $G^* : \mathcal{T}^*(N) \to \mathcal{T}^*(M)$ preslikava zatvorena kovektorska polja u zatvorena kovektorska polja, egzaktna kovektorska polja u egzaktna kovektorska polja.

Primjer. Kovektorsko polje

$$\omega = y \cos xydx + x \cos xydy$$

je zatvoreno. Ono je štoviše egzaktno, jer $\omega = d(\sin xy)$.

Primjer. Kovektorsko polje

$$\omega = y \cos xy dx + x \cos xy dy$$

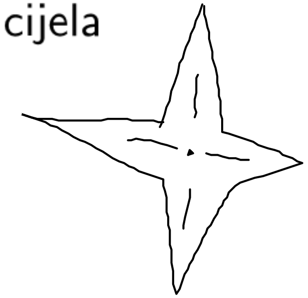
je zatvoreno. Ono je štoviše egzaktno, jer $\omega = d(\sin xy)$.

Kovektorsko polje

$$\omega = x \cos xy dx + y \cos xy dy$$

nije zatvoreno, pa nije ni egzaktno.

Za podskup $U \subset \mathbf{R}^n$ kažemo da je zvjezdast, ako postoji točka $c \in U$ takva da je za svaku točku $x \in U$ dužina od c do x cijela sadržana u U.



Za podskup $U \subset \mathbf{R}^n$ kažemo da je zvjezdast, ako postoji točka $c \in U$ takva da je za svaku točku $x \in U$ dužina od c do x cijela sadržana u U.

Primjer. Pokazali smo da je kovektorsko polje

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

zatvoreno, ali da nije egzaktno na $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$.

Za podskup $U \subset \mathbf{R}^n$ kažemo da je zvjezdast, ako postoji točka $c \in U$ takva da je za svaku točku $x \in U$ dužina od c do x cijela sadržana u U.

Primjer. Pokazali smo da je kovektorsko polje

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

zatvoreno, ali da nije egzaktno na $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$.

Ako se restringiramo na desnu poluravninu $U = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0\}$, tada vrijedi

$$\omega = d(\mathrm{arctg}\frac{y}{x}).$$

Propozicija

Ako je U zvjezdasti otvoren podskup od $\mathbf{R}^n$, tada je svako zatvoreno kovektorsko polje na U egzaktno.

Propozicija

Ako je U zvjezdasti otvoren podskup od $\mathbf{R}^n$, tada je svako zatvoreno kovektorsko polje na U egzaktno.

Korolar

Neka je ω zatvoreno kovektorsko polje na glatkoj mnogostrukosti M.

Propozicija

Ako je U zvjezdasti otvoren podskup od $\mathbf{R}^n$, tada je svako zatvoreno kovektorsko polje na U egzaktno.

Korolar

Neka je ω zatvoreno kovektorsko polje na glatkoj mnogostrukosti M.

Tada za svaki $p \in M$ postoji okolina na kojoj je ω egzaktno.

Napomena. Uočimo da činjenica je li zadano zatvoreno kovektorsko polje egzaktno, ovisi o obliku područja na kojem je polje zadano.

Napomena. Uočimo da činjenica je li zadano zatvoreno kovektorsko polje egzaktno, ovisi o obliku područja na kojem je polje zadano.

De Rhamova kohomologija povezuje glatku strukturu mnogostrukosti i njenu topologiju.

Napomena. Uočimo da činjenica je li zadano zatvoreno kovektorsko polje egzaktno, ovisi o obliku područja na kojem je polje zadano.

De Rhamova kohomologija povezuje glatku strukturu mnogostrukosti i njenu topologiju.

Kovektorsko polje $=$ 1–(diferencijalna) forma. Definirat ćemo k–(diferencijalne) forme $(\mathcal{A}^k(M))$ i diferencijalni operator $d : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k+1}(M)$ koji zadovoljava $d(d\omega) = 0$.

Napomena. Uočimo da činjenica je li zadano zatvoreno kovektorsko polje egzaktno, ovisi o obliku područja na kojem je polje zadano.

De Rhamova kohomologija povezuje glatku strukturu mnogostrukosti i njenu topologiju.

Kovektorsko polje = 1–(diferencijalna) forma. Definirat ćemo k–(diferencijalne) forme ($\mathcal{A}^k(M)$) i diferencijalni operator $d : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k+1}(M)$ koji zadovoljava $d(d\omega) = 0$.

Nužan uvjet da bi glatka k-forma ω bila jednaka $d\eta$, za neku $(k-1)$–formu η, glasi $d\omega = 0$.

Kako je $d : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k+1}(M)$ linearni operator, definiramo potprostore

$$\mathcal{Z}^p(M) = Ker(d : \mathcal{A}^p(M) \to \mathcal{A}^{p+1}(M))$$

$$\mathcal{B}^p(M) = Im(d : \mathcal{A}^{p-1}(M) \to \mathcal{A}^p(M)).$$

Kako je $d : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k+1}(M)$ linearni operator, definiramo potprostore

$$\mathcal{Z}^p(M) = Ker(d : \mathcal{A}^p(M) \to \mathcal{A}^{p+1}(M))$$

$$\mathcal{B}^p(M) = Im(d : \mathcal{A}^{p-1}(M) \to \mathcal{A}^p(M)).$$

Prostor $\mathcal{Z}^p(M)$ je prostor zatvorenih p-formi na M, $\mathcal{B}^p(M)$ egzaktnih.

Kako je $d : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k+1}(M)$ linearni operator, definiramo potprostore

$$\mathcal{Z}^p(M) = Ker(d : \mathcal{A}^p(M) \to \mathcal{A}^{p+1}(M))$$

$$\mathcal{B}^p(M) = Im(d : \mathcal{A}^{p-1}(M) \to \mathcal{A}^p(M)).$$

Prostor $\mathcal{Z}^p(M)$ je prostor zatvorenih p-formi na M, $\mathcal{B}^p(M)$ egzaktnih.

Vrijedi $\mathcal{B}^p(M) \subset \mathcal{Z}^p(M)$.

Kako je $d : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k+1}(M)$ linearni operator, definiramo potprostore

$$\mathcal{Z}^p(M) = Ker(d : \mathcal{A}^p(M) \to \mathcal{A}^{p+1}(M))$$

$$\mathcal{B}^p(M) = Im(d : \mathcal{A}^{p-1}(M) \to \mathcal{A}^p(M)).$$

Prostor $\mathcal{Z}^p(M)$ je prostor zatvorenih p-formi na M, $\mathcal{B}^p(M)$ egzaktnih.

Vrijedi $\mathcal{B}^p(M) \subset \mathcal{Z}^p(M)$.

p-ta grupa **de Rhamove kohomologije** je kvocijentni vektorski prostor

$$H^p(M) = \frac{\mathcal{Z}^p(M)}{\mathcal{B}^p(M)}.$$