Glatke i Riemannove mnogostrukosti

Željka Milin-Šipuš, Pavle Pandžić i Juraj Šiftar

Geometrija i topologija, drugi dio

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Osnovni slučaj: $M = \mathbb{R}^n$.

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Osnovni slučaj: $M = \mathbb{R}^n$.

Geometrijski tangencijalni prostor od $\mathbf{R}^n$ u točki p je n-dimenzionalni vektorski prostor

$$\mathbf{R}^n_p = \{p\} \times \mathbf{R}^n = \{(p, v) : v \in \mathbf{R}^n\}.$$

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Osnovni slučaj: $M = \mathbb{R}^n$.

Geometrijski tangencijalni prostor od $\mathbf{R}^n$ u točki p je n-dimenzionalni vektorski prostor

$$\mathbf{R}^n_p = \{p\} \times \mathbf{R}^n = \{(p, v) : v \in \mathbf{R}^n\}.$$

Neka je $v_p \in \mathbf{R}^n_p$. Definiramo preslikavanje $\tilde{v}_p : C^\infty(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$ kao usmjerenu derivaciju funkcije f u smjeru vektora v u p

$$\tilde{v}_p f = D_v f(p) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(p + tv).$$

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Preslikavanje $\tilde{v}_p$ je linearno i zadovoljava

$$\tilde{v}_p(fg) = f(p)\tilde{v}_p(g) + g(p)\tilde{v}_p(f).$$

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Preslikavanje $\tilde{v}_p$ je linearno i zadovoljava

$$\tilde{v}_p(fg) = f(p)\tilde{v}_p(g) + g(p)\tilde{v}_p(f).$$

Za $v_p = \sum_i v^i e_i|_p$ vrijedi

$$\tilde{v}_p f = \sum_i v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Preslikavanje $\tilde{v}_p$ je linearno i zadovoljava

$$\tilde{v}_p(fg) = f(p)\tilde{v}_p(g) + g(p)\tilde{v}_p(f).$$

Za $v_p = \sum_i v^i e_i|_p$ vrijedi

$$\tilde{v}_p f = \sum_i v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

Definicija

Linearno preslikavanje $X : C^\infty(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$ *naziva se derivacijom u* p *ako vrijedi*

$$X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf, \;\; f, g \in C^\infty(\mathbf{R}^n).$$

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Preslikavanje $\tilde{v}_p$ je linearno i zadovoljava

$$\tilde{v}_p(fg) = f(p)\tilde{v}_p(g) + g(p)\tilde{v}_p(f).$$

Za $v_p = \sum_i v^i e_i|_p$ vrijedi

$$\tilde{v}_p f = \sum_i v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

Definicija

Linearno preslikavanje $X : C^\infty(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$ *naziva se derivacijom u* p *ako vrijedi*

$$X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf, \ \ f, g \in C^\infty(\mathbf{R}^n).$$

Neka je $T_p(\mathbf{R}^n)$ vektorski prostor svih derivacija u p.

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Propozicija

Za svaki $p \in \mathbf{R}^n$ *preslikavanje* $v_p \mapsto \tilde{v}_p$ *je izomorfizam vektorskih prostora* $\mathbf{R}^n_p$ *i* $T_p(\mathbf{R}^n)$.

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Propozicija

Za svaki $p \in \mathbf{R}^n$ preslikavanje $v_p \mapsto \tilde{v}_p$ je izomorfizam vektorskih prostora $\mathbf{R}^n_p$ i $T_p(\mathbf{R}^n)$.

Korolar

Za svaki $p \in \mathbf{R}^n$, derivacije

$$\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p : C^\infty(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$$

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Propozicija

Za svaki $p \in \mathbf{R}^n$ *preslikavanje* $v_p \mapsto \tilde{v}_p$ *je izomorfizam vektorskih prostora* $\mathbf{R}^n_p$ *i* $T_p(\mathbf{R}^n)$.

Korolar

Za svaki $p \in \mathbf{R}^n$, *derivacije*

$$\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p : C^\infty(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$$

definirane sa

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Propozicija

Za svaki $p \in \mathbf{R}^n$ preslikavanje $v_p \mapsto \tilde{v}_p$ je izomorfizam vektorskih prostora $\mathbf{R}^n_p$ i $T_p(\mathbf{R}^n)$.

Korolar

Za svaki $p \in \mathbf{R}^n$, derivacije

$$\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p : C^\infty(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$$

definirane sa

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

čine bazu za $T_p(\mathbf{R}^n)$.

Tangencijalni prostor na M

Definicija

Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M$.

Tangencijalni prostor na M

Definicija

Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M$.

Linearno prelikavanje $X : C^\infty(M) \to \mathbf{R}$ naziva se derivacijom u p ako vrijedi

$$X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf, \quad f, g \in C^\infty(M).$$

Tangencijalni prostor na M

Definicija

Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M$.

Linearno prelikavanje $X : C^\infty(M) \to \mathbf{R}$ naziva se derivacijom u p ako vrijedi

$$X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf, \;\; f, g \in C^\infty(M).$$

Skup svih derivacija u p je vektorski prostor koji se naziva tangencijalnim prostorom od M u p i označava T_pM.

Tangencijalni prostor na M

Definicija

Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M$.

Linearno prelikavanje $X : C^\infty(M) \to \mathbf{R}$ naziva se derivacijom u p ako vrijedi

$$X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf, \quad f, g \in C^\infty(M).$$

Skup svih derivacija u p je vektorski prostor koji se naziva tangencijalnim prostorom od M u p i označava T_pM.

Tangencijalni vektor u p je element prostora T_pM.

Lema (Svojstva tangencijalnih vektora na M)

Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M$, $X \in T_p(M)$.

Lema (Svojstva tangencijalnih vektora na M)

Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M$, $X \in T_p(M)$.

1. *Ako je f konstantna funkcija, tada je $Xf = 0$.*

Lema (Svojstva tangencijalnih vektora na M)

Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M$, $X \in T_p(M)$.

1. *Ako je f konstantna funkcija, tada je $Xf = 0$.*
2. *Ako je $f(p) = g(p) = 0$, tada je $X(fg) = 0$.*

Push-forward

Definicija

Neka su M i N glatke mnogostrukosti, $F : M \to N$ glatko preslikavanje.

Push-forward

Definicija

Neka su M i N glatke mnogostrukosti, $F : M \to N$ glatko preslikavanje.

Za svako $p \in M$ definiramo push-forward F_* preslikavanja F kao preslikavanje

$$F_* : T_pM \to T_{F(p)}N, \qquad (F_*X)(f) = X(f \circ F),$$

gdje je $f \in C^\infty(N)$.

Push-forward

Lema (Svojstva *push-forward*-a)

Neka su $F : M \to N$, $G : N \to P$ *glatka preslikavanja,* $p \in M$.
Tada:

Push-forward

Lema (Svojstva *push-forward*-a)

Neka su $F : M \to N$, $G : N \to P$ *glatka preslikavanja,* $p \in M$.
Tada:

1. $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ *je linearni operator*

Push-forward

Lema (Svojstva *push-forward*-a)

Neka su $F : M \to N$, $G : N \to P$ glatka preslikavanja, $p \in M$. Tada:

1. $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ *je linearni operator*
2. $(G \circ F)_* = G_* \circ F_* : T_pM \to T_{(G\circ F)(p)}P$

Push-forward

Lema (Svojstva *push-forward*-a)

Neka su $F : M \to N$, $G : N \to P$ glatka preslikavanja, $p \in M$. Tada:

1. $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ *je linearni operator*
2. $(G \circ F)_* = G_* \circ F_* : T_pM \to T_{(G\circ F)(p)}P$
3. $((Id)_M)_* = Id_{T_pM} : T_pM \to T_pM$

Push-forward

Lema (Svojstva *push-forward*-a)

Neka su $F : M \to N$, $G : N \to P$ *glatka preslikavanja,* $p \in M$.
Tada:

1. $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ *je linearni operator*
2. $(G \circ F)_* = G_* \circ F_* : T_pM \to T_{(G \circ F)(p)}P$
3. $((Id)_M)_* = Id_{T_pM} : T_pM \to T_pM$
4. *Ako je* F *difeomorfizam, tada je* $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ *izomorfizam.*

Propozicija

Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M, X \in T_p(M)$.

Propozicija

Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M, X \in T_p(M)$.

Neka su f, g glatke funkcije na M koje se podudaraju na nekoj okolini od p.

Propozicija

Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M, X \in T_p(M)$.

Neka su f, g glatke funkcije na M koje se podudaraju na nekoj okolini od p.

Tada je $Xf = Xg$.

Prethodna propozicija omogućuje identifikaciju tangencijalnog prostora otvorene podmnogostrukosti s tangencijalnim prostorom cijele mnogostrukosti:

Prethodna propozicija omogućuje identifikaciju tangencijalnog prostora otvorene podmnogostrukosti s tangencijalnim prostorom cijele mnogostrukosti:

Propozicija

Neka je M glatka mnogostrukost, $U \subset M$ otvorena podmnogostrukost, $i : U \hookrightarrow M$ inkluzija.

Prethodna propozicija omogućuje identifikaciju tangencijalnog prostora otvorene podmnogostrukosti s tangencijalnim prostorom cijele mnogostrukosti:

Propozicija

Neka je M glatka mnogostrukost, $U \subset M$ otvorena podmnogostrukost, $i : U \hookrightarrow M$ inkluzija.

Tada je za svaki $p \in U$ preslikavanje $i_* : T_pU \to T_pM$ izomorfizam.

Propozicija

Ako je $F : M \to N$ *lokalni difeomorfizam, tada je* $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ *izomorfizam za svaki* $p \in M$.

Propozicija

Ako je $F : M \to N$ *lokalni difeomorfizam, tada je* $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ *izomorfizam za svaki* $p \in M$.

Generalizirajući izomorfizam izmedju $\mathbf{R}^n_p$ i $T_p\mathbf{R}^n$, dobivamo:

Propozicija

Za svaki konačnodimenzionalan vektorski prostor V i svaku točku $p \in V$, postoji prirodni izomorfizam (tj. izomorfizam koji ne ovisi o izboru baza) $V \to T_pV$ takav da za svaki linearni operator $L : V \to W$ sljedeći dijagram komutira

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "L"'] & T_pV \arrow[d, "L_*"] \\ W \arrow[r, "\cong"'] & T_{Lp}W \end{tikzcd}$$

Koordinatni zapis

Neka je (U, φ) glatka koordinatna karta na M.

Koordinatni zapis

Neka je (U, φ) glatka koordinatna karta na M.

$\varphi : U \to \varphi(U)$ je glatki difeomorfizam, pa je $\varphi_* : T_p M \to T_{\varphi(p)} \mathbf{R}^n$ izomorfizam.

Koordinatni zapis

Neka je (U, φ) glatka koordinatna karta na M.

$\varphi : U \to \varphi(U)$ je glatki difeomorfizam, pa je $\varphi_* : T_pM \to T_{\varphi(p)}\mathbf{R}^n$ izomorfizam.

Znamo: baza za $T_{\varphi(p)}\mathbf{R}^n$ su derivacije $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_{\varphi(p)}$, $i = 1, \ldots, n$.

Koordinatni zapis

Neka je (U, φ) glatka koordinatna karta na M.

$\varphi : U \to \varphi(U)$ je glatki difeomorfizam, pa je $\varphi_* : T_pM \to T_{\varphi(p)}\mathbf{R}^n$ izomorfizam.

Znamo: baza za $T_{\varphi(p)}\mathbf{R}^n$ su derivacije $\frac{\partial}{\partial x^i}|_{\varphi(p)}$, $i = 1, \dots, n$.

Prema tome, push-forward tih vektora po preslikavanju $(\varphi^{-1})_*$ je baza za T_pM:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p = (\varphi^{-1})_* \frac{\partial}{\partial x^i}|_{\varphi(p)},$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p f = \frac{\partial}{\partial x^i}|_{\varphi(p)}(f \circ \varphi^{-1}) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i}(\hat{p}),$$

gdje je $f : U \to \mathbf{R}$ glatka funkcija, $\hat{f} = f \circ \varphi^{-1}$ njen koordinatni prikaz, $\hat{p} = \varphi(p)$.

Lema

Neka je M glatka mnogostrukost. Za svaki $p \in M$, T_pM je n-dimenzionalni vektorski prostor.

Lema

Neka je M glatka mnogostrukost. Za svaki $p \in M$, T_pM je n-dimenzionalni vektorski prostor.

Ako je $(U, (x^i))$ glatka karta oko p, tada

$$\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p$$

čine bazu za T_pM.

U danoj bazi imamo:
Neka je $X \in T_pM$, $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$.

U danoj bazi imamo:
Neka je $X \in T_pM$, $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$.

Uredjena n-torka $(X^1, \ldots X^n)$ je n-torka komponenata (koordinata) vektora X s obzirom na dani koordinatni sustav.

U danoj bazi imamo:
Neka je $X \in T_pM$, $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$.

Uredjena n-torka $(X^1, \dots X^n)$ je n-torka komponenata (koordinata) vektora X s obzirom na dani koordinatni sustav.

Neka je $x^j : U \to \mathbf{R}$ (glatka) koordinatna funkcija, tada

$$X(x^j) = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p(x^j) = \sum_i X^i \frac{\partial x^j \circ \varphi^{-1}}{\partial x^i}(\hat{p}) = X^j.$$

Push-forward glatkog preslikavanja F u koordinatama

Za $F : U \to V$, $U \subset \mathbf{R}^n$, $V \subset \mathbf{R}^m$, i za $p \in U$, matrični prikaz preslikavanja F_* u paru standardnih baza je *Jacobijeva matrica*

Push-forward glatkog preslikavanja F u koordinatama

Za $F : U \to V$, $U \subset \mathbf{R}^n$, $V \subset \mathbf{R}^m$, i za $p \in U$, matrični prikaz preslikavanja F_* u paru standardnih baza je *Jacobijeva matrica*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1}(p) & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^m}{\partial x^1}(p) & \dots & \frac{\partial F^m}{\partial x^n}(p) \end{pmatrix} \tag{1}$$

Push-forward glatkog preslikavanja F u koordinatama

Za $F : U \to V$, $U \subset \mathbf{R}^n$, $V \subset \mathbf{R}^m$, i za $p \in U$, matrični prikaz preslikavanja F_* u paru standardnih baza je *Jacobijeva matrica*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^m}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial F^m}{\partial x^n}(p) \end{pmatrix} \tag{1}$$

Dakle, specijalni slučaj $F_* : T_p\mathbf{R}^n \to T_{F(p)}\mathbf{R}^m$ odgovara diferencijalu $DF(p) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ uz identifikaciju euklidskih prostora sa svojim tangencijalnim prostorima.

Push-forward glatkog preslikavanja F u koordinatama

Za $F : M \to N$ uz koordinatne karte (U, φ) za M oko p, (V, ψ) za N oko $F(p)$, promatramo koordinatno preslikavanje

$$\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V).$$

Push-forward glatkog preslikavanja F u koordinatama

Za $F : M \to N$ uz koordinatne karte (U, φ) za M oko p, (V, ψ) za N oko $F(p)$, promatramo koordinatno preslikavanje

$$\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V).$$

U paru standardnih baza, $\hat{F}_*$ ima za matrični prikaz Jacobijevu matricu preslikavanja $\hat{F}$.

Zbog toga i preslikavanje F_* u paru baza $(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p)$ za U i $(\frac{\partial}{\partial y^i}|_{F(p)})$ za V ima za matrični prikaz Jacobijevu matricu preslikavanja $\hat{F}$:

Zbog toga i preslikavanje F_* u paru baza $(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p)$ za U i $(\frac{\partial}{\partial y^i}|_{F(p)})$ za V ima za matrični prikaz Jacobijevu matricu preslikavanja $\hat{F}$:

$$F_* \frac{\partial}{\partial x^i}|_p = F_* \left((\varphi^{-1})_* \frac{\partial}{\partial x^i}|_{\varphi(p)} \right) = (\psi^{-1})_* \left(\hat{F}_* \frac{\partial}{\partial x^i}|_{\varphi(p)} \right)$$

$$= (\psi^{-1})_* \left(\sum_j \frac{\partial \hat{F}^j}{\partial x^i}(\hat{p}) \frac{\partial}{\partial y^j}|_{\hat{F}(\varphi(p))} \right) = \sum_j \frac{\partial \hat{F}^j}{\partial x^i}(\hat{p}) \frac{\partial}{\partial y^j}|_{F(p))},$$

pri čemu smo koristili $F \circ \varphi^{-1} = \psi^{-1} \circ \hat{F}$.

Promjena koordinata

Izgleda kao lančano pravilo:
Neka su (U, φ), (V, ψ) dvije karte oko p, (x^i), $(\tilde{x}^i)$ odgovarajuće koordinate.

Promjena koordinata

Izgleda kao lančano pravilo:
Neka su (U, φ), (V, ψ) dvije karte oko p, (x^i), $(\tilde{x}^i)$ odgovarajuće koordinate.

Tada je

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p = \sum_j \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(\hat{p}) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}|_p.$$

Promjena koordinata

Izgleda kao lančano pravilo:
Neka su (U, φ), (V, ψ) dvije karte oko p, (x^i), $(\tilde{x}^i)$ odgovarajuće koordinate.

Tada je

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p = \sum_j \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(\hat{p}) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}|_p.$$

Stoga se komponente X^i transformiraju po pravilu

$$\tilde{X}^j = \sum_i \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(\hat{p}) X^i.$$

Tangencijalni vektori krivulje

Neka je M glatka mnogostrukost. *Krivulja* u M je glatko (klase C^k) preslikavanje $c : I \to M$, $I \subset \mathbf{R}$ otvoren interval.

Tangencijalni vektori krivulje

Neka je M glatka mnogostrukost. *Krivulja* u M je glatko (klase C^k) preslikavanje $c : I \to M$, $I \subset \mathbf{R}$ otvoren interval.

Tangencijalni vektor od c u točki $t_0 \in I$ je vektor

$$c'(t_0) := c_*(\frac{d}{dt}|_{t_0}) \in T_{c(t_0)}M,$$

gdje je $\frac{d}{dt}|_{t_0}$ standardna baza za $T_{t_0}\mathbf{R}$.

Tangencijalni vektori krivulje

Neka je M glatka mnogostrukost. *Krivulja* u M je glatko (klase C^k) preslikavanje $c : I \to M$, $I \subset \mathbf{R}$ otvoren interval.

Tangencijalni vektor od c u točki $t_0 \in I$ je vektor

$$c'(t_0) := c_*(\frac{d}{dt}|_{t_0}) \in T_{c(t_0)}M,$$

gdje je $\frac{d}{dt}|_{t_0}$ standardna baza za $T_{t_0}\mathbf{R}$.

$U \subseteq M$, otv

Tangencijalni vektor $c'(t_0)$ djeluje na funkcije $f : U \to \mathbf{R}$

$U \ni p$
$p = c(t_0)$

$$c'(t_0)f = c_*(\frac{d}{dt}|_{t_0})f = \frac{d}{dt}|_{t_0}(f \circ c) = \frac{d(f \circ c)}{dt}(t_0).$$

Lema

Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M$. Svaki $X \in T_pM$ je tangencijalni vektor neke glatke krivulje u M.

$\varphi(p) = 0$

Lema

Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M$. Svaki $X \in T_pM$ je tangencijalni vektor neke glatke krivulje u M.

Dokaz. Neka je (U, φ) koordinatna karta centrirana u p,
$X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$.

Lema

Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M$. Svaki $X \in T_pM$ je tangencijalni vektor neke glatke krivulje u M.

Dokaz. Neka je (U, φ) koordinatna karta centrirana u p, $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$.

Definirajmo krivulju $c : \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \to U$

$$c(t) = (tX^1, \ldots, tX^n) \quad \cancel{(}= \varphi^{-1}(tX^1, \ldots, tX^n)\cancel{)}.$$

Lema

Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M$. Svaki $X \in T_pM$ je tangencijalni vektor neke glatke krivulje u M.

Dokaz. Neka je (U, φ) koordinatna karta centrirana u p, $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$.

Definirajmo krivulju $c : \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \to U$

$$c(t) = (tX^1, \dots, tX^n) \ \ \left(= \varphi^{-1}(tX^1, \dots, tX^n)\right).$$

Očito vrijedi $c(0) = p$, $c'(0) = X$. $\square$

Propozicija

Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje, $c : I \to M$ glatka krivulja.

Propozicija

Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje, $c : I \to M$ glatka krivulja.

Za svaki $t_0 \in I$ tangencijalni vektor u t_0 slike krivulje c pri preslikavanju F, $F \circ c : I \to N$ je dan sa

$$(F \circ c)'(t_0) = F_*(c'(t_0)).$$

Propozicija

Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje, $c : I \to M$ glatka krivulja.

Za svaki $t_0 \in I$ tangencijalni vektor u t_0 slike krivulje c pri preslikavanju F, $F \circ c : I \to N$ je dan sa

$$(F \circ c)'(t_0) = F_*(c'(t_0)).$$

Dokaz.

$$(F \circ c)'(t_0) = (F \circ c)_* \frac{d}{dt}|_{t_0} = F_* \circ c_* \frac{d}{dt}|_{t_0} = F_*(c'(t_0)).$$

$\square$

Klasična diferencijalna geometrija krivulja i ploha

Tangencijalni vektor krivulje je $\dot{c}(t)$.

Klasična diferencijalna geometrija krivulja i ploha

Tangencijalni vektor krivulje je $\dot{c}(t)$.

Tangencijalni vektor plohe: $v \in T_p\mathbf{R}^3$ je tangencijalni vektor plohe ako postoji krivulja $c : I \to S$ takva da je $c(0) = p$, $c'(0) = v$.

Klasična diferencijalna geometrija krivulja i ploha

Tangencijalni vektor krivulje je $\dot{c}(t)$.

Tangencijalni vektor plohe S: $v \in T_p\mathbf{R}^3$ je tangencijalni vektor plohe ako postoji krivulja $c : I \to S$ takva da je $c(0) = p$, $c'(0) = v$.

Ako je $\mathbf{x} : U \to S$ parametrizacija od S, tada

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}, \ (u, v) \in U,$$

razapinju tangencijalnu ravninu.

Alternativne definicije tangencijalnog prostora.

1. Klice glatkih funkcija

$$f : \underset{p}{U} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \sim \quad g : \underset{p}{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ako $\exists\ p \in W \subset U \cap V$
$$f|_W = g|_W$$

Klica : klasa $\sim$

Alternativne definicije tangencijalnog prostora.

1. Klice glatkih funkcija
2. Relacija ekvivalencije na skupu glatkih krivulja na M

$$c_1 \cong c_2 \iff c_1(0) = c_2(0), \;\; \frac{d}{dt}(f \circ c_1)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ c_2)|_{t=0},$$

f je glatka realna funkcija definirana u okolini od p.

Alternativne definicije tangencijalnog prostora.

1. Klice glatkih funkcija
2. Relacija ekvivalencije na skupu glatkih krivulja na M

   $$c_1 \cong c_2 \Longleftrightarrow c_1(0) = c_2(0), \;\; \frac{d}{dt}(f \circ c_1)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ c_2)|_{t=0},$$

   f je glatka realna funkcija definirana u okolini od p.
3. Pravilo za zamjenu varijabli (promjena karte)

Tangencijalni svežanj

Motivacija: Vektorsko polje na mnogostrukosti je preslikavanje koje svakoj točki p mnogostrukosti pridružuje tangencijalni vektor iz T_pM. Što je kodomena tog preslikavanja?

Tangencijalni svežanj

Motivacija: Vektorsko polje na mnogostrukosti je preslikavanje koje svakoj točki p mnogostrukosti pridružuje tangencijalni vektor iz T_pM. Što je kodomena tog preslikavanja?

Definicija

Neka je M glatka mnogostrukost. Tangencijalni svežanj od M je disjunktna unija tangencijalnih prostora u svim točkama od M

$$TM = \coprod_{p \in M} T_pM.$$

Tangencijalni svežanj

Motivacija: Vektorsko polje na mnogostrukosti je preslikavanje koje svakoj točki p mnogostrukosti pridružuje tangencijalni vektor iz T_pM. Što je kodomena tog preslikavanja?

Definicija

Neka je M glatka mnogostrukost. Tangencijalni svežanj od M je disjunktna unija tangencijalnih prostora u svim točkama od M

$$TM = \coprod_{p \in M} T_pM.$$

Element od TM je uredjeni par (p, X), gdje je $p \in M$, $X \in T_pM$. Pišemo $(p, X) = X_p$. Prirodna projekcija je preslikavanje

$$\pi : TM \to M, \;\; \pi(p, X) = p.$$

Tangencijalni svežanj kao glatka mnogostrukost

Propozicija

Za svaku glatku mnogostrukost M, tangencijalni svežanj TM ima prirodnu topologiju i glatku strukturu kao mnogostrukost dimenzije $2n$. S tom je strukturom, prirodna projekcija $\pi : TM \to M$ glatko preslikavanje.

Dokaz

Disjunktna unija $TM = \coprod_{p \in M} T_p M$ je po definiciji skup

$$TM = \coprod_{p \in M} T_p M = \{(p, X) : p \in M, X \in T_p M\}.$$

Dokaz

Disjunktna unija $TM = \coprod_{p\in M} T_pM$ je po definiciji skup

$$TM = \coprod_{p\in M} T_pM = \{(p, X) : p \in M, X \in T_pM\}.$$

Topologija na disjunktnoj uniji definirana je na sljedeći način: podskup od TM je otvoren ako i samo ako je njegov presjek sa svakim T_pM otvoren u T_pM.

Dokaz

Disjunktna unija $TM = \coprod_{p \in M} T_pM$ je po definiciji skup

$$TM = \coprod_{p \in M} T_pM = \{(p, X) : p \in M, X \in T_pM\}.$$

Topologija na disjunktnoj uniji definirana je na sljedeći način: podskup od TM je otvoren ako i samo ako je njegov presjek sa svakim T_pM otvoren u T_pM.

To je jedinstvena topologija za koju vrijedi svojstvo: Neka je Y neki topološki prostor, $\coprod_\alpha X_\alpha$ disjunktna unija. Preslikavanje $f : \coprod_\alpha X_\alpha \to Y$ je neprekidno ako i samo ako je $f \circ i_\alpha$ neprekidno za svaki α.

$$\begin{tikzcd} \coprod X_\alpha \arrow[r, dotted] & Y \\ X_\alpha \arrow[u, hook] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Dokaz - nastavak

Neka je (U, φ) glatka karta od M, $\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$.

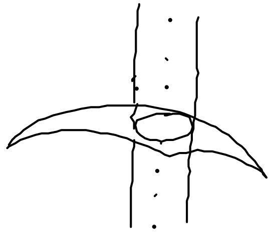
Dokaz - nastavak

Neka je (U, φ) glatka karta od M, $\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$.

Koordinatne karte na TM definiramo kao $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$, gdje je

$$\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \mathbf{R}^{2n}$$

$$\tilde{\varphi}\Big(\sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\Big) = (x^1(p), \dots, x^n(p), v^1, \dots, v^n).$$



Dokaz - nastavak

Neka je (U, φ) glatka karta od M, $\varphi(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p))$.

Koordinatne karte na TM definiramo kao $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$, gdje je

$$\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \mathbf{R}^{2n}$$

$$\tilde{\varphi}(\sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p), v^1, \ldots, v^n).$$

Slika preslikavanja $\tilde{\varphi}$ je skup $\varphi(U) \times \mathbf{R}^n$, koji je otvoren podskup od $\mathbf{R}^{2n}$.

Dokaz - nastavak

Neka je (U, φ) glatka karta od M, $\varphi(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p))$.

Koordinatne karte na TM definiramo kao $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$, gdje je

$$\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \mathbf{R}^{2n}$$

$$\tilde{\varphi}(\sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p), v^1, \ldots, v^n).$$

Slika preslikavanja $\tilde{\varphi}$ je skup $\varphi(U) \times \mathbf{R}^n$, koji je otvoren podskup od $\mathbf{R}^{2n}$.

Preslikavanje $\tilde{\varphi}$ je bijekcija na svoju sliku, njegov inverz je

$$\tilde{\varphi}^{-1}(x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n) = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_{\varphi^{-1}(x)}.$$

$x = (x^1, \ldots, x^n)$

Dokaz - nastavak

Funkcije prijelaza iz karte u kartu:
Neka su (U, φ) i (V, ψ) dvije glatke karte za M, $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$, $(\pi^{-1}(V), \tilde{\psi})$ odgovarajuće karte od TM.

Dokaz - nastavak

Funkcije prijelaza iz karte u kartu:
Neka su (U, φ) i (V, ψ) dvije glatke karte za M, $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$, $(\pi^{-1}(V), \tilde{\psi})$ odgovarajuće karte od TM.

Skupovi $\tilde{\varphi}(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \varphi(U \cap V) \times \mathbf{R}^n$ i $\tilde{\psi}(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \psi(U \cap V) \times \mathbf{R}^n$ su otvoreni u $\mathbf{R}^{2n}$.

Dokaz - nastavak

Funkcije prijelaza iz karte u kartu:
Neka su (U, φ) i (V, ψ) dvije glatke karte za M, $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$, $(\pi^{-1}(V), \tilde{\psi})$ odgovarajuće karte od TM.

Skupovi $\tilde{\varphi}(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \varphi(U \cap V) \times \mathbf{R}^n$ i $\tilde{\psi}(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \psi(U \cap V) \times \mathbf{R}^n$ su otvoreni u $\mathbf{R}^{2n}$.

Funkcija prijelaza (zamjena varijabli!)

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} : \varphi(U \cap V) \times \mathbf{R}^n \to \psi(U \cap V) \times \mathbf{R}^n$$

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n) = \left(\tilde{x}^1(x), \ldots, \tilde{x}^n(x), \sum_j \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^j}(x) v^j, \ldots, \sum_j \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^j}(x) v^j \right)$$

je glatko preslikavanje.

Dokaz - nastavak

Prisjetimo se Propozicije o konstrukciji glatkih mnogostrukosti:

Dokaz - nastavak

Prisjetimo se Propozicije o konstrukciji glatkih mnogostrukosti:

Neka je M skup i neka je dana familija (U_α) podskupova od M i injekcija $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbf{R}^n$ za svaki α tako da vrijedi

Dokaz - nastavak

Prisjetimo se Propozicije o konstrukciji glatkih mnogostrukosti:

Neka je M skup i neka je dana familija (U_α) podskupova od M i injekcija $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbf{R}^n$ za svaki α tako da vrijedi

1. Za svaki α, $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ je otvoren podskup od $\mathbf{R}^n$,

Dokaz - nastavak

Prisjetimo se Propozicije o konstrukciji glatkih mnogostrukosti:

Neka je M skup i neka je dana familija (U_α) podskupova od M i injekcija $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbf{R}^n$ za svaki α tako da vrijedi

1. Za svaki α, $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ je otvoren podskup od $\mathbf{R}^n$,
2. Za svaki α i β, $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ i $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ su otvoreni u $\mathbf{R}^n$,

Dokaz - nastavak

Prisjetimo se Propozicije o konstrukciji glatkih mnogostrukosti:

Neka je M skup i neka je dana familija (U_α) podskupova od M i injekcija $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbf{R}^n$ za svaki α tako da vrijedi

1. Za svaki α, $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ je otvoren podskup od $\mathbf{R}^n$,
2. Za svaki α i β, $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ i $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ su otvoreni u $\mathbf{R}^n$,
3. Za $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ je difeomorfizam,

Dokaz - nastavak

Prisjetimo se Propozicije o konstrukciji glatkih mnogostrukosti:

Neka je M skup i neka je dana familija (U_α) podskupova od M i injekcija $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbf{R}^n$ za svaki α tako da vrijedi

1. Za svaki α, $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ je otvoren podskup od $\mathbf{R}^n$,
2. Za svaki α i β, $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ i $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ su otvoreni u $\mathbf{R}^n$,
3. Za $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ je difeomorfizam,
4. Prebrojivo mnogo skupova U_α pokrivaju M,

Dokaz - nastavak

Prisjetimo se Propozicije o konstrukciji glatkih mnogostrukosti:

Neka je M skup i neka je dana familija (U_α) podskupova od M i injekcija $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbf{R}^n$ za svaki α tako da vrijedi

1. Za svaki α, $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ je otvoren podskup od $\mathbf{R}^n$,
2. Za svaki α i β, $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ i $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ su otvoreni u $\mathbf{R}^n$,
3. Za $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ je difeomorfizam,
4. Prebrojivo mnogo skupova U_α pokrivaju M,
5. Za različite točke $p, q \in M$ postoji neki U_α koji ih obje sadrži ili postoje disjunktni U_α, U_β takvi da je $p \in U_\alpha$, $q \in U_\beta$.

Dokaz - nastavak

Prisjetimo se Propozicije o konstrukciji glatkih mnogostrukosti:

Neka je M skup i neka je dana familija (U_α) podskupova od M i injekcija $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbf{R}^n$ za svaki α tako da vrijedi

1. Za svaki α, $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ je otvoren podskup od $\mathbf{R}^n$,
2. Za svaki α i β, $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ i $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ su otvoreni u $\mathbf{R}^n$,
3. Za $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ je difeomorfizam,
4. Prebrojivo mnogo skupova U_α pokrivaju M,
5. Za različite točke $p, q \in M$ postoji neki U_α koji ih obje sadrži ili postoje disjunktni U_α, U_β takvi da je $p \in U_\alpha$, $q \in U_\beta$.

Tada M ima jedinstvenu strukturu glatke mnogostrukosti takve da je svaki $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ glatka karta.

Dokaz - nastavak

U našem slučaju, prebrojivi pokrivač $\{U_i\}$ od M daje prebrojivi pokrivač $\{\pi^{-1}(U_i)\}$ od TM koji zadovoljava uvjete 1°–4° Propozicije o konstrukciji mnogostrukosti.

Dokaz - nastavak

U našem slučaju, prebrojivi pokrivač $\{U_i\}$ od M daje prebrojivi pokrivač $\{\pi^{-1}(U_i)\}$ od TM koji zadovoljava uvjete 1°–4° Propozicije o konstrukciji mnogostrukosti.

Uvjet 5° – Hausdorffov uvjet:

Dokaz - nastavak

U našem slučaju, prebrojivi pokrivač $\{U_i\}$ od M daje prebrojivi pokrivač $\{\pi^{-1}(U_i)\}$ od TM koji zadovoljava uvjete 1°–4° Propozicije o konstrukciji mnogostrukosti.

Uvjet 5° – Hausdorffov uvjet:

1. svake dvije točke iz istog vlakna leže u istoj koordinatnoj domeni;

Dokaz - nastavak

U našem slučaju, prebrojivi pokrivač $\{U_i\}$ od M daje prebrojivi pokrivač $\{\pi^{-1}(U_i)\}$ od TM koji zadovoljava uvjete 1°–4° Propozicije o konstrukciji mnogostrukosti.

Uvjet 5° – Hausdorffov uvjet:

1. svake dvije točke iz istog vlakna leže u istoj koordinatnoj domeni;
2. ako točke nisu iz istog vlakna, tada postoje disjunktne koordinatne domene U, V ua M, $p \in U$, $q \in V$. Tada su i skupovi $\pi^{-1}(U)$, $\pi^{-1}(V)$ disjunktne koordinatne domene za (p, X), (q, Y).

Dokaz - nastavak

Preslikavanje π je glatko: koordinatni prikaz s obzirom na karte (U, φ) od M i $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$ od TM je

$$\hat{\pi}(x, v) = x, \quad x = \varphi(p).$$

$\square$

Dokaz - nastavak

Preslikavanje π je glatko: koordinatni prikaz s obzirom na karte (U, φ) od M i $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$ od TM je

$$\hat{\pi}(x, v) = x, \;\; x = \varphi(p).$$

$\square$

Koordinate (x^i, v^i) za tangencijalni svežanj nazivaju se *standardne koordinate*.

Dokaz - nastavak

Preslikavanje π je glatko: koordinatni prikaz s obzirom na karte (U, φ) od M i $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$ od TM je

$$\hat{\pi}(x, v) = x, \quad x = \varphi(p).$$

$\square$

Koordinate (x^i, v^i) za tangencijalni svežanj nazivaju se *standardne koordinate*.

Primjer 1. Tangencijalni svežanj $T\mathbf{R}^n$ je difeomorfan s $\mathbf{R}^{2n}$.

Tangencijalni svežanj kao glatki vektorski svežanj

Definicija

Neka je M glatka mnogostrukost. (Glatki) vektorski svežanj ranga k nad M je glatka mnogostrukost E zajedno s glatkim surjektivnim preslikavanjem $\pi : E \to M$ koje zadovoljava:

Tangencijalni svežanj kao glatki vektorski svežanj

Definicija

Neka je M glatka mnogostrukost. (Glatki) vektorski svežanj ranga k nad M je glatka mnogostrukost E zajedno s glatkim surjektivnim preslikavanjem $\pi : E \to M$ koje zadovoljava:

(i) *za svaki $p \in M$ skup $E_p = \pi^{-1}(p) \subset E$ (tzv. vlakno nad p) je snabdjeven strukturom realnog vektorskog prostora;*

Tangencijalni svežanj kao glatki vektorski svežanj

Definicija

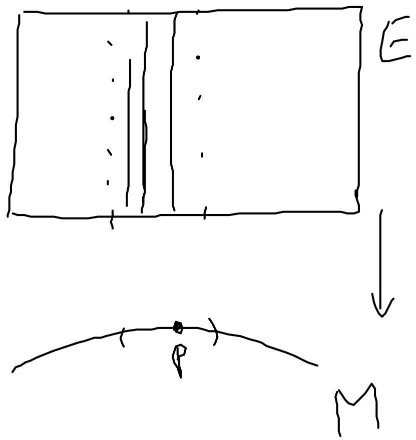
Neka je M glatka mnogostrukost. (Glatki) vektorski svežanj ranga k nad M je glatka mnogostrukost E zajedno s glatkim surjektivnim preslikavanjem $\pi : E \to M$ koje zadovoljava:

(i) *za svaki $p \in M$ skup $E_p = \pi^{-1}(p) \subset E$ (tzv. vlakno nad p) je snabdjeven strukturom realnog vektorskog prostora;* dimenzije k

(ii) *za svaki $p \in M$ postoji okolina U od p u M i difeomorfizam $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbf{R}^k$ tako da komutira sljedeći dijagram (π_1 je projekcija na prvi faktor):*

$$
\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times \mathbf{R}^k \arrow[dl, "\pi_1"] \\
U &
\end{tikzcd}
$$

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times \mathbf{R}^k \arrow[dl, "\pi_1"] \\
U &
\end{tikzcd}$$



i restrikcija od Φ *na* E_p *je linearni izomorfizam sa* $E_p \to \{p\} \times \mathbf{R}^k \cong \mathbf{R}^k$.

Tangencijalni svežanj kao glatki vektorski svežanj

Mnogostrukost E se naziva *totalnim* ili *ukupnim* prostorom, mnogostrukost M *bazom*, a preslikavanje π *projekcijom*. Svako preslikavanje Φ se naziva *lokalnom trivijalizacijom* od E nad U.

Tangencijalni svežanj kao glatki vektorski svežanj

Mnogostrukost E se naziva *totalnim* ili *ukupnim* prostorom, mnogostrukost M *bazom*, a preslikavanje π *projekcijom*. Svako preslikavanje Φ se naziva *lokalnom trivijalizacijom* od E nad U.

Ako postoji lokalna trivijalizacija nad cijelom mnogostrukošću M, tada se ona naziva *globalnom trivijalizacijom*, a E *trivijalnim svežnjem*.

Tangencijalni svežanj kao glatki vektorski svežanj

Mnogostrukost E se naziva *totalnim* ili *ukupnim* prostorom, mnogostrukost M *bazom*, a preslikavanje π *projekcijom*. Svako preslikavanje Φ se naziva *lokalnom trivijalizacijom* od E nad U.

Ako postoji lokalna trivijalizacija nad cijelom mnogostrukošću M, tada se ona naziva *globalnom trivijalizacijom*, a E *trivijalnim svežnjem*.

Primjer 1. Produktna mnogostrukost $E = M \times \mathbf{R}^k$, $\pi = \pi_1 : M \times \mathbf{R}^k \to M$. Taj je svežanj očito trivijalan, globalna trivijalizacija je identiteta.

Tangencijalni svežanj kao glatki vektorski svežanj

Mnogostrukost E se naziva *totalnim* ili *ukupnim* prostorom, mnogostrukost M *bazom*, a preslikavanje π *projekcijom*. Svako preslikavanje Φ se naziva *lokalnom trivijalizacijom* od E nad U.

Ako postoji lokalna trivijalizacija nad cijelom mnogostrukošću M, tada se ona naziva *globalnom trivijalizacijom*, a E *trivijalnim svežnjem*.

Primjer 1. Produktna mnogostrukost $E = M \times \mathbf{R}^k$, $\pi = \pi_1 : M \times \mathbf{R}^k \to M$. Taj je svežanj očito trivijalan, globalna trivijalizacija je identiteta.

Primjer 2. (Lokalnost) Ako je $U \subset M$ otvoren skup, tada je podskup $E|_U = \pi^{-1}(U)$ opet vektorski svežanj. Njegova projekcija je restrikcija projekcije π na U.

Tangencijalni svežanj kao glatki vektorski svežanj

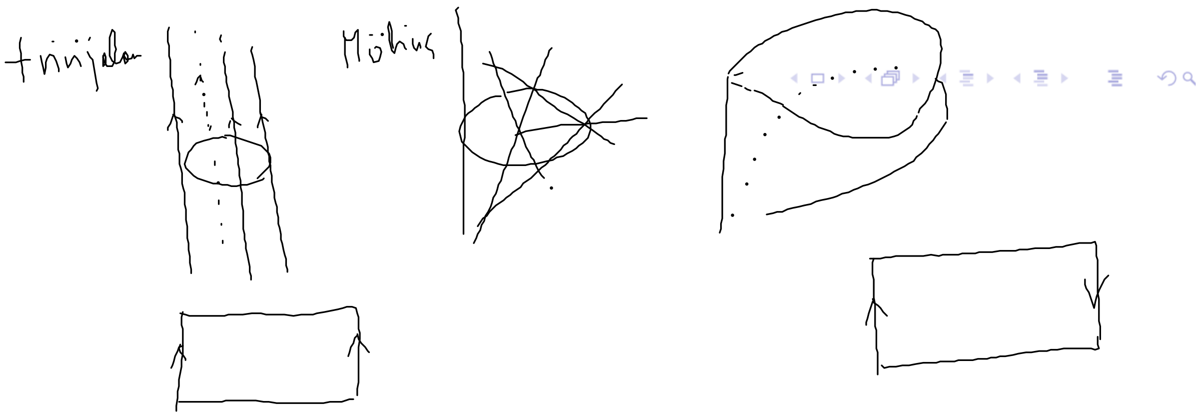
Mnogostrukost E se naziva *totalnim* ili *ukupnim* prostorom, mnogostrukost M *bazom*, a preslikavanje π *projekcijom*. Svako preslikavanje Φ se naziva *lokalnom trivijalizacijom* od E nad U.

Ako postoji lokalna trivijalizacija nad cijelom mnogostrukošću M, tada se ona naziva *globalnom trivijalizacijom*, a E *trivijalnim svežnjem*.

Primjer 1. Produktna mnogostrukost $E = M \times \mathbf{R}^k$, $\pi = \pi_1 : M \times \mathbf{R}^k \to M$. Taj je svežanj očito trivijalan, globalna trivijalizacija je identiteta.

Primjer 2. (Lokalnost) Ako je $U \subset M$ otvoren skup, tada je podskup $E|_U = \pi^{-1}(U)$ opet vektorski svežanj. Njegova projekcija je restrikcija projekcije π na U.

Primjer 3. Möbiusov svežanj – glatki linijski svežanj nad S^1 (slika)



Tangencijalni svežanj kao glatki vektorski svežanj

Propozicija

Tangencijalni svežanj TM glatke mnogostrukosti M je glatki vektorski svežanj ranga n.

Tangencijalni svežanj kao glatki vektorski svežanj

Propozicija

Tangencijalni svežanj TM glatke mnogostrukosti M je glatki vektorski svežanj ranga n.

Dokaz. Uvjet (i) je očito ispunjen.

Tangencijalni svežanj kao glatki vektorski svežanj

Propozicija

Tangencijalni svežanj TM glatke mnogostrukosti M je glatki vektorski svežanj ranga n.

Dokaz. Uvjet (i) je očito ispunjen.

U uvjetu (ii) kao okoline točke p koje su domene lokalne trivijalizacije uzimamo domene koordinatnih karata, a preslikavanja Φ kao koordinatna preslikavanja

$$\Phi(v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p) = (p, (v^1, \ldots, v^n)).$$

Tangencijalni svežanj kao glatki vektorski svežanj

Propozicija

Tangencijalni svežanj TM glatke mnogostrukosti M je glatki vektorski svežanj ranga n.

Dokaz. Uvjet (i) je očito ispunjen.

U uvjetu (ii) kao okoline točke p koje su domene lokalne trivijalizacije uzimamo domene koordinatnih karata, a preslikavanja Φ kao koordinatna preslikavanja

$$\Phi(v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p) = (p, (v^1, \dots, v^n)).$$

Preslikavanje Φ je glatko, linearno na vlaknima, i zadovoljava $\pi_1 \circ \Phi = \pi$. $\square$