Glatke i Riemannove mnogostrukosti

Željka Milin-Šipuš, Pavle Pandžić i Juraj Šiftar

Geometrija i topologija, drugi dio

Topološke mnogostrukosti

Definicija

Topološka mnogostrukost M *dimenzije* n, $\dim M = n$, *je topološki prostor* M *koji zadovoljava:*

Topološke mnogostrukosti

Definicija

Topološka mnogostrukost M dimenzije n, $\dim M = n$, je topološki prostor M koji zadovoljava:

1. *M je Hausdorffov ($p, q \in M \Rightarrow \exists$ disjunktni otvoreni $U, V \subset M$, $p \in U$, $q \in V$);*

Topološke mnogostrukosti

Definicija

Topološka mnogostrukost M dimenzije n, $\dim M = n$, je topološki prostor M koji zadovoljava:

1. *M je Hausdorffov ($p, q \in M \Rightarrow \exists$ disjunktni otvoreni $U, V \subset M$, $p \in U$, $q \in V$);*
2. *postoji prebrojiva baza za topologiju od M;*

Topološke mnogostrukosti

Definicija

Topološka mnogostrukost M dimenzije n, $\dim M = n$, je topološki prostor M koji zadovoljava:

1. *M je Hausdorffov ($p, q \in M \Rightarrow \exists$ disjunktni otvoreni $U, V \subset M$, $p \in U$, $q \in V$);*
2. *postoji prebrojiva baza za topologiju od M;*
3. *M je lokalno euklidski dimenzije n: $\forall p \in M$, $\exists$ okolina homeomorfna otvorenom podskupu od $\mathbf{R}^n$.*

Topološke mnogostrukosti

Osnovni primjer: $\mathbf{R}^n$.

Topološke mnogostrukosti

Osnovni primjer: $\mathbf{R}^n$.

Hausdorffov jer je metrički.

Topološke mnogostrukosti

Osnovni primjer: $\mathbf{R}^n$.

Hausdorffov jer je metrički.

Prebrojiva baza topologije: otvorene kugle s racionalnim središtima i racionalnim radijusima.

Topološke mnogostrukosti

Definicija

Koordinatna karta na M*:* (U, φ), $U \subset M$ *otvoren,* $\varphi : U \to \tilde{U}$ *homeomorfizam s* U *na otvoren* $\tilde{U} \subset \mathbf{R}^n$.

Topološke mnogostrukosti

Definicija

Koordinatna karta na M*:* (U, φ)*,* $U \subset M$ *otvoren,* $\varphi : U \to \tilde{U}$ *homeomorfizam s* U *na otvoren* $\tilde{U} \subset \mathbf{R}^n$*.*

$\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$*;* x^i *zovemo lokalnim koordinatama na* U*.*

Primjer 1. Sfera

$$S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : |x| = 1\}.$$

Primjer 1. Sfera

$$S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : |x| = 1\}.$$

S^n je topološki prostor u relativnoj topologiji (topologija naslijedjena od $\mathbf{R}^{n+1}$).

Primjer 1. Sfera

$$S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : |x| = 1\}.$$

S^n je topološki prostor u relativnoj topologiji (topologija naslijedjena od $\mathbf{R}^{n+1}$).

(Slijedi: S^n je Hausdorffov prostor s prebrojivom bazom.)

Primjer 1. Sfera

S^n je lokalno euklidski prostor: pokrit ćemo S^n s $2n+2$ koordinatnih karata

Primjer 1. Sfera

S^n je lokalno euklidski prostor: pokrit ćemo S^n s $2n+2$ koordinatnih karata

$$U_i^+ = \{x = (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in S^n : x^i > 0\},$$
$$U_i^- = \{x = (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in S^n : x^i < 0\},$$

Primjer 1. Sfera

S^n je lokalno euklidski prostor: pokrit ćemo S^n s $2n+2$ koordinatnih karata

$$U_i^+ = \{x = (x^1, \dots, x^{n+1}) \in S^n : x^i > 0\},$$
$$U_i^- = \{x = (x^1, \dots, x^{n+1}) \in S^n : x^i < 0\},$$

$$\varphi_i^+ : U_i^+ \to B^n := \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1\},$$

Primjer 1. Sfera

S^n je lokalno euklidski prostor: pokrit ćemo S^n s $2n+2$ koordinatnih karata

$$U_i^+ = \{x = (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in S^n : x^i > 0\},$$
$$U_i^- = \{x = (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in S^n : x^i < 0\},$$

$$\varphi_i^+ : U_i^+ \to B^n := \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1\},$$

$$\varphi_i^+(x^1, \ldots, x^{n+1}) = (x^1, \ldots, \widehat{x^i}, \ldots, x^{n+1}),$$

pri čemu je član označen sa $\widehat{\ }$ ispušten.

Primjer 1. Sfera

Analogno su definirana koordinatna preslikavanja $\varphi_i^- : U_i^- \to B^n$.

Primjer 1. Sfera

Analogno su definirana koordinatna preslikavanja $\varphi_i^- : U_i^- \to B^n$.

Inverz $(\varphi_i^\pm)^{-1} : B^n \to U_i^\pm$

$$(\varphi_i^\pm)^{-1}(u^1, \ldots, u^n) = (u^1, \ldots, u^{i-1}, \pm\sqrt{1 - |u|^2}, u^i, \ldots, u^n)$$

je neprekidan na B^n.

Primjer 2. Graf neprekidne funkcije

$U \in \mathbf{R}^n$ otvoren; $F : U \to \mathbf{R}^k$ neprekidna

Primjer 2. Graf neprekidne funkcije

$U \in \mathbf{R}^n$ otvoren; $F : U \to \mathbf{R}^k$ neprekidna

Graf od F:

$$\Gamma(F) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k : x \in U \ \text{ i } \ y = F(x)\} \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k.$$

Primjer 2. Graf neprekidne funkcije

$U \in \mathbf{R}^n$ otvoren; $F : U \to \mathbf{R}^k$ neprekidna

Graf od F:

$$\Gamma(F) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k : x \in U \text{ i } y = F(x)\} \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k.$$

$\Gamma(F)$ je topološki prostor s relativnom topologijom (naslijedjenom od $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$).

Primjer 2. Graf neprekidne funkcije

$U \in \mathbf{R}^n$ otvoren; $F : U \to \mathbf{R}^k$ neprekidna

Graf od F:

$$\Gamma(F) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k : x \in U \text{ i } y = F(x)\} \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k.$$

$\Gamma(F)$ je topološki prostor s relativnom topologijom (naslijedjenom od $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$).

$\Gamma(F)$ je topološka mnogostrukost dimenzije n:

Primjer 2. Graf neprekidne funkcije

$\Gamma(F)$ homeomorfan s U, pomoću

$$\varphi : \Gamma(F) \to U, \ \ \varphi(x, y) = x$$

Primjer 2. Graf neprekidne funkcije

$\Gamma(F)$ homeomorfan s U, pomoću

$$\varphi : \Gamma(F) \to U, \;\; \varphi(x,y) = x$$

Naime, φ je restrikcija projekcije $\Rightarrow$ neprekidno preslikavanje.

Primjer 2. Graf neprekidne funkcije

$\Gamma(F)$ homeomorfan s U, pomoću

$$\varphi : \Gamma(F) \to U, \ \ \varphi(x, y) = x$$

Naime, φ je restrikcija projekcije $\Rightarrow$ neprekidno preslikavanje.

Inverz: $\varphi^{-1}(x) = (x, F(x))$ – neprekidno preslikavanje.

Primjer 2. Graf neprekidne funkcije

$\Gamma(F)$ homeomorfan s U, pomoću

$$\varphi : \Gamma(F) \to U, \;\; \varphi(x, y) = x$$

Naime, φ je restrikcija projekcije $\Rightarrow$ neprekidno preslikavanje.

Inverz: $\varphi^{-1}(x) = (x, F(x))$ – neprekidno preslikavanje.

Dakle je φ homeomorfizam. $(\Gamma(F), \varphi)$ je globalna koordinatna karta na $\Gamma(F)$.

Primjer 2. Graf neprekidne funkcije

Uočimo da smo sferu pokrili grafovima:

Primjer 2. Graf neprekidne funkcije

Uočimo da smo sferu pokrili grafovima:

U_i^+ je graf funkcije

$$x^i = f(x^1, \ldots, \widehat{x^i}, \ldots, x^{n+1}),$$

Primjer 2. Graf neprekidne funkcije

Uočimo da smo sferu pokrili grafovima:

U_i^+ je graf funkcije

$$x^i = f(x^1, \dots, \widehat{x^i}, \dots, x^{n+1}),$$

a $f : B^n \to \mathbf{R}$ je neprekidna funkcija definirana s

$$f(u) = \sqrt{1 - |u|^2}.$$

Primjer 2. Graf neprekidne funkcije

Uočimo da smo sferu pokrili grafovima:

U_i^+ je graf funkcije

$$x^i = f(x^1, \ldots, \widehat{x^i}, \ldots, x^{n+1}),$$

a $f : B^n \to \mathbf{R}$ je neprekidna funkcija definirana s

$$f(u) = \sqrt{1 - |u|^2}.$$

Slično je U_i^- graf funkcije $x^i = -f(x^1, \ldots, \widehat{x^i}, \ldots, x^{n+1})$.

Primjer 3. Otvorene topološke podmnogostrukosti

Neka je U otvoren podskup od $\mathbf{R}^n$.

Primjer 3. Otvorene topološke podmnogostrukosti

Neka je U otvoren podskup od $\mathbf{R}^n$.

Tada je U topološka n-mnogostrukost, a (U, Id_U) globalna koordinatna karta.

Primjer 3. Otvorene topološke podmnogostrukosti

Neka je U otvoren podskup od $\mathbf{R}^n$.

Tada je U topološka n-mnogostrukost, a (U, Id_U) globalna koordinatna karta.

Općenitije, neka je M topološka n-mnogostrukost i $U \subset M$ otvoren podskup.

Primjer 3. Otvorene topološke podmnogostrukosti

Neka je U otvoren podskup od $\mathbf{R}^n$.

Tada je U topološka n-mnogostrukost, a (U, Id_U) globalna koordinatna karta.

Općenitije, neka je M topološka n-mnogostrukost i $U \subset M$ otvoren podskup.

Tada je U takodjer topološka n-mnogostrukost, $(V, \varphi|_V)$, koordinatna karta, $V = W \cap U$, (W, φ) koordinatna karta od M.

Primjer 4. Projektivni prostor

n-dimenzionalni realni projektivni prostor $\mathbf{RP}^n$ je skup svih jednodimenzionalnih vektorskih potprostora od $\mathbf{R}^{n+1}$.

Primjer 4. Projektivni prostor

n-dimenzionalni realni projektivni prostor $\mathbf{RP}^n$ je skup svih jednodimenzionalnih vektorskih potprostora od $\mathbf{R}^{n+1}$.

(Jednodimenzionalan potprostor $=$ pravac kroz 0.)

Primjer 4. Projektivni prostor

n-dimenzionalni realni projektivni prostor $\mathbf{RP}^n$ je skup svih jednodimenzionalnih vektorskih potprostora od $\mathbf{R}^{n+1}$.

(Jednodimenzionalan potprostor = pravac kroz 0.)

Snabdijemo ga kvocijentnom topologijom

$$\pi : \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{RP}^n,$$

$$\pi(x) = [x],$$

gdje je $[x]$ potprostor od $\mathbf{R}^{n+1}$ razapet s x.

Primjer 4. Projektivni prostor

n-dimenzionalni realni projektivni prostor $\mathbf{RP}^n$ je skup svih jednodimenzionalnih vektorskih potprostora od $\mathbf{R}^{n+1}$.

(Jednodimenzionalan potprostor = pravac kroz 0.)

Snabdijemo ga kvocijentnom topologijom

$$\pi : \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{RP}^n,$$

$$\pi(x) = [x],$$

gdje je $[x]$ potprostor od $\mathbf{R}^{n+1}$ razapet s x.

$U \subset \mathbf{RP}^n$ je otvoren akko je $\pi^{-1}(U)$ otvoren u $\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

Primjer 4. Projektivni prostor

Uočimo da $x, y \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ razapinju isti potprostor $[x]$ ako i samo ako je $x = \lambda y$, za $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Primjer 4. Projektivni prostor

Uočimo da $x, y \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ razapinju isti potprostor $[x]$ ako i samo ako je $x = \lambda y$, za $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

$\mathbf{RP}^n$ je lokalno euklidski:

Primjer 4. Projektivni prostor

Uočimo da $x, y \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ razapinju isti potprostor $[x]$ ako i samo ako je $x = \lambda y$, za $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

$\mathbf{RP}^n$ je lokalno euklidski:

Neka je

$$\tilde{U}_i = \{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} : x^i \neq 0\} \subset \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}.$$

$(i = 1, \ldots, n+1.)$

Primjer 4. Projektivni prostor

Uočimo da $x, y \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ razapinju isti potprostor $[x]$ ako i samo ako je $x = \lambda y$, za $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

$\mathbf{RP}^n$ je lokalno euklidski:

Neka je

$$\tilde{U}_i = \{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} : x^i \neq 0\} \subset \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}.$$

$(i = 1, \ldots, n+1.)$

Stavimo $U_i = \pi(\tilde{U}_i) \subset \mathbf{RP}^n$.

Primjer 4. Projektivni prostor

Definiramo $\varphi_i : U_i \to \mathbf{R}^n$

$$\varphi_i[x^1, \dots, x^{n+1}] = \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i}\right).$$

Primjer 4. Projektivni prostor

Definiramo $\varphi_i : U_i \to \mathbf{R}^n$

$$\varphi_i[x^1, \ldots, x^{n+1}] = (\frac{x^1}{x^i}, \ldots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \ldots, \frac{x^{n+1}}{x^i}).$$

Inverz:

$$\varphi_i^{-1}(u^1, \ldots, u^n) = [u^1, \ldots, u^{i-1}, 1, u^i, \ldots, u^n].$$

Primjer 4. Projektivni prostor

Definiramo $\varphi_i : U_i \to \mathbf{R}^n$

$$\varphi_i[x^1, \dots, x^{n+1}] = (\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i}).$$

Inverz:

$$\varphi_i^{-1}(u^1, \dots, u^n) = [u^1, \dots, u^{i-1}, 1, u^i, \dots, u^n].$$

Skupovi U_i su otvoreni; φ_i i φ_i^{-1} su neprekidna preslikavanja.

Primjer 4. Projektivni prostor

Svaka je točka od $\mathbf{RP}^n$ u domeni barem jedne od karata (U_i, φ_i), pa je $\mathbf{RP}^n$ lokalno euklidski.

Primjer 4. Projektivni prostor

Svaka je točka od $\mathbf{RP}^n$ u domeni barem jedne od karata (U_i, φ_i), pa je $\mathbf{RP}^n$ lokalno euklidski.

Može se pokazati da je $\mathbf{RP}^n$ Hausdorffov i da zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti.

Primjer 4. Projektivni prostor

Svaka je točka od $\mathbf{RP}^n$ u domeni barem jedne od karata (U_i, φ_i), pa je $\mathbf{RP}^n$ lokalno euklidski.

Može se pokazati da je $\mathbf{RP}^n$ Hausdorffov i da zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti.

Napomena: $\mathbf{RP}^n$ je difeomorfan kvocijentnoj glatkoj mnogostrukosti $S^n/\{\pm 1\}$.

Primjer 5. Produktne mnogostrukosti

$M_1, \ldots, M_k$ topološke mnogostrukosti dimenzija $n_1, \ldots, n_k$.

Primjer 5. Produktne mnogostrukosti

$M_1, \dots, M_k$ topološke mnogostrukosti dimenzija $n_1, \dots, n_k$.

$\Rightarrow$ produkt $M_1 \times \cdots \times M_k$ je topološka mnogostrukost dimenzije $n_1 + \cdots + n_k$.

Primjer 5. Produktne mnogostrukosti

$M_1, \dots, M_k$ topološke mnogostrukosti dimenzija $n_1, \dots, n_k$.

$\Rightarrow$ produkt $M_1 \times \cdots \times M_k$ je topološka mnogostrukost dimenzije $n_1 + \cdots + n_k$.

Produkt je Hausdorffov i ima prebrojivu bazu.

Primjer 5. Produktne mnogostrukosti

$M_1 \times \cdots \times M_k$ je lokalno euklidski prostor:

Primjer 5. Produktne mnogostrukosti

$M_1 \times \cdots \times M_k$ je lokalno euklidski prostor:

Za $(p_1, \ldots, p_k) \in M_1 \times \cdots \times M_k$, izaberimo koordinatne karte (U_i, φ_i) za svaki M_i takve da je $p_i \in U_i$.

Primjer 5. Produktne mnogostrukosti

$M_1 \times \cdots \times M_k$ je lokalno euklidski prostor:

Za $(p_1, \ldots, p_k) \in M_1 \times \cdots \times M_k$, izaberimo koordinatne karte (U_i, φ_i) za svaki M_i takve da je $p_i \in U_i$.

Koordinatne karte od $M_1 \times \cdots \times M_k$ definiramo kao $(U_1 \times \cdots \times U_k, \varphi_1 \times \cdots \times \varphi_k)$, gdje je

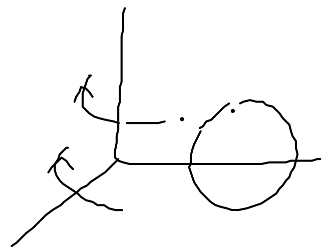
$$\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_k : U_1 \times \cdots \times U_k \to \mathbf{R}^{n_1 + \cdots + n_k}$$

homeomorfizam na svoju sliku (koja je otvoren podskup od $\mathbf{R}^{n_1 + \cdots + n_k}$).

Primjer 6. Torus

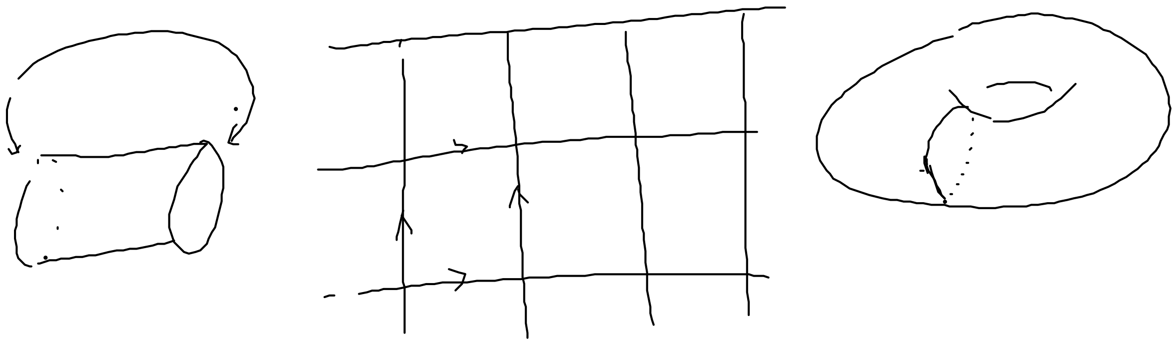
n-torus definiran s $\mathbf{T}^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ $(\subset \mathbf{R}^{2n})$ je topološka n-mnogostrukost.

Primjer 6. Torus



n-torus definiran s $\mathbf{T}^n = S^1 \times \cdots \times S^1 \ (\subset \mathbf{R}^{2n})$ je topološka n-mnogostrukost.

Napomena: $\mathbf{T}^n$ je difeomorfno kvocijentnoj glatkoj mnogostrukosti $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$.



Glatka struktura

Definicija. Glatki (C^∞) atlas, glatka struktura, glatka mnogostrukost

Glatka struktura

Definicija. Glatki (C^∞) atlas, glatka struktura, glatka mnogostrukost

Neka je M topološka mnogostrukost. Za dvije koordinatne karte $(U, \varphi), (V, \psi)$ od M kažemo da su *glatko povezane* ako je $U \cap V = \emptyset$ ili ako je preslikavanje

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

glatki difeomorfizam (otvorenih podskupova od $\mathbf{R}^n$).

Glatka struktura

Definicija. Glatki (C^∞) atlas, glatka struktura, glatka mnogostrukost

Neka je M topološka mnogostrukost. Za dvije koordinatne karte $(U, \varphi), (V, \psi)$ od M kažemo da su *glatko povezane* ako je $U \cap V = \emptyset$ ili ako je preslikavanje

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

glatki difeomorfizam (otvorenih podskupova od $\mathbf{R}^n$).

Atlas $\mathcal{A}$ je familija koordinatnih karata čije domene pokrivaju M. Atlas $\mathcal{A}$ se naziva glatkim ako su svake dvije karte u $\mathcal{A}$ glatko povezane.

Glatka struktura

Glatki atlas $\mathcal{A}$ je maksimalan ako nije sadržan niti u jednom striktno većem glatkom atlasu.

Glatka struktura

Glatki atlas $\mathcal{A}$ je maksimalan ako nije sadržan niti u jednom striktno većem glatkom atlasu.

Glatka struktura na M je maksimalan glatki atlas na M.

Glatka struktura

Glatki atlas $\mathcal{A}$ je maksimalan ako nije sadržan niti u jednom striktno većem glatkom atlasu.

Glatka struktura na M je maksimalan glatki atlas na M.

Glatka mnogostrukost je uredjen par $(M, \mathcal{A})$, gdje je M topološka mnogostrukost, a $\mathcal{A}$ maksimalan glatki atlas na M.

Glatka struktura

Uočimo:

- Preslikavanje $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ naziva se *funkcijom prijelaza* od φ na ψ. Ono je uvijek homeomorfizam kao kompozicija homeomorfizama.

Glatka struktura

Uočimo:

- Preslikavanje $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ naziva se *funkcijom prijelaza* od φ na ψ. Ono je uvijek homeomorfizam kao kompozicija homeomorfizama.

- Motivacija – želimo definirati glatke funkcije: Funkcija $f : M \to \mathbf{R}$ je glatka ako je $f \circ \varphi^{-1} : U \to \mathbf{R}$ glatka. Osigurati neovisnost o karti!

Glatka struktura

Uočimo:

- Preslikavanje $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ naziva se *funkcijom prijelaza* od φ na ψ. Ono je uvijek homeomorfizam kao kompozicija homeomorfizama.
- Motivacija – želimo definirati glatke funkcije: Funkcija $f : M \to \mathbf{R}$ je glatka ako je $f \circ \varphi^{-1} : U \to \mathbf{R}$ glatka. Osigurati neovisnost o karti!
- C^k–mnogostrukosti (C^0 = topološka mnogostrukost), C^ω–mnogostrukosti

Glatka struktura

Lemma

Neka je M topološka mnogostrukost.

1. *Svaki je glatki atlas od M sadržan u jedinstvenom maksimalnom atlasu.*

glatkom

Glatka struktura

Lemma

Neka je M topološka mnogostrukost.

1. *Svaki je glatki atlas od M sadržan u jedinstvenom maksimalnom atlasu.*
2. *Dva glatka atlasa od M odredjuju isti maksimalan atlas ako i samo ako je njihova unija glatki atlas.*

Primjer 1. $\mathbf{R}^n$

Standardna glatka struktura je odredjena jednom kartom $(\mathbf{R}^n, Id)$.

Primjer 2. Još jedna struktura na $\mathbf{R}$

Neka je $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ homeomorfizam $\psi(x) = x^3$.

Primjer 2. Još jedna struktura na $\mathbf{R}$

Neka je $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ homeomorfizam $\psi(x) = x^3$.

Kartom $(\mathbf{R}, \psi)$ definiran je glatki atlas na $\mathbf{R}$.

Primjer 2. Još jedna struktura na $\mathbf{R}$

Neka je $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ homeomorfizam $\psi(x) = x^3$.

Kartom $(\mathbf{R}, \psi)$ definiran je glatki atlas na $\mathbf{R}$.

Standardna karta i karta $(\mathbf{R}, \psi)$ nisu glatko povezane jer funkcija prijelaza $Id \circ \psi^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$Id \circ \psi^{-1}(y) = y^{1/3}$$

nije glatka u 0.

Primjer 2. Još jedna struktura na $\mathbf{R}$

Neka je $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ homeomorfizam $\psi(x) = x^3$.

Kartom $(\mathbf{R}, \psi)$ definiran je glatki atlas na $\mathbf{R}$.

Standardna karta i karta $(\mathbf{R}, \psi)$ nisu glatko povezane jer funkcija prijelaza $Id \circ \psi^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$Id \circ \psi^{-1}(y) = y^{1/3}$$

nije glatka u 0.

Prema tome, glatka struktura definirana kartom $(\mathbf{R}, \psi)$ nije ista kao standardna glatka struktura na $\mathbf{R}$.

Primjer 3. Konačnodimenzionalni vektorski prostori

Neka je V n-dimenzionalni normirani prostor s topologijom inducirano od norme (ne ovisi o izboru norme).

Primjer 3. Konačnodimenzionalni vektorski prostori

Neka je V n-dimenzionalni normirani prostor s topologijom inducuranom od norme (ne ovisi o izboru norme).

Neka je $(e_1, \ldots, e_n)$ baza za V i neka je $E : V \to \mathbf{R}^n$ preslikavanje definirano s

$$E(v) = (x^1, \ldots, x^n),$$

gdje je $v = \sum_{i=1}^n x^i e_i$.

Primjer 3. Konačnodimenzionalni vektorski prostori

Neka je V n-dimenzionalni normirani prostor s topologijom induciranom od norme (ne ovisi o izboru norme).

Neka je $(e_1, \ldots, e_n)$ baza za V i neka je $E : V \to \mathbf{R}^n$ preslikavanje definirano s

$$E(v) = (x^1, \ldots, x^n),$$

gdje je $v = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i$.

Tada je E homeomorfizam (i izomorfizam vektorskih prostora). Atlas definiran jednom kartom (V, E) definira glatku strukturu na V.

Primjer 3. Konačnodimenzionalni vektorski prostori

Neka je V n-dimenzionalni normirani prostor s topologijom induciranom od norme (ne ovisi o izboru norme).

Neka je $(e_1, \dots, e_n)$ baza za V i neka je $E : V \to \mathbf{R}^n$ preslikavanje definirano s

$$E(v) = (x^1, \dots, x^n),$$

gdje je $v = \sum_{i=1}^n x^i e_i$.

Tada je E homeomorfizam (i izomorfizam vektorskih prostora). Atlas definiran jednom kartom (V, E) definira glatku strukturu na V.

Može se još pokazati da je ta glatka struktura neovisna o izboru baze za V.

Primjer 3. Konačnodimenzionalni vektorski prostori

Neka je $(f_1, \dots, f_n)$ neka druga baza i F pripadni homeomorfizam, $F : V \to \mathbf{R}^n$, $F(v) = (y^1, \dots, y^n)$.

Primjer 3. Konačnodimenzionalni vektorski prostori

Neka je $(f_1, \dots, f_n)$ neka druga baza i F pripadni homeomorfizam, $F : V \to \mathbf{R}^n$, $F(v) = (y^1, \dots, y^n)$.

Postoji regularna matrica $A = (a_{ij})$ (matrica prijelaza iz (f) u (e)) tako da vrijedi

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} f_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Primjer 3. Konačnodimenzionalni vektorski prostori

Neka je $(f_1, \dots, f_n)$ neka druga baza i F pripadni homeomorfizam, $F : V \to \mathbf{R}^n$, $F(v) = (y^1, \dots, y^n)$.

Postoji regularna matrica $A = (a_{ij})$ (matrica prijelaza iz (f) u (e)) tako da vrijedi

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} f_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Funkcija prijelaza izmedju karata (V, E), (V, F) je dana s $F \circ E^{-1} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $F \circ E^{-1}(x^1, \dots, x^n) = (y^1, \dots, y^n)$.

Primjer 3. Konačnodimenzionalni vektorski prostori

Treba pokazati da je matrica prijelaza glatko preslikavanje. Kako je $E^{-1}(x^1, \ldots, x^n) = F^{-1}(y^1, \ldots, y^n)$, to je

$$\sum_{j=1}^{n} y^j f_j = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i = \sum_{i=1}^{n} x^i \sum_{j=1}^{n} a_{ji} f_j,$$

$$\Longrightarrow y^j = \sum_{i=1}^{n} x^i a_{ji}.$$

Primjer 3. Konačnodimenzionalni vektorski prostori

Treba pokazati da je matrica prijelaza glatko preslikavanje. Kako je $E^{-1}(x^1, \ldots, x^n) = F^{-1}(y^1, \ldots, y^n)$, to je

$$\sum_{j=1}^{n} y^j f_j = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i = \sum_{i=1}^{n} x^i \sum_{j=1}^{n} a_{ji} f_j,$$

$$\Longrightarrow y^j = \sum_{i=1}^{n} x^i a_{ji}.$$

Prema tome, funkcija prijelaza je glatko preslikavanje (regularni linearni operator).
Dobivena glatka struktura se naziva *standardnom glatkom strukturom* na V.

Primjer 4. Prostori matrica

Posebno, prostor matrica $M_{mn}(\mathbf{R})$ je glatka mnogostrukost dimenzije $m \cdot n$.

Primjer 4. Prostori matrica

Posebno, prostor matrica $M_{mn}(\mathbf{R})$ je glatka mnogostrukost dimenzije $m \cdot n$.

Prostor simetričnih matrica $\mathcal{S}(n, \mathbf{R}) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) : A^\tau = A\}$ je glatka mnogostrukost dimenzije $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Primjer 4. Prostori matrica

Posebno, prostor matrica $M_{mn}(\mathbf{R})$ je glatka mnogostrukost dimenzije $m \cdot n$.

Prostor simetričnih matrica $\mathcal{S}(n, \mathbf{R}) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) : A^\tau = A\}$ je glatka mnogostrukost dimenzije $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Prostor antisimetričnih matrica $\mathcal{A}(n, \mathbf{R}) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) : A^\tau = -A\}$ je glatka mnogostrukost dimenzije $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Primjer 5. Otvorene podmnogostrukosti

Neka je U otvoren podskup od $\mathbf{R}^n$, tada globalna karta (U, Id_U) definira glatku strukturu.

Primjer 5. Otvorene podmnogostrukosti

Neka je U otvoren podskup od $\mathbf{R}^n$, tada globalna karta (U, Id_U) definira glatku strukturu.

Općenitije, neka je U otvoren podskup glatke mnogostrukosti M, tada je

$$\mathcal{A}_U = \{(V, \varphi|_V) : V = W \cap U, \ \ (W, \varphi) \in \mathcal{A}_M\}$$

atlas na U.

Primjer 5. Otvorene podmnogostrukosti

Neka je U otvoren podskup od $\mathbf{R}^n$, tada globalna karta (U, Id_U) definira glatku strukturu.

Općenitije, neka je U otvoren podskup glatke mnogostrukosti M, tada je

$$\mathcal{A}_U = \{(V, \varphi|_V) : V = W \cap U, \ (W, \varphi) \in \mathcal{A}_M\}$$

atlas na U.

Prema tome, U je glatka n-mnogostrukost koju nazivamo *otvorenom podmnogostrukošću* od M.

Primjer 6. Opća linearna grupa, matrice maksimalnog ranga

$$GL(n, \mathbf{R}) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) : A \text{ regularna}\}.$$

$GL(n, \mathbf{R}) = \det^{-1}(\mathbf{R} \setminus \{0\})$, pa je to otvoren podskup od $M_n(\mathbf{R})$.

Primjer 6. Opća linearna grupa, matrice maksimalnog ranga

$$GL(n, \mathbf{R}) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) : A \text{ regularna}\}.$$

$GL(n, \mathbf{R}) = \det^{-1}(\mathbf{R} \setminus \{0\})$, pa je to otvoren podskup od $M_n(\mathbf{R})$.

Matrice maksimalnog ranga – postoji regularna minora. I to je otvoren podskup prostora (pravokutnih) matrica.

Primjer 7. Sfera – standardna glatka struktura

Utvrdimo glatku povezanost karata na sferi.

Primjer 7. Sfera – standardna glatka struktura

Utvrdimo glatku povezanost karata na sferi.

Funkcije prijelaza $\varphi_i^{\pm} \circ (\varphi_j^{\pm})^{-1}$, za primjerice $i < j$, su

$$\varphi_i^{\pm} \circ (\varphi_j^{\pm})^{-1}(u^1, \dots, u^n) = (u^1, \dots, \widehat{u^i}, \dots, \pm\sqrt{1 - |u|^2}, \dots, u^n).$$

Primjer 7. Sfera – standardna glatka struktura

Utvrdimo glatku povezanost karata na sferi.

Funkcije prijelaza $\varphi_i^{\pm} \circ (\varphi_j^{\pm})^{-1}$, za primjerice $i < j$, su

$$\varphi_i^{\pm} \circ (\varphi_j^{\pm})^{-1}(u^1, \dots, u^n) = (u^1, \dots, \widehat{u^i}, \dots, \pm\sqrt{1 - |u|^2}, \dots, u^n).$$

Prema tome, $\{(U_i^{\pm}, \varphi_i^{\pm})\}$ definira (standardnu) glatku strukturu na S^n.

Primjer 7. Sfera – stereografska projekcija

Istu glatku strukturu definira i sljedeći atlas: neka je $N = (0, \dots, 0, 1)$ sjeverni pol od S^n, a $S = (0, \dots, 0, -1)$ južni pol.

Primjer 7. Sfera – stereografska projekcija

Istu glatku strukturu definira i sljedeći atlas: neka je $N = (0, \ldots, 0, 1)$ sjeverni pol od S^n, a $S = (0, \ldots, 0, -1)$ južni pol.

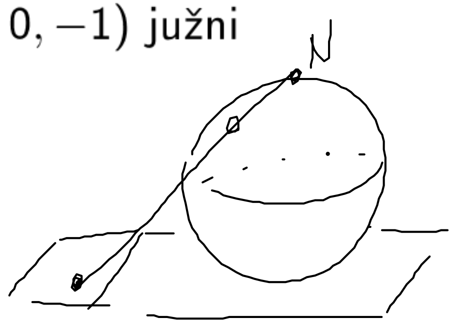
Stereografska projekcija $\sigma : S^n \setminus \{N\} \to \mathbf{R}^n$

$$\sigma(x^1, \ldots, x^{n+1}) = \frac{(x^1, \ldots, x^n)}{1 - x^{n+1}}$$

$$\tilde{\sigma}(x) = -\sigma(-x), \;\; x \in S^n \setminus \{S\}.$$

Primjer 7. Sfera – stereografska projekcija

Istu glatku strukturu definira i sljedeći atlas: neka je $N = (0, \ldots, 0, 1)$ sjeverni pol od S^n, a $S = (0, \ldots, 0, -1)$ južni pol.



Stereografska projekcija $\sigma : S^n \setminus \{N\} \to \mathbf{R}^n$

$$\sigma(x^1, \ldots, x^{n+1}) = \frac{(x^1, \ldots, x^n)}{1 - x^{n+1}}$$

$$\tilde{\sigma}(x) = -\sigma(-x), \quad x \in S^n \setminus \{S\}.$$

Atlas definiramo dvjema kartama $(S^n \setminus \{N\}, \sigma)$, $(S^n \setminus \{S\}, \tilde{\sigma})$.