Glatke i Riemannove mnogostrukosti

Željka Milin-Šipuš, Pavle Pandžić i Juraj Šiftar

Geometrija i topologija, drugi dio

Ponovimo: Glatke mnogostrukosti

Topološka mnogostrukost dimenzije n je Hausdorffov topološki prostor M s prebrojivom bazom, koji je lokalno euklidski, tj. $\forall p \in M$, $\exists$ okolina U i homeomorfizam φ sa U na otvoren podskup $\tilde{U}$ od $\mathbf{R}^n$. Par (U, φ) zove se karta na M.

Ponovimo: Glatke mnogostrukosti

Topološka mnogostrukost dimenzije n je Hausdorffov topološki prostor M s prebrojivom bazom, koji je lokalno euklidski, tj. $\forall p \in M$, $\exists$ okolina U i homeomorfizam φ sa U na otvoren podskup $\tilde{U}$ od $\mathbf{R}^n$. Par (U, φ) zove se karta na M.

Glatka mnogostrukost je M je topološka mnogostrukost, na kojoj je zadan maksimalan glatki atlas $\mathcal{A}$ (koji se zove i glatkom strukturom).

Ponovimo: Glatke mnogostrukosti

Topološka mnogostrukost dimenzije n je Hausdorffov topološki prostor M s prebrojivom bazom, koji je lokalno euklidski, tj. $\forall p \in M$, $\exists$ okolina U i homeomorfizam φ sa U na otvoren podskup $\tilde{U}$ od $\mathbf{R}^n$. Par (U, φ) zove se karta na M.

Glatka mnogostrukost je M je topološka mnogostrukost, na kojoj je zadan maksimalan glatki atlas $\mathcal{A}$ (koji se zove i glatkom strukturom).

Glatki atlas je familija karata čije domene pokrivaju M, tako da su svake dvije karte $(U, \varphi), (V, \psi)$ u $\mathcal{A}$ glatko povezane, tj. funkcije prijelaza $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ su glatki difeomorfizmi.

Ponovimo: Glatke mnogostrukosti

Topološka mnogostrukost dimenzije n je Hausdorffov topološki prostor M s prebrojivom bazom, koji je lokalno euklidski, tj. $\forall p \in M$, $\exists$ okolina U i homeomorfizam φ sa U na otvoren podskup $\tilde{U}$ od $\mathbf{R}^n$. Par (U, φ) zove se karta na M.

Glatka mnogostrukost je M je topološka mnogostrukost, na kojoj je zadan maksimalan glatki atlas $\mathcal{A}$ (koji se zove i glatkom strukturom).

Glatki atlas je familija karata čije domene pokrivaju M, tako da su svake dvije karte $(U, \varphi), (V, \psi)$ u $\mathcal{A}$ glatko povezane, tj. funkcije prijelaza $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ su glatki difeomorfizmi.

Svaki glatki atlas odredjuje jedinstven maksimalni atlas, pa je za zadavanje glatke strukture dovoljno zadati neki glatki atlas. Pri tome je moguće da više glatkih atlasa daje istu glatku strukturu.

Primjeri glatkih mnogostrukosti

1. $\mathbf{R}^n$: Standardna glatka struktura je odredjena jednom kartom $(\mathbf{R}^n, Id)$. Postoje i druge, nestandardne glatke strukture; npr. struktura na $\mathbf{R}$ zadana jednom kartom $(\mathbf{R}, x \to x^3)$.

Primjeri glatkih mnogostrukosti

1. $\mathbf{R}^n$: Standardna glatka struktura je odredjena jednom kartom $(\mathbf{R}^n, Id)$. Postoje i druge, nestandardne glatke strukture; npr. struktura na $\mathbf{R}$ zadana jednom kartom $(\mathbf{R}, x \to x^3)$.

2. Konačnodimenzionalni vektorski prostor V je glatka mnogostrukost jer se može identificirati sa $\mathbb{R}^n$. Posebno, prostor svih $m \times n$ matrica, prostor simetričnih $n \times n$ matrica, te prostor antisimetričnih $n \times n$ matrica su glatke mnogostrukosti.

Primjeri glatkih mnogostrukosti

1. $\mathbf{R}^n$: Standardna glatka struktura je odredjena jednom kartom $(\mathbf{R}^n, Id)$. Postoje i druge, nestandardne glatke strukture; npr. struktura na $\mathbf{R}$ zadana jednom kartom $(\mathbf{R}, x \to x^3)$.
2. Konačnodimenzionalni vektorski prostor V je glatka mnogostrukost jer se može identificirati sa $\mathbb{R}^n$. Posebno, prostor svih $m \times n$ matrica, prostor simetričnih $n \times n$ matrica, te prostor antisimetričnih $n \times n$ matrica su glatke mnogostrukosti.
3. Otvorene podmnogostrukosti: ako je U otvoren podskup glatke n-mnogostrukosti M, tada je i U glatka n-mnogostrukost. Karte na U dobijemo tako da karte na M presiječemo sa U. Posebno, Opća linearna grupa, te matrice maksimalnog ranga, su otvorene podmnogostrukosti u prostorima matrica.

Primjeri glatkih mnogostrukosti

4. Sfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je glatka mnogostrukost. Karte glatkog atlasa dobili smo pomoću hemisfera. (Ili pomoću stereografskih projekcija.)

Primjeri glatkih mnogostrukosti

4. Sfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je glatka mnogostrukost. Karte glatkog atlasa dobili smo pomoću hemisfera. (Ili pomoću stereografskih projekcija.)
5. Realni projektivni prostor $\mathbf{RP}^n$: sastoji se od pravaca kroz ishodište u $\mathbf{R}^{n+1}$. Topologija je kvocijentna u odnosu na projekciju $\pi : \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{RP}^n$, $\pi(x) = [x]$. Karte glatkog atlasa definirane su pomoću neiščezavanja koordinata.

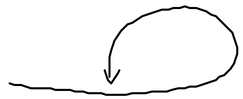
Primjeri glatkih mnogostrukosti

4. Sfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je glatka mnogostrukost. Karte glatkog atlasa dobili smo pomoću hemisfera. (Ili pomoću stereografskih projekcija.)

5. Realni projektivni prostor $\mathbf{RP}^n$: sastoji se od pravaca kroz ishodište u $\mathbf{R}^{n+1}$. Topologija je kvocijentna u odnosu na projekciju $\pi : \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{RP}^n$, $\pi(x) = [x]$. Karte glatkog atlasa definirane su pomoću neiščezavanja koordinata.

6. Produkt glatkih mnogostrukosti je glatka mnogostrukost. Karte su definirane kao produkti karata faktora. Posebno, n-torus, $(S^1)^n$, je glatka mnogostrukost.

Primjeri glatkih mnogostrukosti



4. Sfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je glatka mnogostrukost. Karte glatkog atlasa dobili smo pomoću hemisfera. (Ili pomoću stereografskih projekcija.)

5. Realni projektivni prostor $\mathbf{RP}^n$: sastoji se od pravaca kroz ishodište u $\mathbf{R}^{n+1}$. Topologija je kvocijentna u odnosu na projekciju $\pi : \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{RP}^n$, $\pi(x) = [x]$. Karte glatkog atlasa definirane su pomoću neiščezavanja koordinata.

6. Produkt glatkih mnogostrukosti je glatka mnogostrukost. Karte su definirane kao produkti karata faktora. Posebno, n-torus, $(S^1)^n$, je glatka mnogostrukost.

7. Graf neprekidne funkcije $F : U \to \mathbf{R}^k$, za $U \subset \mathbf{R}^n$ otvoren, je glatka mnogostrukost. Atlas je zadan jednom kartom, koja je projekcija grafa na U.

Ponovimo: Glatka preslikavanja

Za glatke mnogostrukosti M i N, preslikavanje $f : M \to N$ se naziva glatkim ako za svaku točku $p \in M$ postoji glatka karta (U, φ) od M koja sadrži p i glatka karta (V, ψ) od N koja sadrži $f(p)$, tako da je $f(U) \subset V$ i da je koordinatni prikaz

$$\hat{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

glatka funkcija.

Glatka preslikavanja

Vrijedi:

1. Ako je $f : M \to N$ glatko preslikavanje, tada je $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ glatka funkcija za svaku kartu (U, φ) od M i glatku kartu (V, ψ) od N.

Glatka preslikavanja

Vrijedi:

1. Ako je $f : M \to N$ glatko preslikavanje, tada je $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ glatka funkcija za svaku kartu (U, φ) od M i glatku kartu (V, ψ) od N.

2. $f : M \to N$ je glatko akko je $f\big|_U$ glatko za svaki otvoren $U \subset M$ odnosno akko je $f\big|_{U_i}$ glatko za svaki U_i iz nekog otvorenog pokrivača od M.

Glatka preslikavanja

Vrijedi:

1. Ako je $f : M \to N$ glatko preslikavanje, tada je $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ glatka funkcija za svaku kartu (U, φ) od M i glatku kartu (V, ψ) od N.
2. $f : M \to N$ je glatko akko je $f\big|_U$ glatko za svaki otvoren $U \subset M$ odnosno akko je $f\big|_{U_i}$ glatko za svaki U_i iz nekog otvorenog pokrivača od M.
3. Svako glatko preslikavanje $f : M \to N$ je neprekidno.

Glatka preslikavanja

Vrijedi:

1. Ako je $f : M \to N$ glatko preslikavanje, tada je $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ glatka funkcija za svaku kartu (U, φ) od M i glatku kartu (V, ψ) od N.

2. $f : M \to N$ je glatko akko je $f\big|_U$ glatko za svaki otvoren $U \subset M$ odnosno akko je $f\big|_{U_i}$ glatko za svaki U_i iz nekog otvorenog pokrivača od M.

3. Svako glatko preslikavanje $f : M \to N$ je neprekidno.

4. Kompozicija glatkih preslikavanja je glatko preslikavanje.

Glatka preslikavanja

Vrijedi:

1. Ako je $f : M \to N$ glatko preslikavanje, tada je $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ glatka funkcija za svaku kartu (U, φ) od M i glatku kartu (V, ψ) od N.

2. $f : M \to N$ je glatko akko je $f\big|_U$ glatko za svaki otvoren $U \subset M$ odnosno akko je $f\big|_{U_i}$ glatko za svaki U_i iz nekog otvorenog pokrivača od M.

3. Svako glatko preslikavanje $f : M \to N$ je neprekidno.

4. Kompozicija glatkih preslikavanja je glatko preslikavanje.

5. Za glatke mnogostrukosti $M_1, \ldots, M_k$ i N, $f : N \to M_1 \times \cdots \times M_k$ je glatko akko je $f_i := \pi_i \circ f : N \to M_i$ glatko preslikavanje za svaki i (π_i je projekcija na i-ti faktor).

Primjeri glatkih prelikavanja

1. Inkluzija $i : S^n \hookrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ je glatko preslikavanje.

Primjeri glatkih prelikavanja

1. Inkluzija $i : S^n \hookrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ je glatko preslikavanje.
2. Kvocijentno preslikavanje $\pi : \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{RP}^n$ je glatko preslikavanje.

Primjeri glatkih prelikavanja

1. Inkluzija $i : S^n \hookrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ je glatko preslikavanje.
2. Kvocijentno preslikavanje $\pi : \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{RP}^n$ je glatko preslikavanje.
3. Preslikavanje $p : S^n \to \mathbf{RP}^n$, p je restrikcija od π na S^n, je glatko $(p = \pi \circ i)$.

Primjeri glatkih prelikavanja

1. Inkluzija $i : S^n \hookrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ je glatko preslikavanje.
2. Kvocijentno preslikavanje $\pi : \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{RP}^n$ je glatko preslikavanje.
3. Preslikavanje $p : S^n \to \mathbf{RP}^n$, p je restrikcija od π na S^n, je glatko ($p = \pi \circ i$).
4. Za funkciju $f = |\ | : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, smještenje njezinog grafa u $\mathbb{R}^2$, $i : \Gamma(f) \hookrightarrow \mathbb{R}^2$, nije glatko preslikavanje.

Difeomorfizam

Definicija

(Glatki) difeomorfizam izmedju mnogostrukosti M i N je glatka bijekcija $F : M \to N$ kojoj je i inverz glatko preslikavanje.

Difeomorfizam

Definicija

(Glatki) difeomorfizam izmedju mnogostrukosti M i N je glatka bijekcija $F : M \to N$ kojoj je i inverz glatko preslikavanje.

Za mnogostrukosti M i N kažemo da su difeomorfne ako postoji difeomorfizam $F : M \to N$.

Difeomorfizam

Definicija

(Glatki) difeomorfizam izmedju mnogostrukosti M i N je glatka bijekcija $F : M \to N$ kojoj je i inverz glatko preslikavanje.

Za mnogostrukosti M i N kažemo da su difeomorfne ako postoji difeomorfizam $F : M \to N$.

Biti difeomorfan je relacija ekvivalencije.

Primjeri

1. Za svaku kartu (U, φ) na glatkoj mnogostrukosti M, $\varphi : U \to \phi(U)$ je difeomorfizam.

Primjeri

1. Za svaku kartu (U, φ) na glatkoj mnogostrukosti M, $\varphi : U \to \phi(U)$ je difeomorfizam.
2. $F : B_n \to \mathbf{R}^n$, $F(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - |x|^2}}$ je difeomorfizam (napišite inverz!).

Lokalni difeomorfizam

Definicija

Preslikavanje $F : M \to N$ naziva se (glatki) lokalni difeomorfizam, ako za svaku točku $p \in M$ postoji okolina U takva da je $F(U)$ otvoren skup u N i $F|_U : U \to F(U)$ je (glatki) difeomorfizam.

Lokalni difeomorfizam

Definicija

Preslikavanje $F : M \to N$ *naziva se (glatki) lokalni difeomorfizam, ako za svaku točku* $p \in M$ *postoji okolina* U *takva da je* $F(U)$ *otvoren skup u* N *i* $F|_U : U \to F(U)$ *je (glatki) difeomorfizam.*

Propozicija

Preslikavanje $F : M \to N$ *je difeomorfizam ako i samo ako je* F *bijektivni lokalni difeomorfizam.*

Jedinstvenost glatke strukture

Pitanja:

Jedinstvenost glatke strukture

Pitanja:

1. Dopušta li zadana topološka mnogostrukost različite glatke strukture?

Jedinstvenost glatke strukture

Pitanja:

1. Dopušta li zadana topološka mnogostrukost različite glatke strukture?
2. Dopušta li zadana topološka mnogostrukost glatke strukture koje nisu difeomorfne?

Jedinstvenost glatke strukture

Pitanja:

1. Dopušta li zadana topološka mnogostrukost različite glatke strukture?
2. Dopušta li zadana topološka mnogostrukost glatke strukture koje nisu difeomorfne?

Propozicija

Dvije glatke strukture $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ na M su iste ako i samo ako je identiteta : $(M, \mathcal{A}_1) \to (M, \mathcal{A}_2)$ difeomorfizam.

Jedinstvenost glatke strukture

Općenito, zadana topološka mnogostrukost dopušta mnogo različitih glatkih struktura.

Jedinstvenost glatke strukture

Općenito, zadana topološka mnogostrukost dopušta mnogo različitih glatkih struktura.

Primjerice, atlasi $\{(\mathbf{R}, \varphi)\}$, $\{(\mathbf{R}, \psi)\}$, $\varphi(x) = x$, $\psi(x) = x^3$ definiraju različite glatke strukture na $\mathbf{R}$. No, te su strukture difeomorfne!

Jedinstvenost glatke strukture

Općenito, zadana topološka mnogostrukost dopušta mnogo različitih glatkih struktura.

Primjerice, atlasi $\{(\mathbf{R}, \varphi)\}$, $\{(\mathbf{R}, \psi)\}$, $\varphi(x) = x$, $\psi(x) = x^3$ definiraju različite glatke strukture na $\mathbf{R}$. No, te su strukture difeomorfne!

Promotriti $F : \mathbf{R}_\varphi \to \mathbf{R}_\psi$, $F(x) = x^{1/3}$.

Neki rezultati.

1. Postoji samo jedna glatka struktura na **R** do na difeomorfizam.

Neki rezultati.

1. Postoji samo jedna glatka struktura na $\mathbf{R}$ do na difeomorfizam.

2. Svaka topološka mnogostrukost dimenzije ≤ 3 ima jedinstvenu glatku strukturu do na difeomorfizam.

Neki rezultati.

1. Postoji samo jedna glatka struktura na $\mathbf{R}$ do na difeomorfizam.
2. Svaka topološka mnogostrukost dimenzije ≤ 3 ima jedinstvenu glatku strukturu do na difeomorfizam.
3. $\mathbf{R}^n$, $n \neq 4$, ima jedinstvenu glatku strukturu do na difeomorfizam.

Neki rezultati.

1. Postoji samo jedna glatka struktura na $\mathbf{R}$ do na difeomorfizam.
2. Svaka topološka mnogostrukost dimenzije ≤ 3 ima jedinstvenu glatku strukturu do na difeomorfizam.
3. $\mathbf{R}^n$, $n \neq 4$, ima jedinstvenu glatku strukturu do na difeomorfizam.
4. $\mathbf{R}^4$ ima neprebrojivo mnogo različitih glatkih struktura i nikoje dvije nisu difeomorfne.

Neki rezultati.

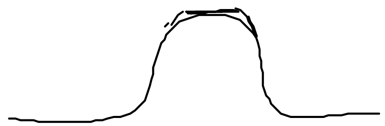
1. Postoji samo jedna glatka struktura na $\mathbf{R}$ do na difeomorfizam.
2. Svaka topološka mnogostrukost dimenzije ≤ 3 ima jedinstvenu glatku strukturu do na difeomorfizam.
3. $\mathbf{R}^n$, $n \neq 4$, ima jedinstvenu glatku strukturu do na difeomorfizam.
4. $\mathbf{R}^4$ ima neprebrojivo mnogo različitih glatkih struktura i nikoje dvije nisu difeomorfne.
5. S^7 ima 28 nedifeomorfnih glatkih struktura.

Neki rezultati.

1. Postoji samo jedna glatka struktura na $\mathbf{R}$ do na difeomorfizam.
2. Svaka topološka mnogostrukost dimenzije ≤ 3 ima jedinstvenu glatku strukturu do na difeomorfizam.
3. $\mathbf{R}^n$, $n \neq 4$, ima jedinstvenu glatku strukturu do na difeomorfizam.
4. $\mathbf{R}^4$ ima neprebrojivo mnogo različitih glatkih struktura i nikoje dvije nisu difeomorfne.
5. S^7 ima 28 nedifeomorfnih glatkih struktura.
6. Postoje kompaktne topološke mnogostrukosti dimenzije > 3 koje ne dopuštaju glatku strukturu.

Particija jedinice

(za "lijepljenje" lokalnih objekata u globalne.)



Particija jedinice

(za "lijepljenje" lokalnih objekata u globalne.)

Definicija

Neka je $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *otvoren pokrivač glatke mnogostrukosti* M.

Particija jedinice

(za "lijepljenje" lokalnih objekata u globalne.)

Definicija

Neka je $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *otvoren pokrivač glatke mnogostrukosti* M*.*

(Glatka) Particija jedinice podredjena pokrivaču $\mathcal{U}$ *je familija* **glatkih funkcija** $\{\varphi_\alpha : M \to \mathbf{R}\}_{\alpha \in A}$ *koja ima sljedeća svojstva:*

Particija jedinice

(za "lijepljenje" lokalnih objekata u globalne.)

Definicija

Neka je $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *otvoren pokrivač glatke mnogostrukosti* M.

(Glatka) Particija jedinice podredjena pokrivaču $\mathcal{U}$ *je familija* **glatkih funkcija** $\{\varphi_\alpha : M \to \mathbf{R}\}_{\alpha \in A}$ *koja ima sljedeća svojstva:*

1. $0 \le \varphi_\alpha(x) \le 1$, $\alpha \in A$, $x \in M$,

Particija jedinice

(za "lijepljenje" lokalnih objekata u globalne.)

Definicija

Neka je $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *otvoren pokrivač glatke mnogostrukosti* M.

(Glatka) Particija jedinice podredjena pokrivaču $\mathcal{U}$ *je familija* **glatkih funkcija** $\{\varphi_\alpha : M \to \mathbf{R}\}_{\alpha \in A}$ *koja ima sljedeća svojstva:*

1. $0 \leq \varphi_\alpha(x) \leq 1$, $\alpha \in A$, $x \in M$,
2. $\mathrm{supp}\ \varphi_\alpha \subset U_\alpha$,

Particija jedinice

(za "lijepljenje" lokalnih objekata u globalne.)

Definicija

Neka je $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *otvoren pokrivač glatke mnogostrukosti* M.

(Glatka) Particija jedinice podredjena pokrivaču $\mathcal{U}$ *je familija* **glatkih funkcija** $\{\varphi_\alpha : M \to \mathbf{R}\}_{\alpha \in A}$ *koja ima sljedeća svojstva:*

1. $0 \leq \varphi_\alpha(x) \leq 1$, $\alpha \in A$, $x \in M$,
2. $\mathrm{supp}\ \varphi_\alpha \subset U_\alpha$,
3. *familija nosača* $\{\mathrm{supp}\ \varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *je lokalno konačna,*

Particija jedinice

(za "lijepljenje" lokalnih objekata u globalne.)

Definicija

Neka je $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *otvoren pokrivač glatke mnogostrukosti* M.

(Glatka) Particija jedinice podredjena pokrivaču $\mathcal{U}$ *je familija* **glatkih funkcija** $\{\varphi_\alpha : M \to \mathbf{R}\}_{\alpha \in A}$ *koja ima sljedeća svojstva:*

1. $0 \leq \varphi_\alpha(x) \leq 1$, $\alpha \in A$, $x \in M$,
2. $\mathrm{supp}\ \varphi_\alpha \subset U_\alpha$,
3. *familija nosača* $\{\mathrm{supp}\ \varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *je lokalno konačna,*
4. $\sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(x) = 1$, $x \in M$.

Particija jedinice

(za "lijepljenje" lokalnih objekata u globalne.)

Definicija

Neka je $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ otvoren pokrivač glatke mnogostrukosti M.

(Glatka) Particija jedinice podredjena pokrivaču $\mathcal{U}$ je familija **glatkih funkcija** $\{\varphi_\alpha : M \to \mathbf{R}\}_{\alpha \in A}$ *koja ima sljedeća svojstva:*

1. $0 \leq \varphi_\alpha(x) \leq 1$, $\alpha \in A$, $x \in M$,
2. $\operatorname{supp} \varphi_\alpha \subset U_\alpha$,
3. *familija nosača* $\{\operatorname{supp} \varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *je lokalno konačna,*
4. $\sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(x) = 1$, $x \in M$.

gdje je nosač od f definirane na M

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{p \in M : f(p) \neq 0\}}.$$

Familija skupova $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, podskupova topološkog prostora X naziva se *lokalno konačnom* ako za svaku točku $p \in X$ postoji okolina koja siječe samo konačno mnogo skupova U_α.

Familija skupova $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, podskupova topološkog prostora X naziva se *lokalno konačnom* ako za svaku točku $p \in X$ postoji okolina koja siječe samo konačno mnogo skupova U_α.

Teorem (Egzistencija glatke particije jedinice)

Ako je M glatka mnogostrukost i $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ otvoren pokrivač od M, tada postoji (glatka) particija jedinice podredjena pokrivaču $\mathcal{X}$.

Familija skupova $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, podskupova topološkog prostora X naziva se *lokalno konačnom* ako za svaku točku $p \in X$ postoji okolina koja siječe samo konačno mnogo skupova U_α.

Teorem (Egzistencija glatke particije jedinice)

Ako je M glatka mnogostrukost i $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ otvoren pokrivač od M, tada postoji (glatka) particija jedinice podredjena pokrivaču $\mathcal{X}$.

Particija jedinice postoji i u klasi C^k-mnogostrukosti, $k \leq \infty$.

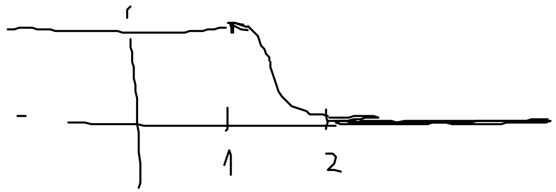
Dokaz (skica).

1. Funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

je glatka.

Nastavak dokaza.



2. Postoji glatka funkcija (*cutoff function*) $h : \mathbf{R} \to [0,1]$ takva da je

$$h(t) \equiv \begin{cases} 1, & t \leq 1 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$$

$$0 < h(t) < 1, \quad \text{za } 1 < t < 2.$$

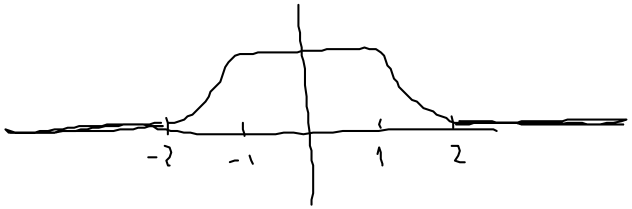
Nastavak dokaza.

2. Postoji glatka funkcija (*cutoff function*) $h : \mathbf{R} \to [0,1]$ takva da je
$$h(t) \equiv \begin{cases} 1, & t \le 1 \\ 0, & t \ge 2 \end{cases}$$
$$0 < h(t) < 1, \quad \text{za } 1 < t < 2.$$

Jedna takva funkcija h je dana kao

$$h(t) = \frac{f(2-t)}{f(2-t) + f(t-1)}.$$

Nastavak dokaza.



3. Postoji glatka funkcija (*bump function*) $H : \mathbf{R}^n \to [0,1]$ takva da je

$$H \equiv 1 \quad \text{na} \; \overline{B}_1(0) \quad \text{i} \; \operatorname{supp} H = \overline{B}_2(0).$$

Nastavak dokaza.

3. Postoji glatka funkcija (*bump function*) $H : \mathbf{R}^n \to [0,1]$ takva da je
$$H \equiv 1 \quad \text{na } \overline{B}_1(0) \quad \text{i } \operatorname{supp} H = \overline{B}_2(0).$$

Funkcija H je na primjer dana kao

$$H(x) = h(|x|).$$

Nastavak dokaza.

4. Svaka glatka mnogostrukost je parakompaktna.

Nastavak dokaza.

4. Svaka glatka mnogostrukost je parakompaktna.

   Svaki glatki pokrivač ima regularno profinjenje (tj. profinjenje W_i koje je prebrojivo i lokalno konačno, svaki W_i je domena glatkog koordinatnog preslikavanja $\varphi : W_i \to \mathbf{R}^n$, $\varphi(W_i) \subset B_3(0)$, familija $\{U_\alpha\}$, $U_\alpha := \varphi^{-1}(B_1(0))$ pokriva M).

Nastavak dokaza.

5. $\{W_i\}$ regularno profinjenje, $\varphi(W_i) \subset B_3(0)$,
   $U_i = \varphi^{-1}(B_1(0))$, $V_i = \varphi^{-1}(B_2(0))$.

Nastavak dokaza.

5. $\{W_i\}$ regularno profinjenje, $\varphi(W_i) \subset B_3(0)$, $U_i = \varphi^{-1}(B_1(0))$, $V_i = \varphi^{-1}(B_2(0))$.

   Definiramo $f_i : M \to \mathbf{R}$

$$f_i = \begin{cases} H \circ \varphi_i & \text{on } W_i \\ 0 & \text{on } M \setminus \bar{V}_i \end{cases}$$

Nastavak dokaza.

5. $\{W_i\}$ regularno profinjenje, $\varphi(W_i) \subset B_3(0)$, $U_i = \varphi^{-1}(B_1(0))$, $V_i = \varphi^{-1}(B_2(0))$.

   Definiramo $f_i : M \to \mathbf{R}$

$$f_i = \begin{cases} H \circ \varphi_i & \text{on } W_i \\ 0 & \text{on } M \setminus \bar{V}_i \end{cases}$$

   Funkcija f je glatka, supp$f \subset W_i$.

Nastavak dokaza.

5. $\{W_i\}$ regularno profinjenje, $\varphi(W_i) \subset B_3(0)$,
   $U_i = \varphi^{-1}(B_1(0))$, $V_i = \varphi^{-1}(B_2(0))$.

   Definiramo $f_i : M \to \mathbf{R}$

$$f_i = \begin{cases} H \circ \varphi_i & \text{on } W_i \\ 0 & \text{on } M \setminus \bar{V}_i \end{cases}$$

   Funkcija f je glatka, $\mathrm{supp} f \subset W_i$.

   Tražene funkcije su

$$g_i(x) = \frac{f_i(x)}{\sum_j f_j(x)}.$$

Teorem (Egzistencija glatke "bump" funkcije)

Neka je M glatka mnogostrukost.

Teorem (Egzistencija glatke "bump"funkcije)

Neka je M glatka mnogostrukost.

Tada za svaki zatvoren skup $A \subset M$ i otvoren skup U koji sadrži A postoji glatka "bump"funkcija za A s nosačem u U, tj. glatka funkcija za koju vrijedi

$$\varphi : M \to \mathbf{R}, \ \ 0 \leq \varphi \leq 1 \ \text{na} \ M, \ \ \varphi \equiv 1 \ \text{na} \ A, \ \ \operatorname{supp} \varphi \subset U.$$

Teorem (Egzistencija glatke "bump" funkcije)

Neka je M glatka mnogostrukost.

Tada za svaki zatvoren skup $A \subset M$ i otvoren skup U koji sadrži A postoji glatka "bump" funkcija za A s nosačem u U, tj. glatka funkcija za koju vrijedi

$$\varphi : M \to \mathbf{R}, \;\; 0 \leq \varphi \leq 1 \text{ na } M, \;\; \varphi \equiv 1 \text{ na } A, \;\; \operatorname{supp} \varphi \subset U.$$

Dokaz. Neka je $U_0 = U$, $U_1 = M \setminus A$ i neka je $\{\varphi_0, \varphi_1\}$ (glatka) particija jedinice podredjena pokrivaču $\{U_0, U_1\}$.

Teorem (Egzistencija glatke "bump"funkcije)

Neka je M glatka mnogostrukost.

Tada za svaki zatvoren skup $A \subset M$ i otvoren skup U koji sadrži A postoji glatka "bump"funkcija za A s nosačem u U, tj. glatka funkcija za koju vrijedi

$$\varphi : M \to \mathbf{R}, \;\; 0 \le \varphi \le 1 \text{ na } M, \;\; \varphi \equiv 1 \text{ na } A, \;\; \operatorname{supp} \varphi \subset U.$$

Dokaz. Neka je $U_0 = U$, $U_1 = M \setminus A$ i neka je $\{\varphi_0, \varphi_1\}$ (glatka) particija jedinice podredjena pokrivaču $\{U_0, U_1\}$.

Tada je $\varphi_1 \equiv 0$ na A, $\varphi_0 = \sum_i \varphi_i = 1$ na A.

Teorem (Egzistencija glatke "bump" funkcije)

Neka je M glatka mnogostrukost.

Tada za svaki zatvoren skup $A \subset M$ i otvoren skup U koji sadrži A postoji glatka "bump" funkcija za A s nosačem u U, tj. glatka funkcija za koju vrijedi

$$\varphi : M \to \mathbf{R}, \;\; 0 \leq \varphi \leq 1 \text{ na } M, \;\; \varphi \equiv 1 \text{ na } A, \;\; \operatorname{supp} \varphi \subset U.$$

Dokaz. Neka je $U_0 = U$, $U_1 = M \setminus A$ i neka je $\{\varphi_0, \varphi_1\}$ (glatka) particija jedinice podredjena pokrivaču $\{U_0, U_1\}$.

Tada je $\varphi_1 \equiv 0$ na A, $\varphi_0 = \sum_i \varphi_i = 1$ na A.

Prema tome, tražena funkcija je φ_0. $\square$