Glatke i Riemannove mnogostrukosti

Željka Milin-Šipuš, Pavle Pandžić i Juraj Šiftar

Geometrija i topologija, drugi dio

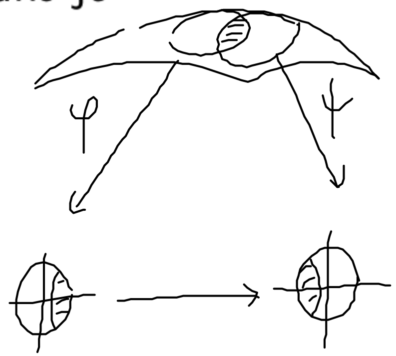
Ponovimo: Topološke i glatke mnogostrukosti

Topološka mnogostrukost dimenzije n: Hausdorffov topološki prostor M s prebrojivom bazom, takav da $\forall p \in M$, $\exists$ okolina U i homeomorfizam $\varphi : U \to \tilde{U}$ na otvoren podskup $\tilde{U}$ od $\mathbf{R}^n$. Par (U, φ) zove se karta na M.

Ponovimo: Topološke i glatke mnogostrukosti

Topološka mnogostrukost dimenzije n: Hausdorffov topološki prostor M s prebrojivom bazom, takav da $\forall p \in M$, $\exists$ okolina U i homeomorfizam $\varphi : U \to \tilde{U}$ na otvoren podskup $\tilde{U}$ od $\mathbf{R}^n$. Par (U, φ) zove se karta na M.

Dvije karte $(U, \varphi), (V, \psi)$ na M su glatko povezane ako je $U \cap V = \emptyset$ ili ako je preslikavanje



$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

glatki difeomorfizam (otvorenih podskupova od $\mathbf{R}^n$).

Ponovimo: Topološke i glatke mnogostrukosti

Topološka mnogostrukost dimenzije n: Hausdorffov topološki prostor M s prebrojivom bazom, takav da $\forall p \in M$, $\exists$ okolina U i homeomorfizam $\varphi : U \to \tilde{U}$ na otvoren podskup $\tilde{U}$ od $\mathbf{R}^n$. Par (U, φ) zove se karta na M.

Dvije karte $(U, \varphi), (V, \psi)$ na M su glatko povezane ako je $U \cap V = \emptyset$ ili ako je preslikavanje

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

glatki difeomorfizam (otvorenih podskupova od $\mathbf{R}^n$).

Glatki atlas $\mathcal{A}$ na M je familija karata čije domene pokrivaju M, tako da su svake dvije karte u $\mathcal{A}$ glatko povezane. Glatki atlas $\mathcal{A}$ je maksimalan ako nije sadržan niti u jednom striktno većem glatkom atlasu.

Ponovimo: Topološke i glatke mnogostrukosti

Glatka struktura na M je maksimalan glatki atlas na M.

Ponovimo: Topološke i glatke mnogostrukosti

Glatka struktura na M je maksimalan glatki atlas na M.

Glatka mnogostrukost je uredjen par $(M, \mathcal{A})$, gdje je M topološka mnogostrukost, a $\mathcal{A}$ maksimalan glatki atlas na M.

Ponovimo: Topološke i glatke mnogostrukosti

Glatka struktura na M je maksimalan glatki atlas na M.

Glatka mnogostrukost je uredjen par $(M, \mathcal{A})$, gdje je M topološka mnogostrukost, a $\mathcal{A}$ maksimalan glatki atlas na M.

Za topološku mnogostrukost M vrijedi:

1. Svaki je glatki atlas od M sadržan u jedinstvenom maksimalnom atlasu.

Ponovimo: Topološke i glatke mnogostrukosti

Glatka struktura na M je maksimalan glatki atlas na M.

Glatka mnogostrukost je uredjen par $(M, \mathcal{A})$, gdje je M topološka mnogostrukost, a $\mathcal{A}$ maksimalan glatki atlas na M.

Za topološku mnogostrukost M vrijedi:

1. Svaki je glatki atlas od M sadržan u jedinstvenom maksimalnom atlasu.
2. Dva glatka atlasa od M odredjuju isti maksimalan atlas ako i samo ako je njihova unija glatki atlas.

Primjeri glatkih mnogostrukosti

1. $\mathbf{R}^n$: Standardna glatka struktura je odredjena jednom kartom $(\mathbf{R}^n, Id)$.

Primjeri glatkih mnogostrukosti

1. $\mathbf{R}^n$: Standardna glatka struktura je odredjena jednom kartom $(\mathbf{R}^n, Id)$.
2. $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\psi(x) = x^3$ je homeomorpfizam $\Rightarrow$ Karta $(\mathbf{R}, \psi)$ definira glatki atlas na $\mathbf{R}$. Pripadna glatka struktura nije ista kao standardna.

Primjeri glatkih mnogostrukosti

1. $\mathbf{R}^n$: Standardna glatka struktura je odredjena jednom kartom $(\mathbf{R}^n, Id)$.
2. $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\psi(x) = x^3$ je homeomorpfizam $\Rightarrow$ Karta $(\mathbf{R}, \psi)$ definira glatki atlas na $\mathbf{R}$. Pripadna glatka struktura nije ista kao standardna.
3. Konačnodimenzionalni vektorski prostor V: globalna karta dana je koordinatnim preslikavanjem $E : V \to \mathbf{R}^n$, koje svakom vektoru pridružuje njegove koeficijente u fiksnoj bazi prostora V. Glatka struktura ne ovisi o izboru baze zbog glatkoće matrice prijelaza.

Primjeri glatkih mnogostrukosti

1. $\mathbf{R}^n$: Standardna glatka struktura je odredjena jednom kartom $(\mathbf{R}^n, Id)$.
2. $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\psi(x) = x^3$ je homeomorpfizam $\Rightarrow$ Karta $(\mathbf{R}, \psi)$ definira glatki atlas na $\mathbf{R}$. Pripadna glatka struktura nije ista kao standardna.
3. Konačnodimenzionalni vektorski prostor V: globalna karta dana je koordinatnim preslikavanjem $E : V \to \mathbf{R}^n$, koje svakom vektoru pridružuje njegove koeficijente u fiksnoj bazi prostora V. Glatka struktura ne ovisi o izboru baze zbog glatkoće matrice prijelaza.
4. Posebno, prostor matrica $M_{mn}(\mathbf{R})$, prostor simetričnih matrica ($A^T = A$), te prostor antisimetričnih matrica ($A^T = -A$) su glatke mnogostrukosti (odgovarajućih dimenzija).

Primjeri glatkih mnogostrukosti

5 Otvorene podmnogostrukosti: ako je U otvoren podskup glatke n-mnogostrukosti M, tada je

$$\mathcal{A}_U = \{(V, \varphi|_V) : V = W \cap U,\ (W, \varphi) \in \mathcal{A}_M\}$$

glatki atlas na U, pa je U glatka n-mnogostrukost koju nazivamo *otvorenom podmnogostrukošću* od M.

Primjeri glatkih mnogostrukosti

5. Otvorene podmnogostrukosti: ako je U otvoren podskup glatke n-mnogostrukosti M, tada je

$$\mathcal{A}_U = \{(V, \varphi|_V) : V = W \cap U,\ (W, \varphi) \in \mathcal{A}_M\}$$

glatki atlas na U, pa je U glatka n-mnogostrukost koju nazivamo *otvorenom podmnogostrukošću* od M.

6. Posebno, Opća linearna grupa, te matrice maksimalnog ranga, su otvorene podmnogostrukosti u prostorima matrica.

Primjer 7. Sfera – standardna glatka struktura

Sjetimo se da su karte $\{(U_i^{\pm}, \varphi_i^{\pm})\}$, $i = 1, \ldots, n+1$ na sferi $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ bile zadane hemisferama.

Primjer 7. Sfera – standardna glatka struktura

Sjetimo se da su karte $\{(U_i^{\pm}, \varphi_i^{\pm})\}$, $i = 1, \ldots, n+1$ na sferi $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ bile zadane hemisferama.

Funkcije prijelaza $\varphi_i^{\pm} \circ (\varphi_j^{\pm})^{-1}$, za primjerice $i < j$, su

$$\varphi_i^{\pm} \circ (\varphi_j^{\pm})^{-1}(u^1, \ldots, u^n) = (u^1, \ldots, \widehat{u^i}, \ldots, \pm\sqrt{1 - |u|^2}, \ldots, u^n).$$

Primjer 7. Sfera – standardna glatka struktura

Sjetimo se da su karte $\{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)\}$, $i = 1, \ldots, n+1$ na sferi $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ bile zadane hemisferama.

Funkcije prijelaza $\varphi_i^\pm \circ (\varphi_j^\pm)^{-1}$, za primjerice $i < j$, su

$$\varphi_i^\pm \circ (\varphi_j^\pm)^{-1}(u^1, \ldots, u^n) = (u^1, \ldots, \widehat{u^i}, \ldots, \pm\sqrt{1 - |u|^2}, \ldots, u^n).$$

Prema tome, karte su glatko povezane i dobivamo (standardnu) glatku strukturu na S^n.

Primjer 7. Sfera – standardna glatka struktura

Sjetimo se da su karte $\{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)\}$, $i = 1, \dots, n+1$ na sferi $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ bile zadane hemisferama.

Funkcije prijelaza $\varphi_i^\pm \circ (\varphi_j^\pm)^{-1}$, za primjerice $i < j$, su

$$\varphi_i^\pm \circ (\varphi_j^\pm)^{-1}(u^1, \dots, u^n) = (u^1, \dots, \widehat{u^i}, \dots, \pm\sqrt{1 - |u|^2}, \dots, u^n).$$

Prema tome, karte su glatko povezane i dobivamo (standardnu) glatku strukturu na S^n.

Ista je glatka struktura dana atlasom od dvije karte koje su zadane stereografskim projekcijama.

Primjer 8. Projektivni prostor

Sjetimo se da je $\mathbf{RP}^n$ definiran kao prostor pravaca kroz ishodište u $\mathbf{R}^{n+1}$. Projekcija $\pi : \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{RP}^n$ definirana je sa $\pi(x) = [x]$, gdje je $[x]$ potprostor od $\mathbf{R}^{n+1}$ razapet s x. Topologija je kvocijentna: $U \subset \mathbf{RP}^n$ je otvoren akko je $\pi^{-1}(U)$ otvoren u $\mathbf{R}^{n+1}$.

Primjer 8. Projektivni prostor

Sjetimo se da je $\mathbf{RP}^n$ definiran kao prostor pravaca kroz ishodište u $\mathbf{R}^{n+1}$. Projekcija $\pi : \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{RP}^n$ definirana je sa $\pi(x) = [x]$, gdje je $[x]$ potprostor od $\mathbf{R}^{n+1}$ razapet s x. Topologija je kvocijentna: $U \subset \mathbf{RP}^n$ je otvoren akko je $\pi^{-1}(U)$ otvoren u $\mathbf{R}^{n+1}$.

Karte smo definirali kao $U_i = \pi(\tilde{U}_i)$, $i = 1, \ldots, n+1$, gdje je

$$\tilde{U}_i = \{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} : x^i \neq 0\} \subset \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}.$$

Primjer 8. Projektivni prostor

Homeomorfizmi $\varphi_i : U_i \to \mathbf{R}^n$ su dani sa

$$\varphi_i[x^1, \dots, x^{n+1}] = (\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i});$$
$$\varphi_i^{-1}(u^1, \dots, u^n) = [u^1, \dots, u^{i-1}, 1, u^i, \dots, u^n].$$

Primjer 8. Projektivni prostor

Homeomorfizmi $\varphi_i : U_i \to \mathbf{R}^n$ su dani sa

$$\varphi_i[x^1, \ldots, x^{n+1}] = (\frac{x^1}{x^i}, \ldots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \ldots, \frac{x^{n+1}}{x^i});$$

$$\varphi_i^{-1}(u^1, \ldots, u^n) = [u^1, \ldots, u^{i-1}, 1, u^i, \ldots, u^n].$$

Funkcije prijelaza $\varphi_i \circ (\varphi_j)^{-1}$, za primjerice $i > j$, su

$$\varphi_i \circ (\varphi_j)^{-1}(u^1, \ldots, u^n) =$$

$$(\frac{u^1}{\underset{u^i}{\cancel{u^j}}}, \ldots, \frac{u^{j-1}}{\underset{u^i}{\cancel{u^j}}}, \frac{u^{j+1}}{u^j}, \ldots, \frac{u^{i-1}}{u^j}, \frac{1}{u^j}, \frac{u^i}{u^j}, \ldots, \frac{u^n}{u^j}).$$

Primjer 8. Projektivni prostor

Homeomorfizmi $\varphi_i : U_i \to \mathbf{R}^n$ su dani sa

$$\varphi_i[x^1, \dots, x^{n+1}] = \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i}\right);$$
$$\varphi_i^{-1}(u^1, \dots, u^n) = [u^1, \dots, u^{i-1}, 1, u^i, \dots, u^n].$$

Funkcije prijelaza $\varphi_i \circ (\varphi_j)^{-1}$, za primjerice $i > j$, su

$$\varphi_i \circ (\varphi_j)^{-1}(u^1, \dots, u^n) =$$
$$\left(\frac{u^1}{u^j}, \dots, \frac{u^{j-1}}{u^j}, \frac{u^{j+1}}{u^j}, \dots, \frac{u^{i-1}}{u^j}, \frac{1}{u^j}, \frac{u^i}{u^j}, \dots, \frac{u^n}{u^j}\right).$$

Vidimo da su karte glatko povezane, pa je $\mathbf{RP}^n$ glatka mnogostrukost.

Primjer 9. Glatke produktne mnogostrukosti, n-torus

Atlas se sastoji od karata $(U_1 \times \cdots \times U_k, \varphi_1 \times \cdots \times \varphi_k)$.

Primjer 9. Glatke produktne mnogostrukosti, n-torus

Atlas se sastoji od karata $(U_1 \times \cdots \times U_k, \varphi_1 \times \cdots \times \varphi_k)$.

Funkcije prijelaza

$$\psi_1 \times \cdots \times \psi_k \circ (\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_k)^{-1} = (\psi_1 \circ \varphi_1 \cancel{)}^{-1}) \times \cdots \times (\psi_k \circ \varphi_k \cancel{)}^{-1})$$

su glatke, pa je produkt glatka mnogostrukost.

Primjer 9. Glatke produktne mnogostrukosti, n-torus

Atlas se sastoji od karata $(U_1 \times \cdots \times U_k, \varphi_1 \times \cdots \times \varphi_k)$.

Funkcije prijelaza

$$\psi_1 \times \cdots \times \psi_k \circ (\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_k)^{-1} = (\psi_1 \circ \varphi_1)^{-1} \times \cdots \times (\psi_k \circ \varphi_k)^{-1}$$

su glatke, pa je produkt glatka mnogostrukost.

Posebno, n-torus, $\mathbf{T}^n = (S^1)^n$ je glatka mnogostrukost.

Primjer 10. Graf neprekidne funkcije

Prisjetimo se: $U \subset \mathbf{R}^n$ otvoren; $F : U \to \mathbf{R}^k$ neprekidna

Primjer 10. Graf neprekidne funkcije

Prisjetimo se: $U \subset \mathbf{R}^n$ otvoren; $F : U \to \mathbf{R}^k$ neprekidna

Graf od F: topološki potprostor od $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$, zadan sa

$$\Gamma(F) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k : x \in U \ \text{ i } \ y = F(x)\}.$$

Primjer 10. Graf neprekidne funkcije

Prisjetimo se: $U \subset \mathbf{R}^n$ otvoren; $F : U \to \mathbf{R}^k$ neprekidna

Graf od F: topološki potprostor od $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$, zadan sa

$$\Gamma(F) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k : x \in U \text{ i } y = F(x)\}.$$

$\Gamma(F)$ je homeomorfan s U, pomoću

$$\varphi : \Gamma(F) \to U, \ \ \varphi(x, y) = x; \qquad \varphi^{-1}(x) = (x, F(x)).$$

Primjer 10. Graf neprekidne funkcije

Prisjetimo se: $U \subset \mathbf{R}^n$ otvoren; $F : U \to \mathbf{R}^k$ neprekidna

Graf od F: topološki potprostor od $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$, zadan sa

$$\Gamma(F) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k : x \in U \text{ i } y = F(x)\}.$$

$\Gamma(F)$ je homeomorfan s U, pomoću

$$\varphi : \Gamma(F) \to U, \ \ \varphi(x, y) = x; \qquad \varphi^{-1}(x) = (x, F(x)).$$

Slijedi da je $\Gamma(F)$ topološka mnogostrukost dimenzije n, s jednom (globalnom) kartom $(\Gamma(F), \varphi)$.

Primjer 10. Graf neprekidne funkcije

Slijedi da je $\Gamma(F)$ glatka mnogostrukost. Naime, atlas sa samo jednom kartom je automatski gladak – ta je karta glatko povezana sama sa sobom, a nema neke druge karte s kojom bi trebalo provjeravati glatku povezanost.

Primjer 10. Graf neprekidne funkcije

Slijedi da je $\Gamma(F)$ glatka mnogostrukost. Naime, atlas sa samo jednom kartom je automatski gladak – ta je karta glatko povezana sama sa sobom, a nema neke druge karte s kojom bi trebalo provjeravati glatku povezanost.

To na prvi pogled izgleda zbunjujuće, jer F nije nužno glatka funkcija. Npr. graf funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, je glatka mnogostrukost.

Primjer 10. Graf neprekidne funkcije

Slijedi da je $\Gamma(F)$ glatka mnogostrukost. Naime, atlas sa samo jednom kartom je automatski gladak – ta je karta glatko povezana sama sa sobom, a nema neke druge karte s kojom bi trebalo provjeravati glatku povezanost.

To na prvi pogled izgleda zbunjujuće, jer F nije nužno glatka funkcija. Npr. graf funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, je glatka mnogostrukost.

Stvar je u tome da smo pomoću φ identificirali $\Gamma(F)$ sa U, koji jest glatka mnogostrukost, pa smo tu glatku strukturu povukli na $\Gamma(F)$. Činjenica da graf od $|x|$ ima šiljak nije svojstvo same mnogostrukosti, nego njezinog smještenja u $\mathbb{R}^2$. Naime, vidjet ćemo da ako F nije glatka, onda inkluzija $\Gamma(F)$ u $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$ nije glatko preslikavanje.

Konstrukcija glatkih mnogostrukosti

Propozicija. Neka je M skup i neka je dana familija (U_α) podskupova od M i injekcija $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbf{R}^n$ za svaki α tako da vrijedi

Konstrukcija glatkih mnogostrukosti

Propozicija. Neka je M skup i neka je dana familija (U_α) podskupova od M i injekcija $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbf{R}^n$ za svaki α tako da vrijedi

1. Za svaki α, $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ je otvoren podskup od $\mathbf{R}^n$,

Konstrukcija glatkih mnogostrukosti

Propozicija. Neka je M skup i neka je dana familija (U_α) podskupova od M i injekcija $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbf{R}^n$ za svaki α tako da vrijedi

1. Za svaki α, $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ je otvoren podskup od $\mathbf{R}^n$,
2. Za svaki α i β, $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ i $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ su otvoreni u $\mathbf{R}^n$,

Konstrukcija glatkih mnogostrukosti

Propozicija. Neka je M skup i neka je dana familija (U_α) podskupova od M i injekcija $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbf{R}^n$ za svaki α tako da vrijedi

1. Za svaki α, $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ je otvoren podskup od $\mathbf{R}^n$,
2. Za svaki α i β, $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ i $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ su otvoreni u $\mathbf{R}^n$,
3. Za $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ je difeomorfizam,

Konstrukcija glatkih mnogostrukosti

4. Prebrojivo mnogo skupova U_α pokrivaju M,

Konstrukcija glatkih mnogostrukosti

4. Prebrojivo mnogo skupova U_α pokrivaju M,
5. Za različite točke $p, q \in M$ postoji neki U_α koji ih obje sadrži ili postoje disjunktni U_α, U_β takvi da je $p \in U_\alpha$, $q \in U_\beta$.

Konstrukcija glatkih mnogostrukosti

4. Prebrojivo mnogo skupova U_α pokrivaju M,
5. Za različite točke $p, q \in M$ postoji neki U_α koji ih obje sadrži ili postoje disjunktni U_α, U_β takvi da je $p \in U_\alpha$, $q \in U_\beta$.

Tada M ima jedinstvenu strukturu glatke mnogostrukosti takve da je svaki $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ glatka karta.

Krivulje i plohe u klasičnoj diferencijalnoj geometriji

(Parametrizirana) krivulja u $\mathbf{R}^n$ je glatko preslikavanje $c : I \to \mathbf{R}^n$, $I \subset \mathbf{R}$ otvoren interval. Krivulja je regularna ako je $\dot{c}(t) \neq 0$, $t \in I$. [doCarmo]

Krivulje i plohe u klasičnoj diferencijalnoj geometriji

Ploha S u $\mathbf{R}^3$ je podskup od $\mathbf{R}^3$ takav da za svaki $p \in S$ postoji okolina V u $\mathbf{R}^3$ i preslikavanje $\mathbf{x} : U \to V \cap S$, gdje je $U \subset \mathbf{R}^2$ otvoren skup tako da vrijedi:

Krivulje i plohe u klasičnoj diferencijalnoj geometriji

Ploha S u $\mathbf{R}^3$ je podskup od $\mathbf{R}^3$ takav da za svaki $p \in S$ postoji okolina V u $\mathbf{R}^3$ i preslikavanje $\mathbf{x} : U \to V \cap S$, gdje je $U \subset \mathbf{R}^2$ otvoren skup tako da vrijedi:

1. preslikavanje $\mathbf{x}$ je homeomorfizam.
2. preslikavanje $\mathbf{x}$ je glatko.

Krivulje i plohe u klasičnoj diferencijalnoj geometriji

Ploha S u $\mathbf{R}^3$ je podskup od $\mathbf{R}^3$ takav da za svaki $p \in S$ postoji okolina V u $\mathbf{R}^3$ i preslikavanje $\mathbf{x} : U \to V \cap S$, gdje je $U \subset \mathbf{R}^2$ otvoren skup tako da vrijedi:

1. preslikavanje $\mathbf{x}$ je homeomorfizam.
2. preslikavanje $\mathbf{x}$ je glatko.

Ploha je regularna ako je diferencijal $d\mathbf{x} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ injektivan.

Krivulje i plohe u klasičnoj diferencijalnoj geometriji

Ploha S u $\mathbf{R}^3$ je podskup od $\mathbf{R}^3$ takav da za svaki $p \in S$ postoji okolina V u $\mathbf{R}^3$ i preslikavanje $\mathbf{x} : U \to V \cap S$, gdje je $U \subset \mathbf{R}^2$ otvoren skup tako da vrijedi:

1. preslikavanje $\mathbf{x}$ je homeomorfizam.
2. preslikavanje $\mathbf{x}$ je glatko.

Ploha je regularna ako je diferencijal $d\mathbf{x} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ injektivan.

Preslikavanje $\mathbf{x}$ naziva se *lokalna parametrizacija* (karta) (eng. patch, chart). [doCarmo]

Krivulje i plohe u klasičnoj diferencijalnoj geometriji

U homeo $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$

Lokalna parametrizacija na mnogostrukostima: glatko smještenje $\mathbf{x} : U \to M$ čija je slika otvoren podskup od M, U otvoren u M [Lee].

Krivulje i plohe u klasičnoj diferencijalnoj geometriji

Lokalna parametrizacija na mnogostrukostima: glatko smještenje $\mathbf{x} : U \to M$ čija je slika otvoren podskup od M, U otvoren u M [Lee].

Promjena koordinata: Neka je S regularna ploha, $p \in S$, $\mathbf{x} : U \subset \mathbf{R}^2 \to S$, $\mathbf{y} : V \subset \mathbf{R}^2 \to S$ dvije parametrizacije od S takve da je $p \in \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V) := W$.

Krivulje i plohe u klasičnoj diferencijalnoj geometriji

Lokalna parametrizacija na mnogostrukostima: glatko smještenje $\mathbf{x} : U \to M$ čija je slika otvoren podskup od M, U otvoren u M [Lee].

Promjena koordinata: Neka je S regularna ploha, $p \in S$, $\mathbf{x} : U \subset \mathbf{R}^2 \to S$, $\mathbf{y} : V \subset \mathbf{R}^2 \to S$ dvije parametrizacije od S takve da je $p \in \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V) := W$.

Tada je preslikavanje $\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y}$ glatki difeomorfizam sa $\mathbf{y}^{-1}(W)$ na $\mathbf{x}^{-1}(W)$. To se preslikavanje zove promjena koordinata.

Krivulje i plohe u klasičnoj diferencijalnoj geometriji

Lokalna parametrizacija sfere radijusa R (tzv. geografska parametrizacija)

Krivulje i plohe u klasičnoj diferencijalnoj geometriji

Lokalna parametrizacija sfere radijusa R (tzv. geografska parametrizacija)

$$\mathbf{x}(u,v) = (R\cos u\cos v, R\sin u\cos v, R\sin v),$$
$$u \in (0, 2\pi),\quad v \in (-\pi/2, \pi/2)$$

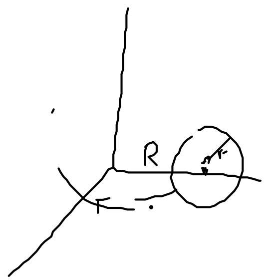
Krivulje i plohe u klasičnoj diferencijalnoj geometriji

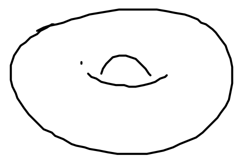
Lokalna parametrizacija torusa (poprečna kružnica je radijusa r, središnja radijusa R)

Krivulje i plohe u klasičnoj diferencijalnoj geometriji

Lokalna parametrizacija torusa (poprečna kružnica je radijusa r, središnja radijusa R)

$$\mathbf{x}(u,v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u),$$
$$u, v \in (0, 2\pi), \quad r < R.$$





Krivulje i plohe u klasičnoj diferencijalnoj geometriji

Lokalna parametrizacija torusa (poprečna kružnica je radijusa r, središnja radijusa R)

$$\mathbf{x}(u,v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u),$$
$$u, v \in (0, 2\pi), \quad r < R.$$

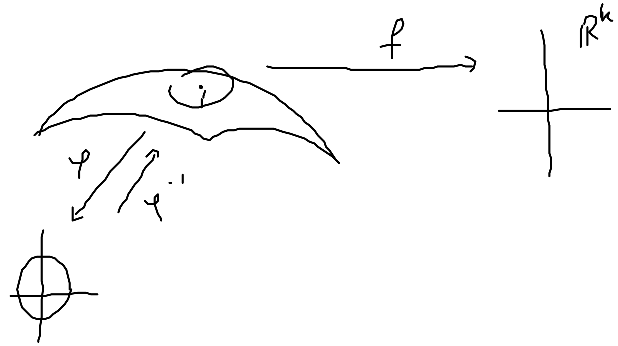
Postoji glatko smještenje torusa kao produktne mnogostrukosti $T^2 = S^1 \times S^1$ u $\mathbf{R}^3$ kojemu je slika (parametrizirani) torus.

Glatka preslikavanja

Definicija

Neka je M glatka mnogostrukost.

Glatka preslikavanja



Definicija

Neka je M glatka mnogostrukost.

Funkcija $f : M \to \mathbf{R}^k$ se naziva glatkom ako za svaku točku $p \in M$ postoji glatka karta (U, φ) od M čija domena sadrži p i takva da je kompozicija $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbf{R}^k$ glatka funkcija.

Glatka preslikavanja

Definicija

Neka je M glatka mnogostrukost.

Funkcija $f : M \to \mathbf{R}^k$ se naziva glatkom ako za svaku točku $p \in M$ postoji glatka karta (U, φ) od M čija domena sadrži p i takva da je kompozicija $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbf{R}^k$ glatka funkcija.

Skup svih glatkih funkcija $f : M \to \mathbf{R}^k$ označavamo sa $C^\infty(M, \mathbf{R}^k)$; specijalno skup svih realnih glatkih funkcija na M označavamo sa $C^\infty(M)$.

Glatka preslikavanja

Uočimo:

- $C^\infty(M, \mathbf{R}^k)$ je vektorski prostor, a $C^\infty(M)$ je komutativni prsten i komutativna i asocijativna algebra nad $\mathbf{R}$ (uz množenje funkcija definirano po točkama).

Glatka preslikavanja

Uočimo:

- $C^\infty(M, \mathbf{R}^k)$ je vektorski prostor, a $C^\infty(M)$ je komutativni prsten i komutativna i asocijativna algebra nad $\mathbf{R}$ (uz množenje funkcija definirano po točkama).
- Za funkciju $f : M \to \mathbf{R}^k$ i kartu (U, φ), funkcija $\hat{f} = f \circ \varphi^{-1}$ naziva se *koordinatnim prikazom funkcije* f. Funkcija f je glatka ako i samo ako je njen koordinatni prikaz glatka funkcija u nekoj karti oko svake točke.

Glatka preslikavanja

Uočimo:

- $C^\infty(M, \mathbf{R}^k)$ je vektorski prostor, a $C^\infty(M)$ je komutativni prsten i komutativna i asocijativna algebra nad $\mathbf{R}$ (uz množenje funkcija definirano po točkama).
- Za funkciju $f : M \to \mathbf{R}^k$ i kartu (U, φ), funkcija $\hat{f} = f \circ \varphi^{-1}$ naziva se *koordinatnim prikazom funkcije* f. Funkcija f je glatka ako i samo ako je njen koordinatni prikaz glatka funkcija u nekoj karti oko svake točke.

Lema

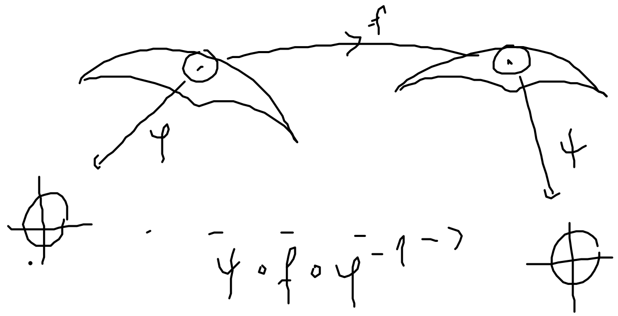
Neka je je $f : M \to \mathbf{R}^k$ glatka funkcija na M. Tada je $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbf{R}^k$ glatka funkcija za svaku kartu (U, φ) od M.

Glatka preslikavanja

Definicija

Neka su M, N *glatke mnogostrukosti.*

Glatka preslikavanja



Definicija

Neka su M, N glatke mnogostrukosti.

Preslikavanje $f : M \to N$ se naziva glatkim ako za svaku točku $p \in M$ postoji glatka karta (U, φ) od M koja sadrži p i glatka karta (V, ψ) od N koja sadrži $f(p)$, tako da je $f(U) \subset V$ i da vrijedi da je kompozicija

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

glatka funkcija.

Glatka preslikavanja

Definicija

Neka su M, N *glatke mnogostrukosti.*

Preslikavanje $f : M \to N$ *se naziva glatkim ako za svaku točku* $p \in M$ *postoji glatka karta* (U, φ) *od* M *koja sadrži* p *i glatka karta* (V, ψ) *od* N *koja sadrži* $f(p)$*, tako da je* $f(U) \subset V$ *i da vrijedi da je kompozicija*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

glatka funkcija.

Za preslikavanje $f : M \to N$ *i karte* (U, φ), (V, ψ), *funkcija* $\hat{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ *naziva se koordinatnim prikazom preslikavanja* f *s obzirom na dane karte.*

Glatka preslikavanja

Lema

Neka su M, N glatke mnogostrukosti, $f : M \to N$ glatko preslikavanje.

Glatka preslikavanja

Lema

Neka su M, N glatke mnogostrukosti, $f : M \to N$ glatko preslikavanje.

Tada je $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ glatka funkcija za svaku kartu (U, φ) od M i glatku kartu (V, ψ) od N. $(f(U) \subseteq V)$

Glatka preslikavanja

Lema

Neka su M, N glatke mnogostrukosti, $f : M \to N$ glatko preslikavanje.

Tada je $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ glatka funkcija za svaku kartu (U, φ) od M i glatku kartu (V, ψ) od N.

Lema (Lokalnost)

Neka su M, N glatke mnogostrukosti, $f : M \to N$.

Glatka preslikavanja

Lema

Neka su M, N *glatke mnogostrukosti,* $f : M \to N$ *glatko preslikavanje.*

Tada je $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ *glatka funkcija za svaku kartu* (U, φ) *od* M *i glatku kartu* (V, ψ) *od* N*.*

Lema (Lokalnost)

Neka su M, N *glatke mnogostrukosti,* $f : M \to N$*.*

Neka svaka točka p *od* M *ima okolinu* U *takvu da je restrikcija* $f|_U$ *glatko preslikavanje.*

Glatka preslikavanja

Lema

Neka su M, N *glatke mnogostrukosti,* $f : M \to N$ *glatko preslikavanje.*

Tada je $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ *glatka funkcija za svaku kartu* (U, φ) *od* M *i glatku kartu* (V, ψ) *od* N*.*

Lema (Lokalnost)

Neka su M, N *glatke mnogostrukosti,* $f : M \to N$*.*

Neka svaka točka p *od* M *ima okolinu* U *takvu da je restrikcija* $f|_U$ *glatko preslikavanje.*

Tada je f *glatko preslikavanje.*

Glatka preslikavanja

Lema

Neka su M, N glatke mnogostrukosti, $f : M \to N$ glatko preslikavanje.

Tada je $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ glatka funkcija za svaku kartu (U, φ) od M i glatku kartu (V, ψ) od N.

Lema (Lokalnost)

Neka su M, N glatke mnogostrukosti, $f : M \to N$.

Neka svaka točka p od M ima okolinu U takvu da je restrikcija $f|_U$ glatko preslikavanje.

Tada je f glatko preslikavanje.

Obratno, ako je f glatko preslikavanje, tada je njegova restrikcija na bilo koji otvoren podskup takodjer glatko preslikavanje.

Glatka preslikavanja

Lema

(a) Svako glatko preslikavanje $f : M \to N$ *je neprekidno.*

Glatka preslikavanja

Lema

(a) Svako glatko preslikavanje $f : M \to N$ *je neprekidno.*

(b) Kompozicija glatkih preslikavanja izmedju glatkih mnogostrukosti je glatko preslikavanje.

Glatka preslikavanja

Lema

(a) Svako glatko preslikavanje $f : M \to N$ je neprekidno.

(b) Kompozicija glatkih preslikavanja izmedju glatkih mnogostrukosti je glatko preslikavanje.

Lema

Neka su $M_1, \ldots, M_k$, N glatke mnogostrukosti.

Glatka preslikavanja

Lema

(a) Svako glatko preslikavanje $f : M \to N$ je neprekidno.

(b) Kompozicija glatkih preslikavanja izmedju glatkih mnogostrukosti je glatko preslikavanje.

Lema

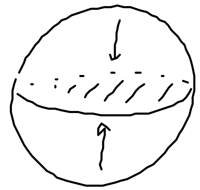
Neka su $M_1, \ldots, M_k$, N glatke mnogostrukosti.

Preslikavanje $f : N \to M_1 \times \cdots \times M_k$ je glatko ako i samo ako je $f_i := \pi_i \circ f : N \to M_i$ glatko preslikavanje ($\pi_i : M_1 \times \cdots \times M_k \to M_i$ je projekcija na i-ti faktor).

Primjer 1.

Inkluzija $i : S^n \hookrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ je glatko preslikavanje.

Primjer 1.



Inkluzija $i : S^n \hookrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ je glatko preslikavanje.

Koordinatno preslikavanje

$$\hat{i}(u^1, \ldots, u^n) = i \circ (\varphi_i^{\pm})^{-1}(u^1, \ldots, u^n) =$$

$$(u^1, \ldots, u^{i-1}, \pm\sqrt{1 - |u|^2}, u^i, \ldots, u^n), \quad |u| < 1.$$

Primjer 2.

Kvocijentno preslikavanje $\pi : \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{RP}^n$ je glatko preslikavanje.

Primjer 2.

Kvocijentno preslikavanje $\pi : \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{RP}^n$ je glatko preslikavanje.

Koordinatno preslikavanje

$$\hat{\pi}(x^1, \ldots, x^{n+1}) = \varphi_i \circ \pi(x^1, \ldots, x^{n+1}) = \\ (\frac{x^1}{x^i}, \ldots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \ldots \frac{x^{n+1}}{x^i}).$$

Primjer 3.

Preslikavanje $p : S^n \to \mathbf{RP}^n$, p je restrikcija od π na S^n, je glatko ($p = \pi \circ i$).

Primjer 4.

Za funkciju $f = |\ | : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, smještenje njezinog grafa u $\mathbb{R}^2$, $i : \Gamma(f) \hookrightarrow \mathbb{R}^2$, nije glatko preslikavanje.

Primjer 4.

Za funkciju $f = |\ | : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, smještenje njezinog grafa u $\mathbb{R}^2$, $i : \Gamma(f) \hookrightarrow \mathbb{R}^2$, nije glatko preslikavanje.

Koordinatno preslikavanje:

$$\hat{i}(x) = (x, |x|),$$

nije glatko u 0.