Glatke i Riemannove mnogostrukosti

Željka Milin-Šipuš, Pavle Pandžić i Juraj Šiftar

Geometrija i topologija, drugi dio

Particija jedinice

Definicija

Neka je $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *otvoren pokrivač glatke mnogostrukosti* M.

Particija jedinice

Definicija

Neka je $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *otvoren pokrivač glatke mnogostrukosti* M.

(Glatka) Particija jedinice podredjena pokrivaču $\mathcal{U}$ *je familija* **glatkih funkcija** $\{\varphi_\alpha : M \to \mathbf{R}\}_{\alpha \in A}$ *koja ima sljedeća svojstva:*

Particija jedinice

Definicija

Neka je $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *otvoren pokrivač glatke mnogostrukosti* M*.*

(Glatka) Particija jedinice podredjena pokrivaču $\mathcal{U}$ *je familija* **glatkih funkcija** $\{\varphi_\alpha : M \to \mathbf{R}\}_{\alpha \in A}$ *koja ima sljedeća svojstva:*

1. $0 \leq \varphi_\alpha(x) \leq 1$, $\alpha \in A$, $x \in M$,

Particija jedinice

Definicija

Neka je $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *otvoren pokrivač glatke mnogostrukosti* M.

(Glatka) Particija jedinice podredjena pokrivaču $\mathcal{U}$ *je familija* **glatkih funkcija** $\{\varphi_\alpha : M \to \mathbf{R}\}_{\alpha \in A}$ *koja ima sljedeća svojstva:*

1. $0 \leq \varphi_\alpha(x) \leq 1$, $\alpha \in A$, $x \in M$,
2. $\operatorname{supp} \varphi_\alpha \subset U_\alpha$,

Particija jedinice

Definicija

Neka je $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *otvoren pokrivač glatke mnogostrukosti* M.

(Glatka) Particija jedinice podredjena pokrivaču $\mathcal{U}$ *je familija* **glatkih funkcija** $\{\varphi_\alpha : M \to \mathbf{R}\}_{\alpha \in A}$ *koja ima sljedeća svojstva:*

1. $0 \leq \varphi_\alpha(x) \leq 1$, $\alpha \in A$, $x \in M$,
2. $\operatorname{supp} \varphi_\alpha \subset U_\alpha$,
3. *familija nosača* $\{\operatorname{supp} \varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *je lokalno konačna,*

Particija jedinice

Definicija

Neka je $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *otvoren pokrivač glatke mnogostrukosti* M.

(Glatka) Particija jedinice podredjena pokrivaču $\mathcal{U}$ *je familija* **glatkih funkcija** $\{\varphi_\alpha : M \to \mathbf{R}\}_{\alpha \in A}$ *koja ima sljedeća svojstva:*

1. $0 \leq \varphi_\alpha(x) \leq 1$, $\alpha \in A$, $x \in M$,
2. $\mathrm{supp}\ \varphi_\alpha \subset U_\alpha$,
3. *familija nosača* $\{\mathrm{supp}\ \varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *je lokalno konačna,*
4. $\sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(x) = 1$, $x \in M$.

Particija jedinice

Definicija

Neka je $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *otvoren pokrivač glatke mnogostrukosti* M.

(Glatka) Particija jedinice podredjena pokrivaču $\mathcal{U}$ *je familija* **glatkih funkcija** $\{\varphi_\alpha : M \to \mathbf{R}\}_{\alpha \in A}$ *koja ima sljedeća svojstva:*

1. $0 \leq \varphi_\alpha(x) \leq 1$, $\alpha \in A$, $x \in M$,
2. $\mathrm{supp}\ \varphi_\alpha \subset U_\alpha$,
3. *familija nosača* $\{\mathrm{supp}\ \varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *je lokalno konačna,*
4. $\sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(x) = 1$, $x \in M$.

Teorem (Egzistencija glatke particije jedinice)

Ako je M *glatka mnogostrukost i* $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *otvoren pokrivač od* M*, tada postoji (glatka) particija jedinice podredjena pokrivaču* $\mathcal{X}$.

Teorem (Egzistencija glatke "bump" funkcije)

Neka je M glatka mnogostrukost.

Teorem (Egzistencija glatke "bump" funkcije)

Neka je M glatka mnogostrukost.

Tada za svaki zatvoren skup $A \subset M$ i otvoren skup U koji sadrži A postoji glatka "bump" funkcija za A s nosačem u U, tj. glatka funkcija za koju vrijedi

$$\varphi : M \to \mathbf{R}, \ \ 0 \leq \varphi \leq 1 \ \text{na} \ M, \ \ \varphi \equiv 1 \ \text{na} \ A, \ \ \operatorname{supp} \varphi \subset U.$$

Teorem (Egzistencija glatke "bump"funkcije)

Neka je M glatka mnogostrukost.

Tada za svaki zatvoren skup $A \subset M$ i otvoren skup U koji sadrži A postoji glatka "bump"funkcija za A s nosačem u U, tj. glatka funkcija za koju vrijedi

$$\varphi : M \to \mathbf{R},\ \ 0 \leq \varphi \leq 1 \text{ na } M,\ \ \varphi \equiv 1 \text{ na } A,\ \ \operatorname{supp} \varphi \subset U.$$

Dokaz. Neka je $U_0 = U$, $U_1 = M \setminus A$ i neka je $\{\varphi_0, \varphi_1\}$ (glatka) particija jedinice podredjena pokrivaču $\{U_0, U_1\}$.

Teorem (Egzistencija glatke "bump"funkcije)

Neka je M glatka mnogostrukost.

Tada za svaki zatvoren skup $A \subset M$ i otvoren skup U koji sadrži A postoji glatka "bump"funkcija za A s nosačem u U, tj. glatka funkcija za koju vrijedi

$$\varphi : M \to \mathbf{R}, \ \ 0 \leq \varphi \leq 1 \ \text{ na } \ M, \ \ \varphi \equiv 1 \ \text{ na } \ A, \ \ \operatorname{supp} \varphi \subset U.$$

Dokaz. Neka je $U_0 = U$, $U_1 = M \setminus A$ i neka je $\{\varphi_0, \varphi_1\}$ (glatka) particija jedinice podredjena pokrivaču $\{U_0, U_1\}$.

Tada je $\varphi_1 \equiv 0$ na A, $\varphi_0 = \sum_i \varphi_i = 1$ na A.

Teorem (Egzistencija glatke "bump" funkcije)

Neka je M glatka mnogostrukost.

Tada za svaki zatvoren skup $A \subset M$ i otvoren skup U koji sadrži A postoji glatka "bump" funkcija za A s nosačem u U, tj. glatka funkcija za koju vrijedi

$$\varphi : M \to \mathbf{R}, \;\; 0 \le \varphi \le 1 \text{ na } M, \;\; \varphi \equiv 1 \text{ na } A, \;\; \operatorname{supp}\varphi \subset U.$$

Dokaz. Neka je $U_0 = U$, $U_1 = M \setminus A$ i neka je $\{\varphi_0, \varphi_1\}$ (glatka) particija jedinice podredjena pokrivaču $\{U_0, U_1\}$.

Tada je $\varphi_1 \equiv 0$ na A, $\varphi_0 = \sum_i \varphi_i = 1$ na A.

Prema tome, tražena funkcija je φ_0. $\square$

Teorem (Lema o proširenju)

Neka je M *glatka mnogostrukost,* $A \subset M$ *zatvoren podskup,* $f : A \to \mathbf{R}^k$ *glatka funkcija.*

Teorem (Lema o proširenju)

Neka je M glatka mnogostrukost, $A \subset M$ zatvoren podskup, $f : A \to \mathbf{R}^k$ glatka funkcija.

Tada za svaki otvoren skup U koji sadrži A postoji glatka funkcija $\tilde{f} : M \to \mathbf{R}^k$ za koju vrijedi $\tilde{f}|_A = f$, $\operatorname{supp} \tilde{f} \subset U$.

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

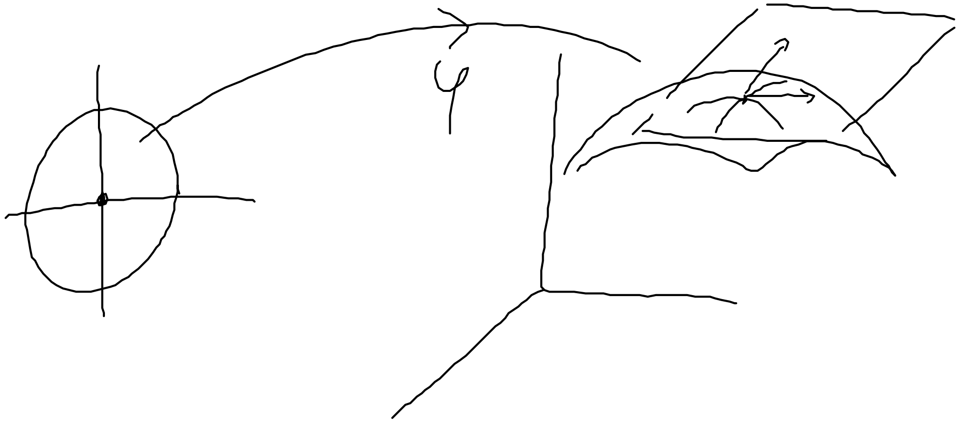
Prisjetimo se: za parametriziranu krivulju $\gamma : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}^n$, tangenta u točki $\gamma(t_0)$ je pravac kroz $\gamma(t_0)$ u smjeru vektora $\gamma'(t_0)$. $(\neq 0)$

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Prisjetimo se: za parametriziranu krivulju $\gamma : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$, tangenta u točki $\gamma(t_0)$ je pravac kroz $\gamma(t_0)$ u smjeru vektora $\gamma'(t_0)$.

Za parametriziranu plohu $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$, $U \subset \mathbb{R}^2$ otvoren, tangencijalna ravnina u točki $\varphi(x_0, y_0)$ je ravnina kroz $\varphi(x_0, y_0)$ određena vektorima $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)$ i $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)$.

(uvjet: φ maks. ranga 2 — vektori su lin. nezavisni)



Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Prisjetimo se: za parametriziranu krivulju $\gamma : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$, tangenta u točki $\gamma(t_0)$ je pravac kroz $\gamma(t_0)$ u smjeru vektora $\gamma'(t_0)$.

Za parametriziranu plohu $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$, $U \subset \mathbb{R}^2$ otvoren, tangencijalna ravnina u točki $\varphi(x_0, y_0)$ je ravnina kroz $\varphi(x_0, y_0)$ odredjena vektorima $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0, y_0)$ i $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Uočimo da je vektor $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0, y_0)$ tangencijalan na krivulju $x \mapsto \varphi(x, y_0)$, koja prolazi kroz (x_0, y_0) za $x = x_0$, i koja je sadržana u plohi.

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Prisjetimo se: za parametriziranu krivulju $\gamma : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$, tangenta u točki $\gamma(t_0)$ je pravac kroz $\gamma(t_0)$ u smjeru vektora $\gamma'(t_0)$.

Za parametriziranu plohu $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$, $U \subset \mathbb{R}^2$ otvoren, tangencijalna ravnina u točki $\varphi(x_0, y_0)$ je ravnina kroz $\varphi(x_0, y_0)$ odredjena vektorima $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0, y_0)$ i $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Uočimo da je vektor $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0, y_0)$ tangencijalan na krivulju $x \mapsto \varphi(x, y_0)$, koja prolazi kroz (x_0, y_0) za $x = x_0$, i koja je sadržana u plohi.

Analogno, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0, y_0)$ je tangencijalan na krivulju $y \mapsto \varphi(x_0, y)$, koja prolazi kroz (x_0, y_0) za $y = y_0$, i koja je sadržana u plohi. Svaki je vektor u tangencijalnoj ravnini tangencijalan na neku krivulju u plohi.

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Za plohu u $\mathbb{R}^3$ zadanu implicitno sa $F(x, y, z) = 0$, $\operatorname{grad} F \neq 0$, tangencijalna ravnina kroz (x_0, y_0, z_0) zadana je vektorom normale $N = \operatorname{grad} F(x_0, y_0, z_0)$.

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Za plohu u $\mathbb{R}^3$ zadanu implicitno sa $F(x, y, z) = 0$, $\operatorname{grad} F \neq 0$, tangencijalna ravnina kroz (x_0, y_0, z_0) zadana je vektorom normale $N = \operatorname{grad} F(x_0, y_0, z_0)$.

To se vidi pomoću identifikacije tangencijalne ravnine kao ravnine koja sadrži sve vektore koji su tangencijalni na neku krivulju u plohi.

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Za plohu u $\mathbb{R}^3$ zadanu implicitno sa $F(x, y, z) = 0$, $\operatorname{grad} F \neq 0$, tangencijalna ravnina kroz (x_0, y_0, z_0) zadana je vektorom normale $N = \operatorname{grad} F(x_0, y_0, z_0)$.

To se vidi pomoću identifikacije tangencijalne ravnine kao ravnine koja sadrži sve vektore koji su tangencijalni na neku krivulju u plohi.

Naime, ako je $t \mapsto \gamma(t)$ neka krivulja u plohi, i ako je $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$, tada deriviranjem jednadžbe $F(\gamma(t)) = 0$ po t u t_0 dobivamo

$$(\operatorname{grad} F(x_0, y_0, z_0) \,|\, \gamma'(t_0)) = 0.$$

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Za plohu u $\mathbb{R}^3$ zadanu implicitno sa $F(x, y, z) = 0$, $\operatorname{grad} F \neq 0$, tangencijalna ravnina kroz (x_0, y_0, z_0) zadana je vektorom normale $N = \operatorname{grad} F(x_0, y_0, z_0)$.

To se vidi pomoću identifikacije tangencijalne ravnine kao ravnine koja sadrži sve vektore koji su tangencijalni na neku krivulju u plohi.

Naime, ako je $t \mapsto \gamma(t)$ neka krivulja u plohi, i ako je $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$, tada deriviranjem jednadžbe $F(\gamma(t)) = 0$ po t u t_0 dobivamo

$$(\operatorname{grad} F(x_0, y_0, z_0) \,|\, \gamma'(t_0)) = 0.$$

U svim ovim primjerima koristimo ambijentni prostor u kojem je promatrana mnogostrukost zadana. Za općenite mnogostrukosti trebamo definiciju koja se ne poziva na ambijentni prostor.

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Počinjemo od osnovnog primjera mnogostrukosti, $\mathbb{R}^n$.

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Počinjemo od osnovnog primjera mnogostrukosti, $\mathbb{R}^n$.

Geometrijski tangencijalni prostor od $\mathbf{R}^n$ u točki p je definiran kao

$$\mathbf{R}^n_p = \{p\} \times \mathbf{R}^n = \{(p, v) : v \in \mathbf{R}^n\}.$$

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Počinjemo od osnovnog primjera mnogostrukosti, $\mathbb{R}^n$.

Geometrijski tangencijalni prostor od $\mathbf{R}^n$ u točki p je definiran kao

$$\mathbf{R}^n_p = \{p\} \times \mathbf{R}^n = \{(p, v) : v \in \mathbf{R}^n\}.$$

Uz prirodno definirane operacije zbrajanja i množenja vektora skalarom iz $\mathbf{R}$, skup $\mathbf{R}^n_p$ postaje n-dimenzionalni vektorski prostor.

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Neka je $v_p \in \mathbf{R}^n_p$. Definiramo preslikavanje $\tilde{v}_p : C^\infty(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$ kao usmjerenu derivaciju funkcije f u smjeru vektora v u p

$$\tilde{v}_p f = D_v f(p) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(p + tv).$$

$$\left(= Df(p)v \right)$$

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Preslikavanje $\tilde{v}_p$ je linearno i zadovoljava

$$\tilde{v}_p(fg) = f(p)\tilde{v}_p(g) + g(p)\tilde{v}_p(f).$$

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Preslikavanje $\tilde{v}_p$ je linearno i zadovoljava

$$\tilde{v}_p(fg) = f(p)\tilde{v}_p(g) + g(p)\tilde{v}_p(f).$$

Izrazimo ga u standardnoj bazi $(e_i|_p)$ za $\mathbf{R}^n_p$.

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Preslikavanje $\tilde{v}_p$ je linearno i zadovoljava

$$\tilde{v}_p(fg) = f(p)\tilde{v}_p(g) + g(p)\tilde{v}_p(f).$$

Izrazimo ga u standardnoj bazi $(e_i|_p)$ za $\mathbf{R}^n_p$.

Neka je $v_p = \sum_i v^i e_i|_p$, tada je

$$\tilde{v}_p f = \sum_i v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x^n}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix}$$

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Definicija

Linearno preslikavanje $X : C^\infty(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$ *naziva se derivacijom u* p *ako vrijedi*

$$X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf, \quad f, g \in C^\infty(\mathbf{R}^n).$$

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Definicija

Linearno preslikavanje $X : C^{\infty}(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$ *naziva se derivacijom u* p *ako vrijedi*

$$X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf, \quad f, g \in C^{\infty}(\mathbf{R}^n).$$

Neka je $T_p(\mathbf{R}^n)$ skup svih derivacija u p.

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Definicija

Linearno preslikavanje $X : C^{\infty}(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$ *naziva se derivacijom u* p *ako vrijedi*

$$X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf, \quad f, g \in C^{\infty}(\mathbf{R}^n).$$

Neka je $T_p(\mathbf{R}^n)$ skup svih derivacija u p.

Uz uobičajene operacije, $T_p(\mathbf{R}^n)$ je vektorski prostor.

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Definicija

Linearno preslikavanje $X : C^\infty(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$ *naziva se derivacijom u* p *ako vrijedi*

$$X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf, \;\; f, g \in C^\infty(\mathbf{R}^n).$$

Neka je $T_p(\mathbf{R}^n)$ skup svih derivacija u p.

Uz uobičajene operacije, $T_p(\mathbf{R}^n)$ je vektorski prostor.

Najvažnije (a i iznenadjujuće) svojstvo prostora $T_p(\mathbf{R}^n)$ je da je konačnodimenzionalan, te da vrijedi:

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Propozicija

Za svaki $p \in \mathbf{R}^n$ *preslikavanje* $v_p \mapsto \tilde{v}_p$ *je izomorfizam vektorskih prostora* $\mathbf{R}^n_p$ *i* $T_p(\mathbf{R}^n)$.

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Propozicija

Za svaki $p \in \mathbf{R}^n$ preslikavanje $v_p \mapsto \tilde{v}_p$ je izomorfizam vektorskih prostora $\mathbf{R}^n_p$ i $T_p(\mathbf{R}^n)$.

Za dokaz su potrebne dvije leme:

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Propozicija

Za svaki $p \in \mathbf{R}^n$ preslikavanje $v_p \mapsto \tilde{v}_p$ je izomorfizam vektorskih prostora $\mathbf{R}^n_p$ i $T_p(\mathbf{R}^n)$.

Za dokaz su potrebne dvije leme:

Lema (Svojstva derivacije)

Neka je $p \in \mathbf{R}^n$, $X \in T_p(\mathbf{R}^n)$.

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Propozicija

Za svaki $p \in \mathbf{R}^n$ preslikavanje $v_p \mapsto \tilde{v}_p$ je izomorfizam vektorskih prostora $\mathbf{R}^n_p$ i $T_p(\mathbf{R}^n)$.

Za dokaz su potrebne dvije leme:

Lema (Svojstva derivacije)

Neka je $p \in \mathbf{R}^n$, $X \in T_p(\mathbf{R}^n)$.

1. *Ako je f konstantna funkcija, tada je $Xf = 0$.*

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Propozicija

Za svaki $p \in \mathbf{R}^n$ *preslikavanje* $v_p \mapsto \tilde{v}_p$ *je izomorfizam vektorskih prostora* $\mathbf{R}^n_p$ *i* $T_p(\mathbf{R}^n)$.

Za dokaz su potrebne dvije leme:

Lema (Svojstva derivacije)

Neka je $p \in \mathbf{R}^n$, $X \in T_p(\mathbf{R}^n)$.

1. *Ako je* f *konstantna funkcija, tada je* $Xf = 0$.
2. *Ako je* $f(p) = g(p) = 0$, *tada je* $X(fg) = 0$.

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Dokaz.

1. Dovoljno je dokazati tvrdnju za $f_1(x) \equiv 1$ (jer za $f(x) \equiv c$ imamo po linearnosti $Xf = X(cf_1) = cX(f_1) = 0$).

Dokaz.

1. Dovoljno je dokazati tvrdnju za $f_1(x) \equiv 1$ (jer za $f(x) \equiv c$ imamo po linearnosti $Xf = X(cf_1) = cX(f_1) = 0$).

   Za f_1 vrijedi

   $$X(f_1) = X(f_1 f_1) = f_1(p)X(f_1) + f_1(p)X(f_1) = 2X(f_1)$$

   što povlači $X(f_1) = 0$.

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Dokaz.

1. Dovoljno je dokazati tvrdnju za $f_1(x) \equiv 1$ (jer za $f(x) \equiv c$ imamo po linearnosti $Xf = X(cf_1) = cX(f_1) = 0$).

   Za f_1 vrijedi

   $$X(f_1) = X(f_1 f_1) = f_1(p)X(f_1) + f_1(p)X(f_1) = 2X(f_1)$$

   što povlači $X(f_1) = 0$.

2. $X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf = 0 + 0.$

$\square$

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Lema (Taylorova formula prvog stupnja s ostatkom)

Neka je $U \subset \mathbf{R}^n$ *konveksan, otvoren skup,* $p \in U$*.*

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Lema (Taylorova formula prvog stupnja s ostatkom)

Neka je $U \subset \mathbf{R}^n$ *konveksan, otvoren skup,* $p \in U$.

Neka je $f \in C^k(U)$, $1 \leq k \leq \infty$.

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Lema (Taylorova formula prvog stupnja s ostatkom)

Neka je $U \subset \mathbf{R}^n$ *konveksan, otvoren skup,* $p \in U$.

Neka je $f \in C^k(U)$, $1 \leq k \leq \infty$.

Tada za svaki $x \in U$ *vrijedi*

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)(x^i - p^i) + \sum_{i=1}^{n} g_i(x)(x^i - p^i),$$

gdje su $g_1, \ldots, g_n \in C^{k-1}(U)$ *funkcije za koje vrijedi* $g_i(p) = 0$.

Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Lema (Taylorova formula prvog stupnja s ostatkom)

Neka je $U \subset \mathbf{R}^n$ *konveksan, otvoren skup,* $p \in U$.

Neka je $f \in C^k(U)$, $1 \leq k \leq \infty$.

Tada za svaki $x \in U$ *vrijedi*

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)(x^i - p^i) + \sum_{i=1}^{n} g_i(x)(x^i - p^i),$$

gdje su $g_1, \ldots, g_n \in C^{k-1}(U)$ *funkcije za koje vrijedi* $g_i(p) = 0$.

Dokaz. Poznato iz diferencijalnog računa funkcija više varijabli $\square$

Dokaz propozicije

Linearnost preslikavanja $v_p \mapsto \tilde{v}_p$ je lako provjeriti.

Dokaz propozicije

Linearnost preslikavanja $v_p \mapsto \tilde{v}_p$ je lako provjeriti.

Injektivnost. Neka je $v_p \in \mathbf{R}^n_p$ i $\tilde{v}_p$ nul-derivacija.

Dokaz propozicije

Linearnost preslikavanja $v_p \mapsto \tilde{v}_p$ je lako provjeriti.

Injektivnost. Neka je $v_p \in \mathbf{R}^n_p$ i $\tilde{v}_p$ nul-derivacija.

U standardnoj bazi $v_p = \sum_i v^i e_i|_p$.

Dokaz propozicije

Linearnost preslikavanja $v_p \mapsto \tilde{v}_p$ je lako provjeriti.

Injektivnost. Neka je $v_p \in \mathbf{R}^n_p$ i $\tilde{v}_p$ nul-derivacija.

U standardnoj bazi $v_p = \sum_i v^i e_i|_p$.

Djelovanjem derivacije $\tilde{v}_p$ na j-tu koordinatnu funkciju $x_j : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, dobivamo

$$0 = \tilde{v}_p(x^j) = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i}(x^j)|_p = v^j.$$

Dokaz propozicije

Linearnost preslikavanja $v_p \mapsto \tilde{v}_p$ je lako provjeriti.

Injektivnost. Neka je $v_p \in \mathbf{R}^n_p$ i $\tilde{v}_p$ nul-derivacija.

U standardnoj bazi $v_p = \sum_i v^i e_i|_p$.

Djelovanjem derivacije $\tilde{v}_p$ na j-tu koordinatnu funkciju $x_j : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, dobivamo

$$0 = \tilde{v}_p(x^j) = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i}(x^j)|_p = v^j.$$

Prethodno vrijedi za svaki $j = 1, \ldots, n$, te je $v_p = 0$.

Dokaz propozicije – nastavak

Surjektivnost. Neka je $X \in T_p(\mathbf{R}^n)$.

Dokaz propozicije – nastavak

Surjektivnost. Neka je $X \in T_p(\mathbf{R}^n)$.

Definirajmo realne brojeve $v^1, \ldots, v^n$ kao

$$v^i = X(x^i).$$

Dokaz propozicije – nastavak

Surjektivnost. Neka je $X \in T_p(\mathbf{R}^n)$.

Definirajmo realne brojeve $v^1, \dots, v^n$ kao

$$v^i = X(x^i).$$

Pokazat ćemo da je $X = \tilde{v}_p$, gdje je $v_p = \sum_i v^i e_i|_p$.

Dokaz propozicije – nastavak

Surjektivnost. Neka je $X \in T_p(\mathbf{R}^n)$.

Definirajmo realne brojeve $v^1, \dots, v^n$ kao

$$v^i = X(x^i).$$

Pokazat ćemo da je $X = \tilde{v}_p$, gdje je $v_p = \sum_i v^i e_i|_p$.

Neka je f realna funkcija na $\mathbf{R}^n$.

Dokaz propozicije – nastavak

Surjektivnost. Neka je $X \in T_p(\mathbf{R}^n)$.

Definirajmo realne brojeve $v^1, \ldots, v^n$ kao

$$v^i = X(x^i).$$

Pokazat ćemo da je $X = \tilde{v}_p$, gdje je $v_p = \sum_i v^i e_i|_p$.

Neka je f realna funkcija na $\mathbf{R}^n$.

Koristeći Taylorovu formulu s ostatkom zaključujemo da postoje glatke funkcije $g_1, \ldots, g_n$ na $\mathbf{R}^n$ takve da je $g_i(p) = 0$ i da vrijedi

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)(x^i - p^i) + \sum_{i=1}^{n} g_i(x)(x^i - p^i).$$

Dokaz propozicije – nastavak

Primijenimo X na prethodni izraz i koristeći Lemu 1.3 zaključujemo

Dokaz propozicije – nastavak

Primijenimo X na prethodni izraz i koristeći Lemu 1.3 zaključujemo

$$\begin{aligned}
Xf &= X(f(p)) + \sum_{i=1}^{n} X\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)(x^i - p^i)\right) + \sum_{i=1}^{n} X\left(g_i(x)(x^i - p^i)\right) \\
&= 0 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)(X(x^i) - X(p^i))\right) + 0 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) v^i \\
&= \tilde{v}_p f.
\end{aligned}$$

Korolar

Za svaki $p \in \mathbf{R}^n$, derivacije

$$\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p : C^\infty(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$$

Korolar

Za svaki $p \in \mathbf{R}^n$, derivacije

$$\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p : C^\infty(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$$

definirane sa

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

Korolar

Za svaki $p \in \mathbf{R}^n$, derivacije

$$\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p : C^\infty(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$$

definirane sa

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

čine bazu za $T_p(\mathbf{R}^n)$.

Korolar

Za svaki $p \in \mathbf{R}^n$, derivacije

$$\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p : C^\infty(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$$

definirane sa

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

čine bazu za $T_p(\mathbf{R}^n)$.

Dokaz.

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p = \tilde{e}_{i\,p}$$

$\square$

Tangencijalni prostor na M

Definicija

Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M$.

Tangencijalni prostor na M

Definicija

Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M$.

Linearno prelikavanje $X : C^\infty(M) \to \mathbf{R}$ naziva se derivacijom u p ako vrijedi

$$X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf, \;\; f, g \in C^\infty(M).$$

Tangencijalni prostor na M

Definicija

Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M$.

Linearno prelikavanje $X : C^\infty(M) \to \mathbf{R}$ naziva se derivacijom u p ako vrijedi

$$X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf, \;\; f, g \in C^\infty(M).$$

Skup svih derivacija u p je vektorski prostor koji se naziva tangencijalnim prostorom od M u p i označava T_pM.

Tangencijalni prostor na M

Definicija

Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M$.

Linearno prelikavanje $X : C^\infty(M) \to \mathbf{R}$ naziva se derivacijom u p ako vrijedi

$$X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf, \;\; f, g \in C^\infty(M).$$

Skup svih derivacija u p je vektorski prostor koji se naziva tangencijalnim prostorom od M u p i označava T_pM.

Tangencijalni vektor u p je element prostora T_pM.

Lema (Svojstva tangencijalnih vektora na M)

Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M$, $X \in T_p(M)$.

Lema (Svojstva tangencijalnih vektora na M)

Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M$, $X \in T_p(M)$.

1. *Ako je f konstantna funkcija, tada je $Xf = 0$.*

Lema (Svojstva tangencijalnih vektora na M)

Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M$, $X \in T_p(M)$.

1. *Ako je f konstantna funkcija, tada je $Xf = 0$.*
2. *Ako je $f(p) = g(p) = 0$, tada je $X(fg) = 0$.*

Push-forward

Definicija

Neka su M i N glatke mnogostrukosti, $F : M \to N$ glatko preslikavanje.

Push-forward

Definicija

Neka su M i N glatke mnogostrukosti, $F : M \to N$ glatko preslikavanje.

Za svako $p \in M$ definiramo push-forward F_* preslikavanja F kao preslikavanje

$$F_* : T_pM \to T_{F(p)}N, \qquad (F_*X)(f) = X(f \circ F),$$

gdje je $f \in C^\infty(N)$.

Uočimo $f \circ F \in C^{\infty}(M)$.

Uočimo $f \circ F \in C^\infty(M)$.

Preslikavanje $F_* X$ je očito linearno i derivacija u $\cancel{p}$ $F(p)$

$$(F_*X)(fg) = X((fg) \circ F) = X((f \circ F)(g \circ F))$$

$$= (f \circ F)(p) X(g \circ F) + (g \circ F)(p) X(f \circ F)$$

$$= f(F(p))(F_*X)(g) + g(F(p))(F_*X)(f).$$

Push-forward

Lema (Svojstva *push-forward*-a)

Neka su $F : M \to N$, $G : N \to P$ *glatka preslikavanja,* $p \in M$.
Tada:

Push-forward

Lema (Svojstva *push-forward*-a)

Neka su $F : M \to N$, $G : N \to P$ *glatka preslikavanja,* $p \in M$.
Tada:

1. $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ *je linearni operator*

Push-forward

Lema (Svojstva *push-forward*-a)

Neka su $F : M \to N$, $G : N \to P$ *glatka preslikavanja,* $p \in M$. *Tada:*

1. $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ *je linearni operator*
2. $(G \circ F)_* = G_* \circ F_* : T_pM \to T_{(G\circ F)(p)}P$

Push-forward

Lema (Svojstva *push-forward*-a)

Neka su $F : M \to N$, $G : N \to P$ *glatka preslikavanja,* $p \in M$.
Tada:

1. $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ *je linearni operator*
2. $(G \circ F)_* = G_* \circ F_* : T_pM \to T_{(G \circ F)(p)}P$
3. $((Id)_M)_* = Id_{T_pM} : T_pM \to T_pM$

Push-forward

Lema (Svojstva *push-forward*-a)

Neka su $F : M \to N$, $G : N \to P$ *glatka preslikavanja*, $p \in M$.
Tada:

1. $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ *je linearni operator*
2. $(G \circ F)_* = G_* \circ F_* : T_pM \to T_{(G \circ F)(p)}P$
3. $((Id)_M)_* = Id_{T_pM} : T_pM \to T_pM$
4. *Ako je* F *difeomorfizam, tada je* $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ *izomorfizam.*

Propozicija

Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M, X \in T_p(M)$.

Propozicija

Neka je M *glatka mnogostrukost,* $p \in M, X \in T_p(M)$.

Neka su f, g *glatke funkcije na* M *koje se podudaraju na nekoj okolini od* p.

Propozicija

Neka je M *glatka mnogostrukost,* $p \in M, X \in T_p(M)$.

Neka su f, g *glatke funkcije na* M *koje se podudaraju na nekoj okolini od* p.

Tada je $Xf = Xg$.

Propozicija

Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M, X \in T_p(M)$.

Neka su f, g glatke funkcije na M koje se podudaraju na nekoj okolini od p.

Tada je $Xf = Xg$.

Dokaz. Zbog linearnosti, dovoljno je pokazati $Xh = 0$ za h koji iščezava u okolini od p.

Propozicija

Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M$,$X \in T_p(M)$.

Neka su f, g glatke funkcije na M koje se podudaraju na nekoj okolini od p.

Tada je $Xf = Xg$.

Dokaz. Zbog linearnosti, dovoljno je pokazati $Xh = 0$ za h koji iščezava u okolini od p.

Neka je $\varphi \in C^\infty(M)$ glatka *bump*-funkcija koja je identički jednaka 1 na nosaču od h, a čiji je nosač u $M \setminus \{p\}$.

Propozicija

Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M, X \in T_p(M)$.

Neka su f, g glatke funkcije na M koje se podudaraju na nekoj okolini od p.

Tada je $Xf = Xg$.

Dokaz. Zbog linearnosti, dovoljno je pokazati $Xh = 0$ za h koji iščezava u okolini od p.

Neka je $\varphi \in C^\infty(M)$ glatka *bump*-funkcija koja je identički jednaka 1 na nosaču od h, a čiji je nosač u $M \setminus \{p\}$.

Kako je $\varphi \equiv 1$ tamo gdje h ne iščezava, produkt φh je identički jednak h.

Propozicija

Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M, X \in T_p(M)$.

Neka su f, g glatke funkcije na M koje se podudaraju na nekoj okolini od p.

Tada je $Xf = Xg$.

Dokaz. Zbog linearnosti, dovoljno je pokazati $Xh = 0$ za h koji iščezava u okolini od p.

Neka je $\varphi \in C^\infty(M)$ glatka *bump*-funkcija koja je identički jednaka 1 na nosaču od h, a čiji je nosač u $M \setminus \{p\}$.

Kako je $\varphi \equiv 1$ tamo gdje h ne iščezava, produkt φh je identički jednak h.

Kako je $h(p) = \varphi(p) = 0$, Lema 1.7 povlači $Xh = X(\varphi h) = 0$. $\square$

Prethodna propozicija omogućuje identifikaciju tangencijalnog prostora otvorene podmnogostrukosti s tangencijalnim prostorom cijele mnogostrukosti:

Prethodna propozicija omogućuje identifikaciju tangencijalnog prostora otvorene podmnogostrukosti s tangencijalnim prostorom cijele mnogostrukosti:

Propozicija

Neka je M glatka mnogostrukost, $U \subset M$ otvorena podmnogostrukost, $i : U \hookrightarrow M$ inkluzija.

Prethodna propozicija omogućuje identifikaciju tangencijalnog prostora otvorene podmnogostrukosti s tangencijalnim prostorom cijele mnogostrukosti:

Propozicija

Neka je M glatka mnogostrukost, $U \subset M$ otvorena podmnogostrukost, $i : U \hookrightarrow M$ inkluzija.

Tada je za svaki $p \in U$ preslikavanje $i_* : T_pU \to T_pM$ izomorfizam.

Dokaz.
Injektivnost. Neka je $X \in T_pU$, $i_*X = 0 \in T_pM$. Neka je $f \in C^\infty(U)$.

Dokaz.
Injektivnost. Neka je $X \in T_pU$, $i_*X = 0 \in T_pM$. Neka je $f \in C^\infty(U)$.

Po lemi o proširenju 0.4 postoji $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ takva da je $\tilde{f} = f$ na okolini $\bar{B}$ od p, $\bar{B} \subset U$.

Dokaz.

Injektivnost. Neka je $X \in T_pU$, $i_*X = 0 \in T_pM$. Neka je $f \in C^\infty(U)$.

Po lemi o proširenju 0.4 postoji $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ takva da je $\tilde{f} = f$ na okolini $\bar{B}$ od p, $\bar{B} \subset U$.

Propozicija 1.10 povlači

$$Xf = X(\tilde{f}|_U) = X(\tilde{f} \circ i) = (i_*X)(\tilde{f}) = 0.$$

Dokaz.
Injektivnost. Neka je $X \in T_pU$, $i_*X = 0 \in T_pM$. Neka je $f \in C^\infty(U)$.

Po lemi o proširenju 0.4 postoji $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ takva da je $\tilde{f} = f$ na okolini $\bar{B}$ od p, $\bar{B} \subset U$.

Propozicija 1.10 povlači

$$Xf = X(\tilde{f}|_U) = X(\tilde{f} \circ i) = (i_*X)(\tilde{f}) = 0.$$

Surjektivnost. Neka je $Y \in T_pM$ po volji odabran.

Dokaz.
Injektivnost. Neka je $X \in T_pU$, $i_*X = 0 \in T_pM$. Neka je $f \in C^\infty(U)$.

Po lemi o proširenju 0.4 postoji $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ takva da je $\tilde{f} = f$ na okolini $\bar{B}$ od p, $\bar{B} \subset U$.

Propozicija 1.10 povlači

$$Xf = X(\tilde{f}|_U) = X(\tilde{f} \circ i) = (i_*X)(\tilde{f}) = 0.$$

Surjektivnost. Neka je $Y \in T_pM$ po volji odabran.

Definiramo preslikavanje $X : C^\infty(U) \to \mathbf{R}$, $Xf = Y\tilde{f}$.

Dokaz.

Injektivnost. Neka je $X \in T_pU$, $i_*X = 0 \in T_pM$. Neka je $f \in C^\infty(U)$.

Po lemi o proširenju 0.4 postoji $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ takva da je $\tilde{f} = f$ na okolini $\bar{B}$ od p, $\bar{B} \subset U$.

Propozicija 1.10 povlači

$$Xf = X(\tilde{f}|_U) = X(\tilde{f} \circ i) = (i_*X)(\tilde{f}) = 0.$$

Surjektivnost. Neka je $Y \in T_pM$ po volji odabran.

Definiramo preslikavanje $X : C^\infty(U) \to \mathbf{R}$, $Xf = Y\tilde{f}$.

X je tražena derivacija. $\square$

Propozicija

Ako je $F : M \to N$ *lokalni difeomorfizam, tada je* $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ *izomorfizam za svaki* $p \in M$.

Propozicija

Ako je $F : M \to N$ lokalni difeomorfizam, tada je $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ izomorfizam za svaki $p \in M$.

Generalizirajući izomorfizam izmedju $\mathbf{R}^n_p$ i $T_p\mathbf{R}^n$, dobivamo:

Propozicija

Za svaki konačnodimenzionalan vektorski prostor V i svaku točku $p \in V$, postoji prirodni izomorfizam (tj. izomorfizam koji ne ovisi o izboru baza) $V \to T_pV$ takav da za svaki linearni operator $L : V \to W$ sljedeći dijagram komutira

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "L"'] & T_pV \arrow[d, "L_*"] \\
W \arrow[r, "\cong"'] & T\cancel{{}_{L_p}W}
\end{tikzcd}
$$

$T_{Lp}W$

Dokaz

Neka je $v \in V$. Definiramo preslikavanje $\tilde{v}_p$ na C^∞(V)

$$\tilde{v}_p(f) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(p + tv).$$

Definicija ne ovisi o izboru baze.

Dokaz

Neka je $v \in V$. Definiramo preslikavanje $\tilde{v}_p$ na C^∞(V)

$$\tilde{v}_p(f) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(p + tv).$$

Definicija ne ovisi o izboru baze.

Ako izaberemo bazu, u koordinatama možemo provesti isto zaključivanje kao u $\mathbf{R}^n$ kako bismo pokazali da je $\tilde{v}_p$ derivacija u p i da je preslikavanje $v \mapsto \tilde{v}_p$ izomorfizam.

Dokaz – nastavak

Komutativnost dijagrama. Neka je $L : V \to W$ linearni operator.

Dokaz – nastavak

Komutativnost dijagrama. Neka je $L : V \to W$ linearni operator.

Njegove koordinatne funkcije s obzirom na bilo koji izbor baza za V, W su linearne funkcije, pa je L glatko preslikavanje.

Dokaz – nastavak

Komutativnost dijagrama. Neka je $L : V \to W$ linearni operator.

Njegove koordinatne funkcije s obzirom na bilo koji izbor baza za V, W su linearne funkcije, pa je L glatko preslikavanje.

Koristeći definiciju *push-forward*-a i linearnost od L, dobivamo

$$L_* \tilde{v}_p f = \tilde{v}_p (f \circ L) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(L(p + tv))$$

$$= \frac{d}{dt}|_{t=0} f(Lp + tLv) = \widetilde{Lv}_{Lp} f.$$

Koordinatni zapis

Neka je (U, φ) glatka koordinatna karta na M.

Koordinatni zapis

Neka je (U, φ) glatka koordinatna karta na M.

Znamo da je $\varphi : U \to \varphi(U)$ glatki difeomorfizam, pa je po Lemi 1.9 i Propoziciji 1.11 $\varphi_* : T_pM \to T_{\varphi(p)}\mathbf{R}^n$ izomorfizam.

Koordinatni zapis

Neka je (U, φ) glatka koordinatna karta na M.

Znamo da je $\varphi : U \to \varphi(U)$ glatki difeomorfizam, pa je po Lemi 1.9 i Propoziciji 1.11 $\varphi_* : T_pM \to T_{\varphi(p)}\mathbf{R}^n$ izomorfizam.

Znamo: baza za $T_{\varphi(p)}\mathbf{R}^n$ su derivacije $\frac{\partial}{\partial x^i}|_{\varphi(p)}$, $i = 1, \ldots, n$.

Koordinatni zapis

Neka je (U, φ) glatka koordinatna karta na M.

Znamo da je $\varphi : U \to \varphi(U)$ glatki difeomorfizam, pa je po Lemi 1.9 i Propoziciji 1.11 $\varphi_* : T_pM \to T_{\varphi(p)}\mathbf{R}^n$ izomorfizam.

Znamo: baza za $T_{\varphi(p)}\mathbf{R}^n$ su derivacije $\frac{\partial}{\partial x^i}|_{\varphi(p)}$, $i = 1, \ldots, n$.

Prema tome, *pushforward* tih vektora po preslikavanju $(\varphi^{-1})_*$ je baza za T_pM.

Stoga, definiramo

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p = (\varphi^{-1})_* \frac{\partial}{\partial x^i}|_{\varphi(p)},$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p f = \frac{\partial}{\partial x^i}|_{\varphi(p)}(f \circ \varphi^{-1}) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i}(\hat{p}),$$

gdje je $f : U \to \mathbf{R}$ glatka funkcija, $\hat{f} = f \circ \varphi^{-1}$ njen koordinatni prikaz, $\hat{p} = \varphi(p)$.

n-

Lema

Neka je M glatka mnogostrukost. Za svaki $p \in M$, T_pM je n-dimenzionalni vektorski prostor.

Lema

Neka je M glatka mnogostrukost. Za svaki $p \in M$, T_pM je n-dimenzionalni vektorski prostor.

Ako je $(U, (x^i))$ glatka karta oko p, tada

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p$$

čine bazu za T_pM.

$\sum_i$

U danoj bazi imamo:

Neka je $X \in T_pM$, $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$.

U danoj bazi imamo:
Neka je $X \in T_pM$, $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$.

Uredjena n-torka $(X^1, \ldots X^n)$ je n-torka komponenata (koordinata) vektora X s obzirom na dani koordinatni sustav.

U danoj bazi imamo:
Neka je $X \in T_pM$, $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$.

Uredjena n-torka $(X^1, \dots X^n)$ je n-torka komponenata (koordinata) vektora X s obzirom na dani koordinatni sustav.

Neka je $x^j : U \to \mathbf{R}$ (glatka) koordinatna funkcija, tada

$$X(x^j) = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p(x^j) = \sum_i X^i \frac{\partial x^j \circ \varphi^{-1}}{\partial x^i}(\hat{p}) = X^j.$$

Push-forward glatkog preslikavanja F u koordinatama

Za $F : U \to V$, $U \subset \mathbf{R}^n$, $V \subset \mathbf{R}^m$. Neka je $p \in U$.

Push-forward glatkog preslikavanja F u koordinatama

Za $F : U \to V$, $U \subset \mathbf{R}^n$, $V \subset \mathbf{R}^m$. Neka je $p \in U$.

Odredimo matricu preslikavanja $F_* : T_p\mathbf{R}^n \to T_{F(p)}\mathbf{R}^m$ u paru standardnih baza.

Push-forward glatkog preslikavanja F u koordinatama

Za $F : U \to V$, $U \subset \mathbf{R}^n$, $V \subset \mathbf{R}^m$. Neka je $p \in U$.

Odredimo matricu preslikavanja $F_* : T_p\mathbf{R}^n \to T_{F(p)}\mathbf{R}^m$ u paru standardnih baza.

Označimo s $(x^1, \ldots, x^n)$, $(y^1, \ldots, y^{\overset{m}{\cancel{n}}})$ odgovarajuće koordinate u U, V.

Push-forward glatkog preslikavanja F u koordinatama

Za $F : U \to V$, $U \subset \mathbf{R}^n$, $V \subset \mathbf{R}^m$. Neka je $p \in U$.

Odredimo matricu preslikavanja $F_* : T_p\mathbf{R}^n \to T_{F(p)}\mathbf{R}^m$ u paru standardnih baza.

Označimo s $(x^1, \dots, x^n)$, $(y^1, \dots, y^{\overset{m}{\cancel{n}}})$ odgovarajuće koordinate u U, V.

Neka je $f : V \to \mathbf{R}$, $f = f(y^1, \dots, y^{\overset{m}{\cancel{n}}})$, tada je $f \circ F : U \to \mathbf{R}$, $f \circ F = f \circ F(x^1, \dots, x^n)$.

Dakle,

$$\left(F_*\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\right) f = \frac{\partial}{\partial x^i}|_p(f \circ F) =$$

$$\sum_j \frac{\partial f}{\partial y^j}(F(p))\frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p) = \sum_j \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p)\frac{\partial}{\partial y^j}|_{F(p)} f.$$

Dakle,

$$\left(F_* \frac{\partial}{\partial x^i}|_p\right) f = \frac{\partial}{\partial x^i}|_p (f \circ F) =$$
$$\frac{\partial f}{\partial y^j}(F(p)) \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial y^j}|_{F(p)} f.$$

Prema tome

$$F_* \frac{\partial}{\partial x^i}|_p = \sum_j \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial y^j}|_{F(p)}.$$

Push-forward glatkog preslikavanja F u koordinatama

Odavde slijedi da je matrični prikaz preslikavanja F_* u paru standardnih baza *Jacobijeva matrica*

Push-forward glatkog preslikavanja F u koordinatama

Odavde slijedi da je matrični prikaz preslikavanja F_* u paru standardnih baza *Jacobijeva matrica*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial x^1}(p) & \dots & \dfrac{\partial F^1}{\partial x^n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F^m}{\partial x^1}(p) & \dots & \dfrac{\partial F^m}{\partial x^n}(p) \end{pmatrix} \tag{1}$$

Push-forward glatkog preslikavanja F u koordinatama

Odavde slijedi da je matrični prikaz preslikavanja F_* u paru standardnih baza *Jacobijeva matrica*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1}(p) & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^m}{\partial x^1}(p) & \dots & \frac{\partial F^m}{\partial x^n}(p) \end{pmatrix} \tag{1}$$

Dakle, specijalni slučaj $F_* : T_p\mathbf{R}^n \to T_{F(p)}\mathbf{R}^m$ odgovara diferencijalu $DF(p) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ uz identifikaciju euklidskih prostora sa svojim tangencijalnim prostorima.

Push-forward glatkog preslikavanja F u koordinatama

Za $F : M \to N$ uz koordinatne karte (U, φ) za M oko p, (V, ψ) za N oko $F(p)$, promatramo koordinatno preslikavanje

$F(U) \subseteq V$

$$\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V).$$

Push-forward glatkog preslikavanja F u koordinatama

Za $F : M \to N$ uz koordinatne karte (U, φ) za M oko p, (V, ψ) za N oko $F(p)$, promatramo koordinatno preslikavanje

$$\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V).$$

U paru standardnih baza, $\hat{F}_*$ ima za matrični prikaz Jacobijevu matricu preslikavanja $\hat{F}$.

Zbog toga i preslikavanje F_* u paru baza $(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p)$ za U i $(\frac{\partial}{\partial y^i}|_{F(p)})$ za V ima za matrični prikaz Jacobijevu matricu preslikavanja $\hat{F}$:

Zbog toga i preslikavanje F_* u paru baza $(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p)$ za U i $(\frac{\partial}{\partial y^i}|_{F(p)})$ za V ima za matrični prikaz Jacobijevu matricu preslikavanja $\hat{F}$:

$$F_* \frac{\partial}{\partial x^i}|_p = F_* \left((\varphi^{-1})_* \frac{\partial}{\partial x^i}|_{\varphi(p)} \right) = (\psi^{-1})_* \left(\hat{F}_* \frac{\partial}{\partial x^i}|_{\varphi(p)} \right)$$

$$= (\psi^{-1})_* \left(\frac{\partial \hat{F}^j}{\partial x^i}(\hat{p}) \frac{\partial}{\partial y^j}|_{\hat{F}(\varphi(p))} \right) = \frac{\partial \hat{F}^j}{\partial x^i}(\hat{p}) \frac{\partial}{\partial y^j}|_{F(p))},$$

pri čemu smo koristili $F \circ \varphi^{-1} = \psi^{-1} \circ \hat{F}$.

Promjena koordinata

Izgleda kao lančano pravilo:
Neka su (U, φ), (V, ψ) dvije karte oko p, (x^i), $(\tilde{x}^i)$ odgovarajuće koordinate.

Promjena koordinata

Izgleda kao lančano pravilo:
Neka su (U, φ), (V, ψ) dvije karte oko p, (x^i), $(\tilde{x}^i)$ odgovarajuće koordinate.

Tada je

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(\hat{p}) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}|_p.$$

Promjena koordinata

Izgleda kao lančano pravilo:
Neka su (U,φ), (V,ψ) dvije karte oko p, (x^i), $(\tilde{x}^i)$ odgovarajuće koordinate.

Tada je

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(\hat{p})\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}|_p.$$

Stoga se komponente X^i transformiraju po pravilu

$$\tilde{X}^j = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(\hat{p})X^i.$$

Tangencijalni vektori krivulje

Neka je M glatka mnogostrukost. *Krivulja* u M je glatko (klase C^k) preslikavanje $c : I \to M$, $I \subset \mathbf{R}$ otvoren interval.

Tangencijalni vektori krivulje

Neka je M glatka mnogostrukost. *Krivulja* u M je glatko (klase C^k) preslikavanje $c : I \to M$, $I \subset \mathbf{R}$ otvoren interval.

Tangencijalni vektor od c u točki $t_0 \in I$ je vektor

$$c'(t_0) := c_*(\frac{d}{dt}|_{t_0}) \in T_{c(t_0)}M,$$

gdje je $\frac{d}{dt}|_{t_0}$ standardna baza za $T_{t_0}\mathbf{R}$.

Tangencijalni vektori krivulje

Neka je M glatka mnogostrukost. *Krivulja* u M je glatko (klase C^k) preslikavanje $c : I \to M$, $I \subset \mathbf{R}$ otvoren interval.

Tangencijalni vektor od c u točki $t_0 \in I$ je vektor

$$c'(t_0) := c_*(\frac{d}{dt}|_{t_0}) \in T_{c(t_0)}M,$$

gdje je $\frac{d}{dt}|_{t_0}$ standardna baza za $T_{t_0}\mathbf{R}$.

Tangencijalni vektor $c'(t_0)$ djeluje na funkcije $f : U \to \mathbf{R}$

$$c'(t_0)f = c_*(\frac{d}{dt}|_{t_0})f = \frac{d}{dt}|_{t_0}(f \circ c) = \frac{df \circ c}{dt}(t_0).$$

Lema

Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M$. Svaki $X \in T_pM$ je tangencijalni vektor neke glatke krivulje u M.

Lema

Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M$. Svaki $X \in T_pM$ je tangencijalni vektor neke glatke krivulje u M.

Dokaz. Neka je (U, φ) koordinatna karta centrirana u p, $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$.

Lema

Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M$. Svaki $X \in T_pM$ je tangencijalni vektor neke glatke krivulje u M.

Dokaz. Neka je (U, φ) koordinatna karta centrirana u p, $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$.

Definirajmo krivulju $c : \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \to U$

$$c(t) = (tX^1, \dots, tX^n) \;\; \left(= \varphi^{-1}(tX^1, \dots, tX^n)\right).$$

Lema

Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M$. Svaki $X \in T_pM$ je tangencijalni vektor neke glatke krivulje u M.

Dokaz. Neka je (U, φ) koordinatna karta centrirana u p, $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$.

Definirajmo krivulju $c : \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \to U$

$$c(t) = (tX^1, \ldots, tX^n) \ \ \left(= \varphi^{-1}(tX^1, \ldots, tX^n)\right).$$

Očito vrijedi $c(0) = p$, $c'(0) = X$. $\square$

Propozicija

Neka je $F : M \to N$ *glatko preslikavanje,* $c : I \to M$ *glatka krivulja.*

Propozicija

Neka je $F : M \to N$ *glatko preslikavanje,* $c : I \to M$ *glatka krivulja.*

Za svaki $t_0 \in I$ *tangencijalni vektor u* t_0 *slike krivulje* c *pri preslikavanju* F, $F \circ c : I \to N$ *je dan sa*

$$(F \circ c)'(t_0) = F_*(c'(t_0)).$$

Propozicija

Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje, $c : I \to M$ glatka krivulja.

Za svaki $t_0 \in I$ tangencijalni vektor u t_0 slike krivulje c pri preslikavanju F, $F \circ c : I \to N$ je dan sa

$$(F \circ c)'(t_0) = F_*(c'(t_0)).$$

Dokaz.

$$(F \circ c)'(t_0) = (F \circ c)_* \frac{d}{dt}|_{t_0} = F_* \circ c_* \frac{d}{dt}|_{t_0} = F_*(c'(t_0)).$$

$\square$

Klasična diferencijalna geometrija krivulja i ploha

Tangencijalni vektor krivulje je $\dot{c}(t)$.

Klasična diferencijalna geometrija krivulja i ploha

Tangencijalni vektor krivulje je $\dot{c}(t)$.

Tangencijalni vektor plohe: $v \in T_p\mathbf{R}^3$ je tangencijalni vektor plohe ako postoji krivulja $c : I \to S$ takva da je $c(0) = p$, $c'(0) = v$.

Klasična diferencijalna geometrija krivulja i ploha

Tangencijalni vektor krivulje je $\dot{c}(t)$.

Tangencijalni vektor plohe: $v \in T_p\mathbf{R}^3$ je tangencijalni vektor plohe ako postoji krivulja $c : I \to S$ takva da je $c(0) = p$, $c'(0) = v$.

Ako je $\mathbf{x} : U \to S$ parametrizacija od S, tada

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}, \ (u, v) \in U,$$

razapinju tangencijalnu ravninu.

Alternativne definicije tangencijalnog prostora.

1. Klice glatkih funkcija

Alternativne definicije tangencijalnog prostora.

1. Klice glatkih funkcija
2. Relacija ekvivalencije na skupu glatkih krivulja na M

$$c_1 \cong c_2 \iff c_1(0) = c_2(0), \;\; \frac{d}{dt}(f \circ c_1)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ c_2)|_{t=0},$$

f je glatka realna funkcija definirana u okolini od p.

Alternativne definicije tangencijalnog prostora.

1. Klice glatkih funkcija
2. Relacija ekvivalencije na skupu glatkih krivulja na M

   $$c_1 \cong c_2 \Longleftrightarrow c_1(0) = c_2(0), \;\; \frac{d}{dt}(f \circ c_1)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ c_2)|_{t=0},$$

   f je glatka realna funkcija definirana u okolini od p.
3. Pravilo za zamjenu varijabli (promjena karte)