Glatke i Riemannove mnogostrukosti

Željka Milin-Šipuš, Pavle Pandžić i Juraj Šiftar

Geometrija i topologija, drugi dio

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Definicija

Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M$.

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Definicija

Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M$.

Tangencijalni vektor u p je derivacija u p, tj. linearno prelikavanje $X : C^\infty(M) \to \mathbf{R}$ takvo da vrijedi

$$X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf, \quad f, g \in C^\infty(M).$$

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Definicija

Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M$.

Tangencijalni vektor u p je derivacija u p, tj. linearno prelikavanje $X : C^\infty(M) \to \mathbf{R}$ takvo da vrijedi

$$X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf, \quad f, g \in C^\infty(M).$$

Tangencijalni vektori, odnosno derivacije u p, čine vektorski prostor koji se naziva tangencijalnim prostorom od M u p i označava T_pM.

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Definicija

Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M$.

Tangencijalni vektor u p je derivacija u p, tj. linearno prelikavanje $X : C^\infty(M) \to \mathbf{R}$ takvo da vrijedi

$$X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf, \quad f, g \in C^\infty(M).$$

Tangencijalni vektori, odnosno derivacije u p, čine vektorski prostor koji se naziva tangencijalnim prostorom od M u p i označava T_pM.

Za $M = \mathbf{R}^n$, tangencijalni se prostor u svakoj točki identificira s $\mathbf{R}^n$.

Push-forward

Definicija

Neka su M i N glatke mnogostrukosti, $F : M \to N$ glatko preslikavanje.

Push-forward

Definicija

Neka su M i N glatke mnogostrukosti, $F : M \to N$ glatko preslikavanje.

Za svako $p \in M$ definiramo push-forward F_* preslikavanja F kao preslikavanje

$$F_* : T_pM \to T_{F(p)}N, \qquad (F_*X)(f) = X(f \circ F),$$

gdje je $f \in C^\infty(N)$.

Koordinatni zapis

Neka je (U, φ) glatka koordinatna karta na M.

Koordinatni zapis

Neka je (U, φ) glatka koordinatna karta na M.

Tada je jedna baza za T_pM dana sa

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p = (\varphi^{-1})_* \frac{\partial}{\partial x^i}|_{\varphi(p)}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Koordinatni zapis

Neka je (U, φ) glatka koordinatna karta na M.

Tada je jedna baza za T_pM dana sa

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p = (\varphi^{-1})_* \frac{\partial}{\partial x^i}|_{\varphi(p)}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Posebno, za svaki $p \in M$, T_pM je n-dimenzionalni vektorski prostor (gdje je $n = \dim M$).

Push-forward glatkog preslikavanja F u koordinatama

Za $F : U \to V$, $U \subset \mathbf{R}^n$, $V \subset \mathbf{R}^m$, i za $p \in U$, matrični prikaz preslikavanja F_* u paru standardnih baza je *Jacobijeva matrica*

Push-forward glatkog preslikavanja F u koordinatama

Za $F : U \to V$, $U \subset \mathbf{R}^n$, $V \subset \mathbf{R}^m$, i za $p \in U$, matrični prikaz preslikavanja F_* u paru standardnih baza je *Jacobijeva matrica*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1}(p) & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^m}{\partial x^1}(p) & \dots & \frac{\partial F^m}{\partial x^n}(p) \end{pmatrix} \tag{1}$$

Push-forward glatkog preslikavanja F u koordinatama

Za $F : U \to V$, $U \subset \mathbf{R}^n$, $V \subset \mathbf{R}^m$, i za $p \in U$, matrični prikaz preslikavanja F_* u paru standardnih baza je *Jacobijeva matrica*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1}(p) & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^m}{\partial x^1}(p) & \dots & \frac{\partial F^m}{\partial x^n}(p) \end{pmatrix} \tag{1}$$

Dakle, specijalni slučaj $F_* : T_p\mathbf{R}^n \to T_{F(p)}\mathbf{R}^m$ odgovara diferencijalu $DF(p) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ uz identifikaciju euklidskih prostora sa svojim tangencijalnim prostorima.

Push-forward glatkog preslikavanja F u koordinatama

Za $F : M \to N$ uz koordinatne karte (U, φ) za M oko p, (V, ψ) za N oko $F(p)$, promatramo koordinatno preslikavanje $F(U) \subseteq V$
$\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$.

Push-forward glatkog preslikavanja F u koordinatama

Za $F : M \to N$ uz koordinatne karte (U, φ) za M oko p, (V, ψ) za N oko $F(p)$, promatramo koordinatno preslikavanje $\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$.

U paru standardnih baza, $\hat{F}_*$ ima za matrični prikaz Jacobijevu matricu preslikavanja $\hat{F}$. Zbog toga i preslikavanje F_* u paru baza $(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p)$ za U i $(\frac{\partial}{\partial y^i}|_{F(p)})$ za V ima za matrični prikaz Jacobijevu matricu preslikavanja $\hat{F}$:

Push-forward glatkog preslikavanja F u koordinatama

Za $F : M \to N$ uz koordinatne karte (U, φ) za M oko p, (V, ψ) za N oko $F(p)$, promatramo koordinatno preslikavanje $\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$.

U paru standardnih baza, $\hat{F}_*$ ima za matrični prikaz Jacobijevu matricu preslikavanja $\hat{F}$. Zbog toga i preslikavanje F_* u paru baza $(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p)$ za U i $(\frac{\partial}{\partial y^i}|_{F(p)})$ za V ima za matrični prikaz Jacobijevu matricu preslikavanja $\hat{F}$:

$$F_* \frac{\partial}{\partial x^i}|_p = \sum_j \frac{\partial \hat{F}^j}{\partial x^i}(\hat{p}) \frac{\partial}{\partial y^j}|_{F(p)}.$$

Tangencijalni svežanj

Neka je M glatka mnogostrukost. Tangencijalni svežanj od M je disjunktna unija tangencijalnih prostora u svim točkama od M

$$TM = \coprod_{p \in M} T_p M.$$

Tangencijalni svežanj

Neka je M glatka mnogostrukost. Tangencijalni svežanj od M je disjunktna unija tangencijalnih prostora u svim točkama od M

$$TM = \coprod_{p \in M} T_p M.$$

Element od TM je uredjeni par (p, X), gdje je $p \in M$, $X \in T_p M$. Pišemo $(p, X) = X_p$. Prirodna projekcija je preslikavanje

$$\pi : TM \to M, \ \ \pi(p, X) = p.$$

Tangencijalni svežanj

Neka je M glatka mnogostrukost. Tangencijalni svežanj od M je disjunktna unija tangencijalnih prostora u svim točkama od M

$$TM = \coprod_{p \in M} T_p M.$$

Element od TM je uredjeni par (p, X), gdje je $p \in M$, $X \in T_p M$. Pišemo $(p, X) = X_p$. Prirodna projekcija je preslikavanje

$$\pi : TM \to M, \ \ \pi(p, X) = p.$$

Topologija: podskup od TM je otvoren ako i samo ako je njegov presjek sa svakim $T_p M$ otvoren u $T_p M$.

Za svaku glatku kartu $(U, \varphi) = (U, x^1(p), \dots, x^n(p))$ na M, definiramo kartu $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$ na TM, gdje je

$$\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \mathbf{R}^{2n}$$

$$\tilde{\varphi}(\sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p) = (x^1(p), \dots, x^n(p), v^1, \dots, v^n).$$

Za svaku glatku kartu $(U, \varphi) = (U, x^1(p), \ldots, x^n(p))$ na M, definiramo kartu $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$ na TM, gdje je

$$\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \mathbf{R}^{2n}$$

$$\tilde{\varphi}(\sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p), v^1, \ldots, v^n).$$

Pokazuje se da je time zadana struktura glatke mnogostrukosti na TM, te da je $\pi : TM \to M$ glatko preslkavanje.

Za svaku glatku kartu $(U, \varphi) = (U, x^1(p), \ldots, x^n(p))$ na M, definiramo kartu $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$ na TM, gdje je

$$\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \mathbf{R}^{2n}$$

$$\tilde{\varphi}(\sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p), v^1, \ldots, v^n).$$

Pokazuje se da je time zadana struktura glatke mnogostrukosti na TM, te da je $\pi : TM \to M$ glatko preslkavanje.

Primjer 1. Tangencijalni svežanj $T\mathbf{R}^n$ je difeomorfan s $\mathbf{R}^{2n}$.

Tangencijalni svežanj kao glatki vektorski svežanj

Definicija

Neka je M glatka mnogostrukost. (Glatki) vektorski svežanj ranga k nad M je glatka mnogostrukost E zajedno s glatkim surjektivnim preslikavanjem $\pi : E \to M$ koje zadovoljava:

Tangencijalni svežanj kao glatki vektorski svežanj

Definicija

Neka je M glatka mnogostrukost. (Glatki) vektorski svežanj ranga k nad M je glatka mnogostrukost E zajedno s glatkim surjektivnim preslikavanjem $\pi : E \to M$ koje zadovoljava:

(i) *za svaki $p \in M$ skup $E_p = \pi^{-1}(p) \subset E$ (tzv. vlakno nad p) je snabdjeven strukturom realnog vektorskog prostora;*

Tangencijalni svežanj kao glatki vektorski svežanj

Definicija

Neka je M glatka mnogostrukost. (Glatki) vektorski svežanj ranga k nad M je glatka mnogostrukost E zajedno s glatkim surjektivnim preslikavanjem $\pi : E \to M$ koje zadovoljava:

(i) *za svaki $p \in M$ skup $E_p = \pi^{-1}(p) \subset E$ (tzv. vlakno nad p) je snabdjeven strukturom realnog vektorskog prostora;*

(ii) *za svaki $p \in M$ postoji okolina U od p u M i difeomorfizam $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbf{R}^k$ tako da komutira sljedeći dijagram (π_1 je projekcija na prvi faktor):*

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times \mathbf{R}^k \arrow[dl, "\pi_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times \mathbf{R}^k \arrow[dl, "\pi_1"] \\
U &
\end{tikzcd}
$$

i restrikcija od Φ *na* E_p *je linearni izomorfizam sa*
$E_p \to \{p\} \times \mathbf{R}^k \cong \mathbf{R}^k$.

Tangencijalni svežanj kao glatki vektorski svežanj

Mnogostrukost E se naziva *totalnim* ili *ukupnim* prostorom, mnogostrukost M *bazom*, a preslikavanje π *projekcijom*. Svako preslikavanje Φ se naziva *lokalnom trivijalizacijom* od E nad U.

Tangencijalni svežanj kao glatki vektorski svežanj

Mnogostrukost E se naziva *totalnim* ili *ukupnim* prostorom, mnogostrukost M *bazom*, a preslikavanje π *projekcijom*. Svako preslikavanje Φ se naziva *lokalnom trivijalizacijom* od E nad U.

Ako postoji lokalna trivijalizacija nad cijelom mnogostrukošću M, tada se ona naziva *globalnom trivijalizacijom*, a E *trivijalnim svežnjem*.

Tangencijalni svežanj kao glatki vektorski svežanj

Mnogostrukost E se naziva *totalnim* ili *ukupnim* prostorom, mnogostrukost M *bazom*, a preslikavanje π *projekcijom*. Svako preslikavanje Φ se naziva *lokalnom trivijalizacijom* od E nad U.

Ako postoji lokalna trivijalizacija nad cijelom mnogostrukošću M, tada se ona naziva *globalnom trivijalizacijom*, a E *trivijalnim svežnjem*.

Primjer 1. Produktna mnogostrukost $E = M \times \mathbf{R}^k$, $\pi = \pi_1 : M \times \mathbf{R}^k \to M$. Taj je svežanj očito trivijalan, globalna trivijalizacija je identiteta.

Tangencijalni svežanj kao glatki vektorski svežanj

Mnogostrukost E se naziva *totalnim* ili *ukupnim* prostorom, mnogostrukost M *bazom*, a preslikavanje π *projekcijom*. Svako preslikavanje Φ se naziva *lokalnom trivijalizacijom* od E nad U.

Ako postoji lokalna trivijalizacija nad cijelom mnogostrukošću M, tada se ona naziva *globalnom trivijalizacijom*, a E *trivijalnim svežnjem*.

Primjer 1. Produktna mnogostrukost $E = M \times \mathbf{R}^k$, $\pi = \pi_1 : M \times \mathbf{R}^k \to M$. Taj je svežanj očito trivijalan, globalna trivijalizacija je identiteta.

Primjer 2. (Lokalnost) Ako je $U \subset M$ otvoren skup, tada je podskup $E|_U = \pi^{-1}(U)$ opet vektorski svežanj. Njegova projekcija je restrikcija projekcije π na U.

Tangencijalni svežanj kao glatki vektorski svežanj

Mnogostrukost E se naziva *totalnim* ili *ukupnim* prostorom, mnogostrukost M *bazom*, a preslikavanje π *projekcijom*. Svako preslikavanje Φ se naziva *lokalnom trivijalizacijom* od E nad U.

Ako postoji lokalna trivijalizacija nad cijelom mnogostrukošću M, tada se ona naziva *globalnom trivijalizacijom*, a E *trivijalnim svežnjem*.

Primjer 1. Produktna mnogostrukost $E = M \times \mathbf{R}^k$, $\pi = \pi_1 : M \times \mathbf{R}^k \to M$. Taj je svežanj očito trivijalan, globalna trivijalizacija je identiteta.

Primjer 2. (Lokalnost) Ako je $U \subset M$ otvoren skup, tada je podskup $E|_U = \pi^{-1}(U)$ opet vektorski svežanj. Njegova projekcija je restrikcija projekcije π na U.

Primjer 3. Möbiusov svežanj – glatki linijski svežanj nad S^1.

Tangencijalni svežanj kao glatki vektorski svežanj

Propozicija

Tangencijalni svežanj TM glatke mnogostrukosti M je glatki vektorski svežanj ranga n.

Tangencijalni svežanj kao glatki vektorski svežanj

Definicija

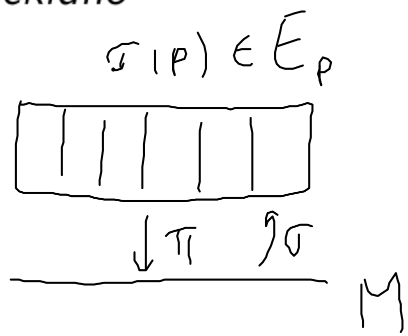
Neka je E glatki vektorski svežanj nad M, $\pi : E \to M$ projekcija svežnja.

Tangencijalni svežanj kao glatki vektorski svežanj

Definicija

Neka je E glatki vektorski svežanj nad M, $\pi : E \to M$ projekcija svežnja.

Prerez svežnja E, ili prerez preslikavanja π, je neprekidno preslikavanje $\sigma : M \to E$ za koje je $\pi \circ \sigma = Id_M$.



Tangencijalni svežanj kao glatki vektorski svežanj

Definicija

Neka je E *glatki vektorski svežanj nad* M, $\pi : E \to M$ *projekcija svežnja.*

Prerez svežnja E*, ili prerez preslikavanja* π*, je neprekidno preslikavanje* $\sigma : M \to E$ *za koje je* $\pi \circ \sigma = Id_M$.

Ako je $U \subset M$ *otvoren skup, prerez restringiranog svežnja* $E|_U$ *naziva se lokalnim prerezom od* E.

Tangencijalni svežanj kao glatki vektorski svežanj

Definicija

Neka je E glatki vektorski svežanj nad M, $\pi : E \to M$ projekcija svežnja.

Prerez svežnja E, ili prerez preslikavanja π, je neprekidno preslikavanje $\sigma : M \to E$ za koje je $\pi \circ \sigma = Id_M$.

Ako je $U \subset M$ otvoren skup, prerez restringiranog svežnja $E|_U$ naziva se lokalnim prerezom od E.

Primjer. *Nul-prerez* je preslikavanje $\zeta : M \to E$

$$\zeta(p) = 0 \in E_p, \;\; p \in M.$$

Vektorska polja

Definicija

Neka je M glatka mnogostrukost. Vektorsko polje na M je neprekidno preslikavanje $Y : M \to TM$, $p \mapsto Y_p$, takvo da vrijedi

$$\pi \circ Y = Id_M$$

ili ekvivalentno, $Y_p \in T_pM$, za svaki $p \in M$.

Vektorska polja

Definicija

Neka je M glatka mnogostrukost. Vektorsko polje na M je neprekidno preslikavanje $Y : M \to TM$, $p \mapsto Y_p$, takvo da vrijedi

$$\pi \circ Y = Id_M$$

ili ekvivalentno, $Y_p \in T_pM$, za svaki $p \in M$.

Glatko vektorsko polje je vektorsko polje koje je glatko kao preslikavanje sa M u TM.

Vektorska polja

Definicija

Neka je M glatka mnogostrukost. Vektorsko polje na M je neprekidno preslikavanje $Y : M \to TM$, $p \mapsto Y_p$, takvo da vrijedi

$$\pi \circ Y = Id_M$$

ili ekvivalentno, $Y_p \in T_pM$, za svaki $p \in M$.

Glatko vektorsko polje je vektorsko polje koje je glatko kao preslikavanje sa M u TM.

Drugačije rečeno, (glatko) vektorsko polje je (glatki) prerez tangencijalnog svežnja.

Vektorska polja

Primjer. Neka je $E = M \times \mathbf{R}^k$ trivijalni svežanj.

Vektorska polja

Primjer. Neka je $E = M \times \mathbf{R}^k$ trivijalni svežanj.

Tada postoji prirodna bijekcija izmedju (glatkih) prereza od E i (glatkih) funkcija $f : M \to \mathbf{R}^k$.

Vektorska polja

Primjer. Neka je $E = M \times \mathbf{R}^k$ trivijalni svežanj.

Tada postoji prirodna bijekcija izmedju (glatkih) prereza od E i (glatkih) funkcija $f : M \to \mathbf{R}^k$.

Funkcija f odredjuje prerez $\tilde{f} : M \to M \times \mathbf{R}^k$, $\tilde{f}(x) = (x, f(x))$ i obratno.

Vektorska polja

Primjer. Neka je $E = M \times \mathbf{R}^k$ trivijalni svežanj.

Tada postoji prirodna bijekcija izmedju (glatkih) prereza od E i (glatkih) funkcija $f : M \to \mathbf{R}^k$.

Funkcija f odredjuje prerez $\tilde{f} : M \to M \times \mathbf{R}^k$, $\tilde{f}(x) = (x, f(x))$ i obratno.

Specijalno, $C^\infty(M)$ se može identificirati sa glatkim prerezima svežnja $M \times \mathbf{R}$.

Vektorska polja

Neka je $Y : M \to TM$ vektorsko polje, $(U, (x^i))$ koordinatna karta za M.

Vektorska polja

Neka je $Y : M \to TM$ vektorsko polje, $(U, (x^i))$ koordinatna karta za M.

Tada možemo pisati

$$Y_p = \sum_i Y^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}|_p,$$

gdje su $Y^i : U \to \mathbf{R}$ komponentne (koordinatne) funkcije vektorskog polja Y u danoj karti.

Vektorska polja

Propozicija (Kriterij za glatka vektorska polja)

Neka je M glatka mnogostrukost, $Y : M \to TM$ vektorsko polje, $(U, (x^i))$ koordinatna karta za M.

Vektorska polja

Propozicija (Kriterij za glatka vektorska polja)

Neka je M *glatka mnogostrukost,* $Y : M \to TM$ *vektorsko polje,* $(U, (x^i))$ *koordinatna karta za* M.

Vektorsko polje Y *je glatko na* U *ako i samo ako su mu koordinatne funkcije s obzirom na danu kartu glatke.*

Dokaz

Neka su (x^i, v^i) standardne koordinate na $\pi^{-1}(U) \subset TM$ pridružene karti $(U, (x^i))$ od M.

Dokaz

Neka su (x^i, v^i) standardne koordinate na $\pi^{-1}(U) \subset TM$ pridružene karti $(U, (x^i))$ od M.

Neka je $Y : M \to TM$ vektorsko polje.

Dokaz

Neka su (x^i, v^i) standardne koordinate na $\pi^{-1}(U) \subset TM$ pridružene karti $(U, (x^i))$ od M.

Neka je $Y : M \to TM$ vektorsko polje.

Njegov koordinatni prikaz s obzirom na izabranu kartu je

$$\hat{Y}(x) = (x^1, \ldots, x^n, Y^1(x), \ldots, Y^n(x)),$$

gdje je $Y^i(x)$ i-ta koordinatna funkcija od Y.

Dokaz

Neka su (x^i, v^i) standardne koordinate na $\pi^{-1}(U) \subset TM$ pridružene karti $(U, (x^i))$ od M.

Neka je $Y : M \to TM$ vektorsko polje.

Njegov koordinatni prikaz s obzirom na izabranu kartu je

$$\hat{Y}(x) = (x^1, \ldots, x^n, Y^1(x), \ldots, Y^n(x)),$$

gdje je $Y^i(x)$ i-ta koordinatna funkcija od Y.

Odavde očito slijedi da je polje Y glatko ako i samo su glatke koordinatne funkcije Y^i.

Primjer

Ako je $(U, (x^i))$ koordinatna karta na M, preslikavanja

$$p \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$$

definiraju n glatkih vektorskih polja na U, tzv. *koordinatna vektorska polja*.

Primjer

Ako je $(U, (x^i))$ koordinatna karta na M, preslikavanja

$$p \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$$

definiraju n glatkih vektorskih polja na U, tzv. *koordinatna vektorska polja*.

Oznaka: $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$.

Vektorska polja

Propozicija

Neka je M glatka mnogostrukost. Ako je $p \in M$, $X \in T_pM$, tada postoji glatko vektorsko polje $\tilde{X}$ na M takvo da je $\tilde{X}_p = X$.

Dokaz

Neka je $(U, (x^i))$ koordinatna karta oko p, $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ u toj karti.

Dokaz

Neka je $(U,(x^i))$ koordinatna karta oko p, $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ u toj karti.

Neka je ψ *bump-funkcija* s nosačem u U, $\psi(p) = 1$.

Dokaz

Neka je $(U, (x^i))$ koordinatna karta oko p, $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ u toj karti.

Neka je ψ *bump-funkcija* s nosačem u U, $\psi(p) = 1$.

Definirajmo vektorsko polje $\tilde{X}$

$$\tilde{X}_q = \begin{cases} \psi(q) \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_q, & q \in U \\ 0, & q \in M \setminus \operatorname{supp} \psi. \end{cases}$$

Dokaz

Neka je $(U,(x^i))$ koordinatna karta oko p, $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ u toj karti.

Neka je ψ *bump-funkcija* s nosačem u U, $\psi(p) = 1$.

Definirajmo vektorsko polje $\tilde{X}$

$$\tilde{X}_q = \begin{cases} \psi(q) \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_q, & q \in U \\ 0, & q \in M \setminus \operatorname{supp} \psi. \end{cases}$$

Očito je $\tilde{X}$ glatko vektorsko polje, $\tilde{X}_p = \psi(p) \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p = X$. $\square$

Vektorska polja

Označimo sa $\mathcal{T}(M)$ (ili $\mathcal{X}(M)$) skup svih glatkih vektorskih polja na M.

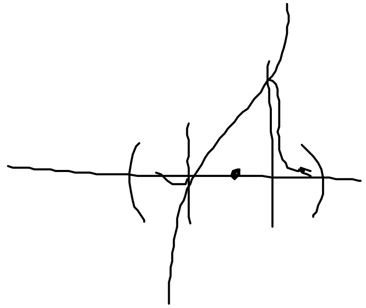
Vektorska polja

Označimo sa $\mathcal{T}(M)$ (ili $\mathcal{X}(M)$) skup svih glatkih vektorskih polja na M.

Možemo ga organizirati u realni vektorski prostor

$$(X+Y)_p = X_p + Y_p, \;\; (aX)_p = aX_p, \;\; a \in \mathbf{R}.$$

Vektorska polja



Označimo sa $\mathcal{T}(M)$ (ili $\mathcal{X}(M)$) skup svih glatkih vektorskih polja na M.

Možemo ga organizirati u realni vektorski prostor

$$(X+Y)_p = X_p + Y_p, \ \ (aX)_p = aX_p, \ \ a \in \mathbf{R}.$$

Nul-vektorsko polje je vektorsko polje koje svakoj točki $p \in M$ pridružuje nul-vektor iz T_pM (usporedi: nul-prerez).

Vektorska polja

Definiramo množenje vektorskih polja glatkim realnim funkcijama

$$(fY)_p = f(p)Y_p,$$

gdje je $f \in C^\infty(M)$, $\cancel{X}$ Y $\in \mathcal{T}(M)$.

Vektorska polja

Definiramo množenje vektorskih polja glatkim realnim funkcijama

$$(fY)_p = f(p)Y_p,$$

gdje je $f \in C^\infty(M)$, $X \in \mathcal{T}(M)$.

Tada je fY ponovno glatko vektorsko polje na M.

Vektorska polja

Definiramo množenje vektorskih polja glatkim realnim funkcijama

$$(fY)_p = f(p)Y_p,$$

gdje je $f \in C^\infty(M)$, $X \in \mathcal{T}(M)$.

Tada je fY ponovno glatko vektorsko polje na M.

Time $\mathcal{T}(M)$ postaje modul nad prstenom $C^\infty(M)$ ($X + Y \in \mathcal{T}(M)$, $fX \in \mathcal{T}(M)$).

Vektorska polja

Definiramo množenje vektorskih polja glatkim realnim funkcijama

$$(fY)_p = f(p)Y_p,$$

gdje je $f \in C^\infty(M)$, $X \in \mathcal{T}(M)$.

Tada je fY ponovno glatko vektorsko polje na M.

Time $\mathcal{T}(M)$ postaje modul nad prstenom $C^\infty(M)$ $(X + Y \in \mathcal{T}(M), fX \in \mathcal{T}(M))$.

Sada možemo pisati

$$Y = \sum_i Y^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

gdje su Y^i koordinatne funkcije polja Y.

Vektorska polja

Nadalje, vektorska polja djeluju na funkcije: neka je $X \in \mathcal{T}(M)$, $f \in C^\infty(U)$, $U \subset M$ otvoren.

Vektorska polja

Nadalje, vektorska polja djeluju na funkcije: neka je $X \in \mathcal{T}(M)$, $f \in C^\infty(U)$, $U \subset M$ otvoren.

Funkcija $Xf : U \to \mathbf{R}$ je definirana sa

$$Xf(p) = X_p f.$$

Vektorska polja

Nadalje, vektorska polja djeluju na funkcije: neka je $X \in \mathcal{T}(M)$, $f \in C^\infty(U)$, $U \subset M$ otvoren.

Funkcija $Xf : U \to \mathbf{R}$ je definirana sa

$$Xf(p) = X_p f.$$

Zbog lokalnosti djelovanja tangencijalnog vektora na funkcije (funkcija zadana u proizvoljno maloj okolini točke) slijedi i da je Xf lokalno definirano, tj. za svaki otvoren skup $V \subset U$ vrijedi

$$(Xf)|_V = X(f|_V).$$

Propozicija (Kriterij za glatka vektorska polja, II)

Neka je M glatka mnogostrukost, $Y : M \to TM$ vektorsko polje.

Vektorska polja

Propozicija (Kriterij za glatka vektorska polja, II)

Neka je M glatka mnogostrukost, $Y : M \to TM$ vektorsko polje.

Polje Y je glatko ako i samo ako je za svaki otvoren skup $U \subset M$ i svaku funkciju $f \in C^\infty(U)$ funkcija $Yf : U \to \mathbf{R}$ glatka.

Dokaz

Neka je Y vektorsko polje za koje je Yf glatko za svaku glatku funkciju f.

Dokaz

Neka je Y vektorsko polje za koje je Yf glatko za svaku glatku funkciju f.

Neka su x^i glatke koordinate na $U \subset M$. Tada su one glatke funkcije na U.

Dokaz

Neka je Y vektorsko polje za koje je Yf glatko za svaku glatku funkciju f.

Neka su x^i glatke koordinate na $U \subset M$. Tada su one glatke funkcije na U.

Prema pretpostavci fukcije Yx^i su glatke i vrijedi

$$Yx^i = \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}(x^i) = Y^i.$$

Dokaz

Neka je Y vektorsko polje za koje je Yf glatko za svaku glatku funkciju f.

Neka su x^i glatke koordinate na $U \subset M$. Tada su one glatke funkcije na U.

Prema pretpostavci fukcije Yx^i su glatke i vrijedi

$$Yx^i = \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}(x^i) = Y^i.$$

Sada Propozicija 1.7 povlači da je Y glatko polje.

Dokaz - nastavak

Obratno, neka je Y glatko vektorsko polje i neka je f glatka funkcija na U.

Dokaz - nastavak

Obratno, neka je Y glatko vektorsko polje i neka je f glatka funkcija na U.

Za svaku točku $p \in U$ možemo izabrati glatke koordinate (x^i) u okolini $W \subset U$ oko p, tako da za $x \in W$ vrijedi

$$Yf(x) = \left(\sum_i Y^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}|_x \right) f = \sum_i Y^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x).$$

Dokaz - nastavak

Obratno, neka je Y glatko vektorsko polje i neka je f glatka funkcija na U.

Za svaku točku $p \in U$ možemo izabrati glatke koordinate (x^i) u okolini $W \subset U$ oko p, tako da za $x \in W$ vrijedi

$$Yf(x) = \left(\sum_i Y^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}|_x \right) f = \sum_i Y^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x).$$

Opet, jer su Y^i glatke funkcije, po Propoziciji 1.7 slijedi da je Yf glatka funkcija na W, pa i na U. $\square$

Vektorska polja

Prethodna propozicija povlači da glatko vektorsko polje $Y \in \mathcal{T}(M)$ definira glatko preslikavanje $f \mapsto Yf$ sa $C^\infty(M)$ na $C^\infty(M)$,

$$Yf : \overset{M}{\cancel{U}} \to \mathbf{R}, \quad Yf(p) = Y_p f.$$

Vektorska polja

Prethodna propozicija povlači da glatko vektorsko polje $Y \in \mathcal{T}(M)$ definira glatko preslikavanje $f \mapsto Yf$ sa $C^\infty(M)$ na $C^\infty(M)$,

$$Yf : U \to \mathbf{R}, \quad Yf(p) = Y_p f.$$

Zbog linearnosti derivacije Y_p, to je preslikavanje linearno nad $\mathbf{R}$

$$\begin{aligned} Y(af + bg)(p) = Y_p(af + bg) = aY_pf + bY_pg = \\ aYf(p) + bYg(p) = (aYf + bYg)(p) \end{aligned}$$

Vektorska polja

Prethodna propozicija povlači da glatko vektorsko polje $Y \in \mathcal{T}(M)$ definira glatko preslikavanje $f \mapsto Yf$ sa $C^\infty(M)$ na $C^\infty(M)$,

$$Yf : U \to \mathbf{R}, \quad Yf(p) = Y_p f .$$

Zbog linearnosti derivacije Y_p, to je preslikavanje linearno nad $\mathbf{R}$

$$Y(af + bg)(p) = Y_p(af + bg) = aY_pf + bY_pg = \\ aYf(p) + bYg(p) = (aYf + bYg)(p)$$

Nadalje, preslikavanje $f \mapsto Yf$ zadovoljava

$$Y(fg)(p) = Y_p(fg) = f(p)Y_p(g) + g(p)Y_pf = \\ f(p)Yg(p) + g(p)Yf(p) = (fYg + gYf)(p).$$

Vektorska polja

Preslikavanje $Y : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ naziva se derivacija. Sljedeća propozicija identificira glatka vektorska polja s derivacijama od $C^\infty(M)$:

Vektorska polja

Preslikavanje $Y : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ naziva se derivacija. Sljedeća propozicija identificira glatka vektorska polja s derivacijama od $C^\infty(M)$:

Propozicija

Neka je M glatka mnogostrukost. Preslikavanje $\mathcal{Y} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ je derivacija ako i samo ako je $\mathcal{Y}f = Yf$, za neko glatko vektorsko polje $Y \in \mathcal{T}(M)$.

Dokaz

Već je prikazano kako vektorsko polje Y odredjuje derivaciju $\mathcal{Y}$.

Dokaz

Već je prikazano kako vektorsko polje Y odredjuje derivaciju $\mathcal{Y}$.

Obratno, neka je $\mathcal{Y} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ derivacija.

Dokaz

Već je prikazano kako vektorsko polje Y odredjuje derivaciju $\mathcal{Y}$.

Obratno, neka je $\mathcal{Y} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ derivacija.

Odredimo glatko vektorsko polje Y. U točki $p \in M$ mora vrijediti

$$Y_p f = (\mathcal{Y} f)(p).$$

Dokaz

Već je prikazano kako vektorsko polje Y odredjuje derivaciju $\mathcal{Y}$.

Obratno, neka je $\mathcal{Y} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ derivacija.

Odredimo glatko vektorsko polje Y. U točki $p \in M$ mora vrijediti

$$Y_p f = (\mathcal{Y} f)(p).$$

Time je definirano linearno preslikavanje $Y_p : C^\infty(M) \to \mathbf{R}$ koje u točki p zadovoljava produktnu formulu.

Dokaz

Već je prikazano kako vektorsko polje Y odredjuje derivaciju $\mathcal{Y}$.

Obratno, neka je $\mathcal{Y} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ derivacija.

Odredimo glatko vektorsko polje Y. U točki $p \in M$ mora vrijediti

$$Y_p f = (\mathcal{Y} f)(p).$$

Time je definirano linearno preslikavanje $Y_p : C^\infty(M) \to \mathbf{R}$ koje u točki p zadovoljava produktnu formulu.

Prema tome, preslikavanje Y_p je derivacija od $C^\infty(M)$ u p, odnosno tangencijalni vektor u p. Sada se pokaže da je preslikavanje $p \mapsto Y_p$ glatko vektorsko polje. $\square$

Lokalni reperi

Definicija

Neka je $E \to M$ *vektorski svežanj ranga* k*,* $U \subset M$ *otvoren.*

Lokalni reperi

Definicija

Neka je $E \to M$ *vektorski svežanj ranga* k, $U \subset M$ *otvoren.*

Za lokalne prereze $\sigma_1, \ldots, \sigma_l$ *od* E *nad* U *kažemo da su linearno nezavisni ako su vektori* $\sigma_1(p), \ldots, \sigma_l(p)$ *linearno nezavisni u* E_p *za svaki* $p \in U$.

Lokalni reperi

Definicija

Neka je $E \to M$ *vektorski svežanj ranga* k, $U \subset M$ *otvoren.*

Za lokalne prereze $\sigma_1, \ldots, \sigma_l$ *od* E *nad* U *kažemo da su linearno nezavisni ako su vektori* $\sigma_1(p), \ldots, \sigma_l(p)$ *linearno nezavisni u* E_p *za svaki* $p \in U$.

Prerezi $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$, *razapinju* E *ako vektori* $\sigma_1(p), \ldots, \sigma_l(p)$ *razapinju* E_p *za svaki* $p \in U$.

Lokalni reperi

Definicija

Neka je $E \to M$ vektorski svežanj ranga k, $U \subset M$ otvoren.

Za lokalne prereze $\sigma_1, \ldots, \sigma_l$ od E nad U kažemo da su linearno nezavisni ako su vektori $\sigma_1(p), \ldots, \sigma_l(p)$ linearno nezavisni u E_p za svaki $p \in U$.

Prerezi $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$, razapinju E ako vektori $\sigma_1(p), \ldots, \sigma_l(p)$ razapinju E_p za svaki $p \in U$.

Lokalni reper za E nad U je uredjena k-torka nezavisnih prereza nad U koji razapinju E. Glatki lokalni reper je lokalni reper za koji su svi prerezi glatki.

Lokalni reperi

Definicija

Neka je $E \to M$ *vektorski svežanj ranga* k, $U \subset M$ *otvoren.*

Za lokalne prereze $\sigma_1, \ldots, \sigma_l$ *od* E *nad* U *kažemo da su linearno nezavisni ako su vektori* $\sigma_1(p), \ldots, \sigma_l(p)$ *linearno nezavisni u* E_p *za svaki* $p \in U$.

Prerezi $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$, *razapinju* E *ako vektori* $\sigma_1(p), \ldots, \sigma_l(p)$ *razapinju* E_p *za svaki* $p \in U$.

Lokalni reper za E *nad* U *je uredjena* k*-torka nezavisnih prereza nad* U *koji razapinju* E. *Glatki lokalni reper je lokalni reper za koji su svi prerezi glatki.*

Ako je $U = M$, *tada reper nazivamo globalnim.*

Lokalni reperi

Ako je M glatka mnogostrukost, pod *lokalnim reperom* za M podrazumijevamo lokalni reper od TM nad nekim otvorenim podskupom U od M.

Lokalni reperi

Ako je M glatka mnogostrukost, pod *lokalnim reperom* za M podrazumijevamo lokalni reper od TM nad nekim otvorenim podskupom U od M.

Kažemo da je M *paralelizabilna* ako dopušta glatki globalni reper.

Lokalni reperi

Ako je M glatka mnogostrukost, pod *lokalnim reperom* za M podrazumijevamo lokalni reper od TM nad nekim otvorenim podskupom U od M.

Kažemo da je M *paralelizabilna* ako dopušta glatki globalni reper.

Propozicija

Vektorski svežanj je trivijalan ako i samo ako dopušta glatki ~~*lokalni*~~ globalni *reper.*

Push-forward vektorskih polja

Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje glatkih mnogostrukosti, Y glatko vektorsko polje na M. Tada je za svaku točku $p \in M$, $Y_p \in T_pM$.

Push-forward vektorskih polja

Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje glatkih mnogostrukosti, Y glatko vektorsko polje na M. Tada je za svaku točku $p \in M$, $Y_p \in T_pM$.

Push-forward preslikavanja F vektoru Y_p pridružuje vektor $F_*Y_p \in T_{F(p)}N$.

Push-forward vektorskih polja

Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje glatkih mnogostrukosti, Y glatko vektorsko polje na M. Tada je za svaku točku $p \in M$, $Y_p \in T_pM$.

Push-forward preslikavanja F vektoru Y_p pridružuje vektor $F_* Y_p \in T_{F(p)}N$.

Da li je na taj način definirano vektorsko polje na N?

Push-forward vektorskih polja

Uočimo:

- Ako F nije surjekcija, tada točki $q \in N \setminus F(M)$ nije pridružen niti jedan vektor;

Push-forward vektorskih polja

Uočimo:

- Ako F nije surjekcija, tada točki $q \in N \setminus F(M)$ nije pridružen niti jedan vektor;
- Ako F nije injekcija, tada postoje točke u N u kojima se dobiva više vektora pomoću *push-forward*-a vektora u različitim točkama domene.

Push-forward vektorskih polja

Dakle, općenito *push-forward* vektorskog polja na domeni nije vektorsko polje na kodomeni.

Push-forward vektorskih polja

Dakle, općenito *push-forward* vektorskog polja na domeni nije vektorsko polje na kodomeni.

Definicija

Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje, Y vektorsko polje na M.

Push-forward vektorskih polja

Dakle, općenito *push-forward* vektorskog polja na domeni nije vektorsko polje na kodomeni.

Definicija

Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje, Y vektorsko polje na M.

Ako postoji vektorsko polje Z na N takvo da za svaku točku $p \in M$ vrijedi

$$F_* Y_p = Z_{F(p)}$$

tada kažemo da su polja Y i Z F-povezana.

Push-forward vektorskih polja

Propozicija

Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje, $Y \in \mathcal{T}(M)$, $Z \in \mathcal{T}(N)$.

Push-forward vektorskih polja

Propozicija

Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje, $Y \in \mathcal{T}(M)$, $Z \in \mathcal{T}(N)$.

Polja Y i Z su F-povezana ako i samo ako za svaku funkciju $f \in C^\infty(V)$, V je otvoren skup u N, vrijedi

$$Y(f \circ F) = (Zf) \circ F.$$

Push-forward vektorskih polja

Propozicija

Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje, $Y \in \mathcal{T}(M)$, $Z \in \mathcal{T}(N)$.

Polja Y i Z su F-povezana ako i samo ako za svaku funkciju $f \in C^\infty(V)$, V je otvoren skup u N, vrijedi

$$Y(f \circ F) = (Zf) \circ F.$$

Dokaz. Neka je $p \in M$, f glatka funkcija oko $F(p)$.

Push-forward vektorskih polja

Propozicija

Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje, $Y \in \mathcal{T}(M)$, $Z \in \mathcal{T}(N)$.

Polja Y i Z su F-povezana ako i samo ako za svaku funkciju $f \in C^\infty(V)$, V je otvoren skup u N, vrijedi

$$Y(f \circ F) = (Zf) \circ F.$$

Dokaz. Neka je $p \in M$, f glatka funkcija oko $F(p)$.

Tada je

$$Y(f \circ F)(p) = Y_p(f \circ F) = (F_* Y_p)f,$$

Push-forward vektorskih polja

Propozicija

Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje, $Y \in \mathcal{T}(M)$, $Z \in \mathcal{T}(N)$.

Polja Y i Z su F-povezana ako i samo ako za svaku funkciju $f \in C^\infty(V)$, V je otvoren skup u N, vrijedi

$$Y(f \circ F) = (Zf) \circ F.$$

Dokaz. Neka je $p \in M$, f glatka funkcija oko $F(p)$.

Tada je

$$Y(f \circ F)(p) = Y_p(f \circ F) = (F_* Y_p)f,$$

dok je

$$(Zf) \circ F(p) = (Zf)(F(p)) = Z_{F(p)}f.$$

$\square$

Primjer

Neka je $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $F(t) = (\cos t, \sin t)$. F je glatko preslikavanje.

Primjer

Neka je $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $F(t) = (\cos t, \sin t)$. F je glatko preslikavanje.

Na $\mathbf{R}$ je zadano glatko vektorsko polje $Y = \frac{d}{dt}$, a na $\mathbf{R}^2$

$$Z = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}.$$

Primjer

Neka je $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $F(t) = (\cos t, \sin t)$. F je glatko preslikavanje.

Na $\mathbf{R}$ je zadano glatko vektorsko polje $Y = \frac{d}{dt}$, a na $\mathbf{R}^2$

$$Z = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}.$$

Tada su polja Y i Z F-povezana.

Propozicija

Neka je $F : M \to N$ *difeomorfizam.*

Propozicija

Neka je $F : M \to N$ *difeomorfizam.*

Tada za svaki $Y \in \mathcal{T}(M)$ *postoji jedinstveno glatko vektorsko polje na* N *koje je* F*-povezano s* Y*.*

Propozicija

Neka je $F : M \to N$ *difeomorfizam.*

Tada za svaki $Y \in \mathcal{T}(M)$ *postoji jedinstveno glatko vektorsko polje na* N *koje je* F*-povezano s* Y*.*

To se polje zove *push-forward* vektorskog polja Y.

Propozicija

Neka je $F : M \to N$ difeomorfizam.

Tada za svaki $Y \in \mathcal{T}(M)$ postoji jedinstveno glatko vektorsko polje na N koje je F-povezano s Y.

To se polje zove *push-forward* vektorskog polja Y.

Dokaz. Kako je F difeomorfizam, definiramo

$$Z_q = F_*(Y_{F^{-1}(q)}).$$

$\square$

Liejeve zagrade

Neka su V, W glatka vektorska polja na M. Općenito $f \mapsto VWf$ nije vektorsko polje.

Liejeve zagrade

Neka su V, W glatka vektorska polja na M. Općenito $f \mapsto VWf$ nije vektorsko polje.

Definicija

Liejeva zagrada glatkih vektorskih polja V, W na M je linearni operator $[V, W] : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$

$$[V, W]f = VWf - WVf.$$

Liejeve zagrade

Neka su V, W glatka vektorska polja na M. Općenito $f \mapsto VWf$ nije vektorsko polje.

Definicija

Liejeva zagrada glatkih vektorskih polja V, W na M je linearni operator $[V, W] : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$

$$[V, W]f = VWf - WVf.$$

Propozicija

Lie-jeva zagrada para glatkih vektorskih polja je glatko vektorsko polje.

Dokaz

Po propoziciji 1.10, dovoljno je pokazati da je $[V, W]$ derivacija na $C^\infty(M)$.

Dokaz

Po propoziciji 1.10, dovoljno je pokazati da je $[V, W]$ derivacija na $C^\infty(M)$.

Neka su $f, g \in C^\infty(M)$. Tada je

$$
\begin{aligned}
{[V,W]}(fg) &= V(W(fg)) - W(V(fg)) = \\
&V(fWg + gWf) - W(fVg + gVf) = \\
Vf\, Wg + fVWg &+ Vg\, Wf + gVWf - Wf\, Vg - fWVg - WgVf - gWVf = \\
&fVWg + gVWf - fWVg - gWVf = f[V,W]g + g[V,W]f.
\end{aligned}
$$

$\square$

Liejeve zagrade

Vrijednost vektorskog polja $[V, W]$ u točki p je

$$[V, W]_p(f) = V_p(Wf) - W_p(Vf).$$

Liejeve zagrade

Vrijednost vektorskog polja $[V, W]$ u točki p je

$$[V, W]_p(f) = V_p(Wf) - W_p(Vf).$$

Propozicija

Neka su V, W glatka vektorska polja na M, $V = \sum_i V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $W = \sum_i W^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ njihovi koordinatni prikazi s obzirom na lokalne koordinate $(U, (x^i))$ od M.

Liejeve zagrade

Vrijednost vektorskog polja $[V, W]$ u točki p je

$$[V, W]_p(f) = V_p(Wf) - W_p(Vf).$$

Propozicija

Neka su V, W glatka vektorska polja na M, $V = \sum_i V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $W = \sum_i W^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ njihovi koordinatni prikazi s obzirom na lokalne koordinate $(U, (x^i))$ od M.

Tada $[V, W]$ ima sljedeći koordinatni prikaz

$$[V, W] = \sum_{i,j} \left(V^i \frac{\partial W^j}{\partial x^i} - W^i \frac{\partial V^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j},$$

ili

$$[V, W] = \sum_j (VW^j - WV^j) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Primjeri

1. Neka je $V = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + x(y+1)\frac{\partial}{\partial z}$, $W = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}$.
   Odredite koordinatni prikaz od $[V, W]$ koristeći definiciju i prethodnu propoziciju.

Primjeri

1. Neka je $V = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + x(y+1)\frac{\partial}{\partial z}$, $W = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}$. Odredite koordinatni prikaz od $[V, W]$ koristeći definiciju i prethodnu propoziciju.

2. Vrijedi
$$[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0.$$

Svojstva Liejeve zagrade

1. Bilinearnost u prvom i drugom faktoru: $[aV + bW, X] = a[V, X] + b[W, X]$, $a, b \in \mathbf{R}$, $V, W, X \in \mathcal{T}(M)$

Svojstva Liejeve zagrade

1. Bilinearnost u prvom i drugom faktoru:
   $[aV + bW, X] = a[V, X] + b[W, X]$, $a, b \in \mathbf{R}$,
   $V, W, X \in \mathcal{T}(M)$
2. Antisimetričnost: $[V, W] = -[W, V]$

Svojstva Liejeve zagrade

1. Bilinearnost u prvom i drugom faktoru:
   $[aV + bW, X] = a[V, X] + b[W, X]$, $a, b \in \mathbf{R}$,
   $V, W, X \in \mathcal{T}(M)$
2. Antisimetričnost: $[V, W] = -[W, V]$
3. Jacobijev identitet:
   $[V, [W, X]] + [W, [X, V]] + [X, [V, W]] = 0$

Svojstva Liejeve zagrade

1. Bilinearnost u prvom i drugom faktoru:
   $[aV + bW, X] = a[V, X] + b[W, X]$, $a, b \in \mathbf{R}$, $V, W, X \in \mathcal{T}(M)$
2. Antisimetričnost: $[V, W] = -[W, V]$
3. Jacobijev identitet:
   $[V, [W, X]] + [W, [X, V]] + [X, [V, W]] = 0$
4. Za $f, g \in C^\infty(M)$ vrijedi
   $[fV, gW] = fg[V, W] + (fVg)W - (gWf)V$.

Svojstva Liejeve zagrade

1. Bilinearnost u prvom i drugom faktoru:
   $[aV + bW, X] = a[V, X] + b[W, X]$, $a, b \in \mathbf{R}$, $V, W, X \in \mathcal{T}(M)$
2. Antisimetričnost: $[V, W] = -[W, V]$
3. Jacobijev identitet:
   $[V, [W, X]] + [W, [X, V]] + [X, [V, W]] = 0$
4. Za $f, g \in C^\infty(M)$ vrijedi
   $[fV, gW] = fg[V, W] + (fVg)W - (gWf)V$.

$ad_V = [V, \cdot]$

$ad_V([W, X]) =$

$[ad_V(W), X] +$

$+ [W, ad_V(X)]$

Propozicija

Neka je $F : M \to N$ difeomorfizam, $V, W \in \mathcal{T}(M)$. Tada je $F_*[V, W] = [F_*V, F_*W]$.

Klasična diferencijalna geometrija

Vektorsko polje na otvorenom skupu $U \subset \mathbf{R}^n$ je pridruživanje vektora svakoj točki iz U.

Klasična diferencijalna geometrija

Vektorsko polje na otvorenom skupu $U \subset \mathbf{R}^n$ je pridruživanje vektora svakoj točki iz U.

Primjer.

$$(x, y) \mapsto (1, 0), \;\; (x, y) \mapsto (x, y),$$

$$(x, y) \mapsto (-y, x), \;\; (x, y) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

Klasična diferencijalna geometrija

Pišemo
$$V = \frac{\partial}{\partial x}, \quad V = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},$$
$$V = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}, \quad V = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Klasična diferencijalna geometrija

Primjer. Neka je $V = y^2 \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$, $W = \frac{\partial}{\partial y}$, $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = y^3$.

Klasična diferencijalna geometrija

Primjer. Neka je $V = y^2\dfrac{\partial}{\partial x} - x\dfrac{\partial}{\partial y}$, $W = \dfrac{\partial}{\partial y}$, $f(x,y) = xy$, $g(x,y) = y^3$.

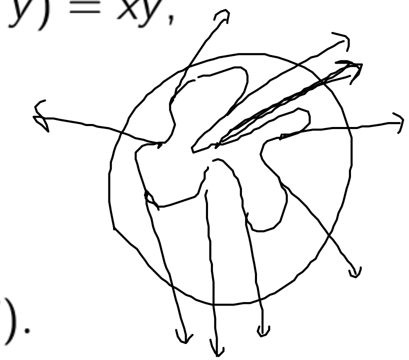
Izračunajte:

$$Vf,\ \ fV,\ \ Vg,\ \ V(fg),\ \ V(Vf),$$

$$V(Wf), V(W(fg)),\ \ fV(Wg) + gV(Wf).$$

Klasična diferencijalna geometrija

Primjer. Neka je $V = y^2 \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$, $W = \frac{\partial}{\partial y}$, $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = y^3$.



Izračunajte:

$$Vf, \quad fV, \quad Vg, \quad V(fg), \quad V(Vf),$$

$$V(Wf), V(W(fg)), \quad fV(Wg) + gV(Wf).$$

Integralna krivulja vektorskog polja X na $U \subset \mathbf{R}^n$ je parametrizirana krivulja $c : I \to \mathbf{R}^n$ takva da je $c(I) \subset U$ i $\dot{c} = X(c(t))$.

Primjer

Neka je $V = x\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial x}$.

Primjer

Neka je $V = x\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial x}$.

Tražimo krivulju $c : I \to \mathbf{R}^2$, $c(t) = (x(t), y(t))$,
$\dot{c} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = \dot{x}(t)\dfrac{\partial}{\partial x} + \dot{y}(t)\dfrac{\partial}{\partial y}$.

Primjer

Neka je $V = x\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial x}$.

Tražimo krivulju $c : I \to \mathbf{R}^2$, $c(t) = (x(t), y(t))$,
$\dot{c} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = \dot{x}(t)\dfrac{\partial}{\partial x} + \dot{y}(t)\dfrac{\partial}{\partial y}$.

Dobiva se sustav ODJ

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -y(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t). \end{aligned}$$

Primjer

Neka je $V = x\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial x}$.

Tražimo krivulju $c : I \to \mathbf{R}^2$, $c(t) = (x(t), y(t))$,
$\dot{c} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = \dot{x}(t)\dfrac{\partial}{\partial x} + \dot{y}(t)\dfrac{\partial}{\partial y}$.

Dobiva se sustav ODJ

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -y(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t). \end{aligned}$$

Rješenje sustava je za $a, b \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} x(t) &= a\cos t - b\sin t \\ y(t) &= a\sin t + b\sin t. \end{aligned}$$

Napomena

Hairy Ball Theorem (Češljanje ježa): Na sferi S^2 ne postoji neprekidno vektorsko (tangencijalno) polje koje nigdje ne iščezava. (Brouwer, 1912.)

Napomena

Hairy Ball Theorem (Češljanje ježa): Na sferi S^2 ne postoji neprekidno vektorsko (tangencijalno) polje koje nigdje ne iščezava. (Brouwer, 1912.)

Može se pokazati da postoji glatko vektorsko polje na S^2 koje iščezava u točno jednoj točki (stereografskom projekcijom).