GLATKE I RIEMANNOVE MNOGOSTRUKOSTI

Željka Milin-Šipuš, Pavle Pandžić i Juraj Šiftar

Drugi dio standardnog poslijediplomskog kolegija **Geometrija i topologija**. Izvodi se u ljetnom semestru (30 sati predavanja).

Sadržaj

- Glatke mnogostrukosti
- Glatka preslikavanja
- Tangencijalni svežanj
- Kotangencijalni svežanj
- Podmnogostrukosti
- Tenzori
- Riemannove mnogostrukosti
- Riemannove podmnogostrukosti

Literatura

- M. P. do Carmo, Differential geometry of curves and surfaces, Prentice Hall, 1976.
- W. Kühnel, Differential Geometry, Curves - Surfaces - Manifolds, AMS 2002. AMS, 2002.
- J. M. Lee, Introduction to smooth manifolds, Springer, 2000.
- J. M. Lee, Riemannian Manifolds, An Introduction to Curvature, Springer, 1997.
- I. M. Singer, J. A. Thorpe, Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry, Springer, 1967.

Uvod: globus i karte

Kao što znamo, površina zemlje je približno sfera u $\mathbb{R}^3$.

Uvod: globus i karte

Kao što znamo, površina zemlje je približno sfera u $\mathbb{R}^3$.

Karta je prikaz dijela te sfere u ravnini.

Uvod: globus i karte

Kao što znamo, površina zemlje je približno sfera u $\mathbb{R}^3$.

Karta je prikaz dijela te sfere u ravnini.

Kod prijenosa dolazi do izvjesnog izobličenja, npr. udaljenosti nisu iste. Ipak, radi se o homeomorfizmu, štoviše glatkom preslikavanju.

Uvod: globus i karte

Kao što znamo, površina zemlje je približno sfera u $\mathbb{R}^3$.

Karta je prikaz dijela te sfere u ravnini.

Kod prijenosa dolazi do izvjesnog izobličenja, npr. udaljenosti nisu iste. Ipak, radi se o homeomorfizmu, štoviše glatkom preslikavanju.

Što je manje područje koje karta obuhvaća, izobličenje je manje.

Uvod: krivulje u ravnini i prostoru

Prisjetimo se nekih činjenica iz analize više varijabli (Diferencijalni račun...)

Uvod: krivulje u ravnini i prostoru

Prisjetimo se nekih činjenica iz analize više varijabli (Diferencijalni račun...)

Glatka krivulja u prostoru je slika glatkog regularnog puta $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, gdje je $I \subset \mathbb{R}$ interval.

Uvod: krivulje u ravnini i prostoru

Prisjetimo se nekih činjenica iz analize više varijabli (Diferencijalni račun...)

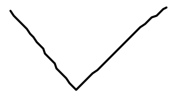
Glatka krivulja u prostoru je slika glatkog regularnog puta $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, gdje je $I \subset \mathbb{R}$ interval.

Glatkoća znači da je γ klase C^1 (u ovom kolegiju: C^∞).

Uvod: krivulje u ravnini i prostoru

Prisjetimo se nekih činjenica iz analize više varijabli (Diferencijalni račun...)

Glatka krivulja u prostoru je slika glatkog regularnog puta $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, gdje je $I \subset \mathbb{R}$ interval.



Glatkoća znači da je γ klase C^1 (u ovom kolegiju: C^∞).

Regularnost znači da se γ' nigdje ne poništava (inače bi se moglo dogoditi da slika nije nešto što želimo zvati glatkim - npr. graf $|x|$).

Uvod: krivulje u ravnini i prostoru

Najjednostavniji primjer krivulje u ravnini je graf glatke funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On je parametriziran sa $x \mapsto (x, f(x))$.

Uvod: krivulje u ravnini i prostoru

Najjednostavniji primjer krivulje u ravnini je graf glatke funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On je parametriziran sa $x \mapsto (x, f(x))$.

Drugi primjeri uključuju kružnicu, elipsu ili hiperbolu, koje su redom dane sa

$$t \mapsto (\cos t, \sin t); \quad t \mapsto (a\cos t, b\sin t); \quad t \mapsto (a\cosh t, b\sinh t).$$

Uvod: krivulje u ravnini i prostoru

Najjednostavniji primjer krivulje u ravnini je graf glatke funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On je parametriziran sa $x \mapsto (x, f(x))$.

Drugi primjeri uključuju kružnicu, elipsu ili hiperbolu, koje su redom dane sa

$$t \mapsto (\cos t, \sin t); \quad t \mapsto (a \cos t, b \sin t); \quad t \mapsto (a \cosh t, b \sinh t).$$

Kružnicu, elipsu ili hiperbolu možemo zadati i implicitno:

$$x^2 + y^2 = 1; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Uvod: krivulje u ravnini i prostoru

Neka je krivulja u ravnini zadana jednadžbom $F(x, y) = 0$, pri čemu je F glatka funkcija čiji gradijent nije nula niti u jednoj točki na krivulji.

Uvod: krivulje u ravnini i prostoru

Neka je krivulja u ravnini zadana jednadžbom $F(x, y) = 0$, pri čemu je F glatka funkcija čiji gradijent nije nula niti u jednoj točki na krivulji.

Tada Teorem o implicitno zadanoj funkciji pokazuje da se dijelovi te krivulje mogu dobiti kao grafovi glatkih funkcija, dakle i parametrizirati,

Uvod: krivulje u ravnini i prostoru

Od prostornih krivulja koje nisu ravninske, spomenimo npr. spiralu

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Uvod: krivulje u ravnini i prostoru

Od prostornih krivulja koje nisu ravninske, spomenimo npr. spiralu

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Takve krivulje nije običaj zadavati implicitno. To bi se moglo, ali pomoću dvije jednadžbe (dim. prostora - dim. krivulje $=2$).

Uvod: krivulje u ravnini i prostoru

Od prostornih krivulja koje nisu ravninske, spomenimo npr. spiralu

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Takve krivulje nije običaj zadavati implicitno. To bi se moglo, ali pomoću dvije jednadžbe (dim. prostora - dim. krivulje =2).

Tangenta na krivulju zadanu putem γ u točki $p_0 = \gamma(t_0)$ je pravac kroz p_0 čiji je smjer dan vektorom $\gamma'(t_0)$. (Tu je bitno $\gamma'(t_0) \neq 0$.)

Uvod: krivulje u ravnini i prostoru

Od prostornih krivulja koje nisu ravninske, spomenimo npr. spiralu

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Takve krivulje nije običaj zadavati implicitno. To bi se moglo, ali pomoću dvije jednadžbe (dim. prostora - dim. krivulje =2).

Tangenta na krivulju zadanu putem γ u točki $p_0 = \gamma(t_0)$ je pravac kroz p_0 čiji je smjer dan vektorom $\gamma'(t_0)$. (Tu je bitno $\gamma'(t_0) \neq 0$.)

Za ravninsku krivulju zadanu sa $F(x, y) = 0$, tangentu možemo dobiti kao okomicu na gradijent funkcije F. $\nabla F \neq 0$

Uvod: plohe u prostoru

Parametrizirana glatka ploha u $\mathbb{R}^3$ je slika glatkog preslikavanja

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^3$$

gdje je $U \subset \mathbb{R}^2$, takvog da diferencijal od φ ima maksimalan rang (dakle 2) u svakoj točki domene.

Uvod: plohe u prostoru

Parametrizirana glatka ploha u $\mathbb{R}^3$ je slika glatkog preslikavanja

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^3$$

gdje je $U \subset \mathbb{R}^2$, takvog da diferencijal od φ ima maksimalan rang (dakle 2) u svakoj točki domene.

Npr. graf glatke funkcije $f : U \to \mathbb{R}$ možemo parametrizirati pomoću $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$,

$$\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y)).$$

Uvod: plohe u prostoru

Beskonačni uspravni cilindar nad jediničnom kružnicom u xy-ravnini možemo parametrizirati pomoću $\varphi : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$\varphi(t, z) = (\cos t, \sin t, z).$$

(cilindrične koordinate)

Uvod: plohe u prostoru

Sferu u prostoru možemo parametrizirati koristeći sferičke koordinate, pomoću $\varphi : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$\varphi(\phi, \theta) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi).$$

Uvod: plohe u prostoru

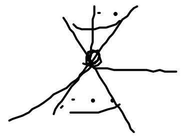
Sferu u prostoru možemo parametrizirati koristeći sferičke koordinate, pomoću $\varphi : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$\varphi(\phi, \theta) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi).$$

U jeziku geografije, θ je geografska duljina, dok je ϕ jednak $\frac{\pi}{2}$ minus geografska širina.

Uvod: plohe u prostoru

$x^2 + y^2 - z^2 = 0$



Ploha u prostoru može biti zadana i implicitno, pomoću jednadžbe

$$F(x, y, z) = 0,$$

gdje je F glatka realna funkcija s domenom u $\mathbb{R}^3$, čiji je gradijent različit od 0 u svakoj točki plohe.

Uvod: plohe u prostoru

Ploha u prostoru može biti zadana i implicitno, pomoću jednadžbe

$$F(x, y, z) = 0,$$

gdje je F glatka realna funkcija s domenom u $\mathbb{R}^3$, čiji je gradijent različit od 0 u svakoj točki plohe.

Teorem o implicitnoj funkciji pokazuje da se dijelovi implicitno zadane plohe mogu prikazati kao grafovi glatkih funkcija, dakle i parametrizirati.

Uvod: plohe u prostoru

Za parametriziranu plohu $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$, tangencijalna ravnina u točki $p_0 = \varphi(x_0, y_0)$ je razapeta vektorima

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Uvod: plohe u prostoru

Za parametriziranu plohu $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$, tangencijalna ravnina u točki $p_0 = \varphi(x_0, y_0)$ je razapeta vektorima

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0).$$

(tu je bitno da su ti vektori linearno nezavisni, odnosno da $D\varphi(x_0, y_0)$ ima maksimalan rang.)

Uvod: plohe u prostoru

Za parametriziranu plohu $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$, tangencijalna ravnina u točki $p_0 = \varphi(x_0, y_0)$ je razapeta vektorima

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0).$$

(tu je bitno da su ti vektori linearno nezavisni, odnosno da $D\varphi(x_0, y_0)$ ima maksimalan rang.)

Za plohu zadanu implicitno sa $F(x, y, z) = 0$, tangencijalnu ravninu u p_0 možemo dobiti kao ravninu kroz p_0 okomitu na gradijent funkcije F u p_0.

Uvod: plohe u prostoru

Za parametriziranu plohu $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$, tangencijalna ravnina u točki $p_0 = \varphi(x_0, y_0)$ je razapeta vektorima

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0).$$

(tu je bitno da su ti vektori linearno nezavisni, odnosno da $D\varphi(x_0, y_0)$ ima maksimalan rang.)

Za plohu zadanu implicitno sa $F(x, y, z) = 0$, tangencijalnu ravninu u p_0 možemo dobiti kao ravninu kroz p_0 okomitu na gradijent funkcije F u p_0.

(Tu je bitno da je $\operatorname{grad} F(p_0) \neq 0$.)

Uvod: parametrizacije homeomorfizmima

Vratimo se sada na primjer kružnice u ravnini:

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Uvod: parametrizacije homeomorfizmima

Vratimo se sada na primjer kružnice u ravnini:

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Ako želimo da parametrizacija bude bijekcija, možemo restringirati φ na $[0, 2\pi\rangle$.

Uvod: parametrizacije homeomorfizmima

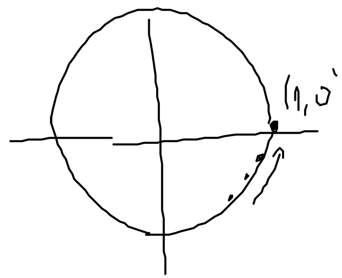
Vratimo se sada na primjer kružnice u ravnini:

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Ako želimo da parametrizacija bude bijekcija, možemo restringirati φ na $[0, 2\pi\rangle$.

To još uvijek nije dovoljno ako hoćemo da φ bude homeomorfizam; naime inverz $\varphi^{-1} : S^1 \to [0, 2\pi\rangle$ nije neprekidan u $(1, 0)$.

Uvod: parametrizacije homeomorfizmima



Vratimo se sada na primjer kružnice u ravnini:

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Ako želimo da parametrizacija bude bijekcija, možemo restringirati φ na $[0, 2\pi\rangle$.

To još uvijek nije dovoljno ako hoćemo da φ bude homeomorfizam; naime inverz $\varphi^{-1} : S^1 \to [0, 2\pi\rangle$ nije neprekidan u $(1, 0)$.

To slijedi iz toga što možemo definirati niz točaka na kružnici u IV kvadrantu koji teži prema $(1, 0)$. Odgovarajući t će težiti u 2π, dok je $\varphi^{-1}(1, 0) = 0$.

Uvod: parametrizacije homeomorfizmima

Za rješenje ovog problema potrebno je dodatno restringirati φ, na otvoren interval $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Uvod: parametrizacije homeomorfizmima

Za rješenje ovog problema potrebno je dodatno restringirati φ, na otvoren interval $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Sada se pojavio novi problem: točka $(1, 0) \in S^1$ više nije u slici parametrizacije φ.

Uvod: parametrizacije homeomorfizmima

Za rješenje ovog problema potrebno je dodatno restringirati φ, na otvoren interval $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Sada se pojavio novi problem: točka $(1, 0) \in S^1$ više nije u slici parametrizacije φ.

To rješavamo tako da definiramo još jednu parametrizaciju, $\psi : \langle -\pi, \pi \rangle \to \mathbb{R}^2$,

$$\psi(t) = (\cos t, \sin t).$$

Uvod: parametrizacije homeomorfizmima

Za rješenje ovog problema potrebno je dodatno restringirati φ, na otvoren interval $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Sada se pojavio novi problem: točka $(1, 0) \in S^1$ više nije u slici parametrizacije φ.

To rješavamo tako da definiramo još jednu parametrizaciju, $\psi : \langle -\pi, \pi \rangle \to \mathbb{R}^2$,

$$\psi(t) = (\cos t, \sin t).$$

Ova je parametrizacija homeomorfizam sa $\langle -\pi, \pi \rangle$ na $S^1 \setminus \{(-1, 0)\}$. Zajedno, φ i ψ pokrivaju kružnicu, sa dvije "karte". Po definiciji, karta na kružnici je otvoren podskup zajedno sa homeomorfizmom na otvoren podskup od $\mathbb{R}$.

Uvod: parametrizacije homeomorfizmima

Zadaci:

1. Napišite eksplicitno inverze parametrizacija φ i ψ za kružnicu. Uvjerite se da su ne samo neprekidni, nego i glatki.

Uvod: parametrizacije homeomorfizmima

Zadaci:

1. Napišite eksplicitno inverze parametrizacija φ i ψ za kružnicu. Uvjerite se da su ne samo neprekidni, nego i glatki.

2. Provedite analognu analizu za cilindar: pokrijte ga sa dvije (otvorene) karte, koje su homeomorfno parametrizirane otvorenim podskupovima od $\mathbb{R}^2$, i napišite inverze tih parametrizacija eksplicitno.

Uvod: parametrizacije homeomorfizmima

Zadaci:

1. Napišite eksplicitno inverze parametrizacija φ i ψ za kružnicu. Uvjerite se da su ne samo neprekidni, nego i glatki.
2. Provedite analognu analizu za cilindar: pokrijte ga sa dvije (otvorene) karte, koje su homeomorfno parametrizirane otvorenim podskupovima od $\mathbb{R}^2$, i napišite inverze tih parametrizacija eksplicitno.
3. Provedite analognu analizu za jediničnu sferu u $\mathbb{R}^3$, koristeći sferičke koordinate i njihove modifikacije. Koliko je karata potrebno?

Uvod: parametrizacije homeomorfizmima

(4) Za jediničnu sferu u $\mathbb{R}^3$, kao karte se mogu koristiti i otvorene hemisfere: npr. gornja hemisfera je graf funkcije $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, pa je parametrizirana sa

$$(x, y) \mapsto (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$$

gdje (x, y) varira po otvorenom jediničnom krugu. Pokrijte sferu takvim kartama. Koliko ih je potrebno? Odredite inverze parametrizacija i uvjerite se da su glatki.

Topološke mnogostrukosti

Definicija

Topološka mnogostrukost M dimenzije n, $\dim M = n$, je topološki prostor M koji zadovoljava:

Topološke mnogostrukosti

Definicija

Topološka mnogostrukost M dimenzije n, $\dim M = n$, je topološki prostor M koji zadovoljava:

1. *M je Hausdorffov tj. za svaki par točaka $p, q \in M$ postoje disjunktni otvoreni podskupovi $U, V \subset M$ takvi da je $p \in U$, $q \in V$;*

Topološke mnogostrukosti

Definicija

Topološka mnogostrukost M dimenzije n, $\dim M = n$, je topološki prostor M koji zadovoljava:

1. *M je Hausdorffov tj. za svaki par točaka $p, q \in M$ postoje disjunktni otvoreni podskupovi $U, V \subset M$ takvi da je $p \in U$, $q \in V$;*
2. *M zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti tj. postoji prebrojiva baza za topologiju od M;*

Topološke mnogostrukosti

Definicija

Topološka mnogostrukost M dimenzije n, $\dim M = n$, je topološki prostor M koji zadovoljava:

1. *M je Hausdorffov tj. za svaki par točaka $p, q \in M$ postoje disjunktni otvoreni podskupovi $U, V \subset M$ takvi da je $p \in U$, $q \in V$;*
2. *M zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti tj. postoji prebrojiva baza za topologiju od M;*
3. *M je lokalno euklidski dimenzije n tj. za svaku točku od M postoji okolina koja je homeomorfna otvorenom podskupu od $\mathbf{R}^n$.*

Topološke mnogostrukosti

Uočimo:

- Posljednji uvjet zapravo znači da za svaku točku $p \in M$ postoji otvoren skup $U \subset M$ koji sadrži p, otvoren skup $\tilde{U} \subset \mathbf{R}^n$ i homeomorfizam $\varphi : U \to \tilde{U}$.

Topološke mnogostrukosti

Uočimo:

- Posljednji uvjet zapravo znači da za svaku točku $p \in M$ postoji otvoren skup $U \subset M$ koji sadrži p, otvoren skup $\tilde{U} \subset \mathbf{R}^n$ i homeomorfizam $\varphi : U \to \tilde{U}$.
- Zahtjev da postoji U homeomorfan s otvorenim podskupom od $\mathbf{R}^n$ ekvivalentan je zahtjevu da postoji U homeomorfan s otvorenom kuglom u $\mathbf{R}^n$ ili sa samim $\mathbf{R}^n$.

Topološke mnogostrukosti

- Osnovni primjer topološke mnogostrukosti je $\mathbf{R}^n$. $\mathbf{R}^n$ je Hausdorffov jer je metrički. Ima prebrojivu bazu topologije (skup otvorenih kugli s racionalnim središtima i racionalnim radijusima).

Topološke mnogostrukosti

- Osnovni primjer topološke mnogostrukosti je $\mathbf{R}^n$. $\mathbf{R}^n$ je Hausdorffov jer je metrički. Ima prebrojivu bazu topologije (skup otvorenih kugli s racionalnim središtima i racionalnim radijusima).
- U Hausdorffovim prostorima točka je zatvoren skup, a limesi konvergentnih nizova su jedinstveni.

Topološke mnogostrukosti

- Osnovni primjer topološke mnogostrukosti je $\mathbf{R}^n$. $\mathbf{R}^n$ je Hausdorffov jer je metrički. Ima prebrojivu bazu topologije (skup otvorenih kugli s racionalnim središtima i racionalnim radijusima).
- U Hausdorffovim prostorima točka je zatvoren skup, a limesi konvergentnih nizova su jedinstveni.
- Svojstva biti Haussdorffov i zadovoljavati drugi aksiom prebrojivosti obično se lako provjeravaju jer mnogostrukosti često nastaju od poznatih mnogostrukosti (primjerice, kao podskupovi ili produkti).

Topološke mnogostrukosti

Definicija

Koordinatna karta na topološkoj mnogostrukosti M *je par* (U, φ) *gdje je* U *otvoren podskup od* M*, a* $\varphi : U \to \tilde{U}$ *je homeomorfizam s* U *na otvoren podskup* $\tilde{U} = \varphi(U) \subset \mathbf{R}^n$*.*

Topološke mnogostrukosti

Definicija

Koordinatna karta na topološkoj mnogostrukosti M je par (U, φ) gdje je U otvoren podskup od M, a $\varphi : U \to \tilde{U}$ je homeomorfizam s U na otvoren podskup $\tilde{U} = \varphi(U) \subset \mathbf{R}^n$.

Skup U nazivamo koordinatnom okolinom ili domenom, a preslikavanje φ (lokalnim) koordinatnim preslikavanjem. (Uočimo da je inverz preslikavanja φ parametrizacija skupa U.)

Topološke mnogostrukosti

Definicija

Koordinatna karta na topološkoj mnogostrukosti M je par (U, φ) gdje je U otvoren podskup od M, a $\varphi : U \to \tilde{U}$ je homeomorfizam s U na otvoren podskup $\tilde{U} = \varphi(U) \subset \mathbf{R}^n$.

Skup U nazivamo koordinatnom okolinom ili domenom, a preslikavanje φ (lokalnim) koordinatnim preslikavanjem. (Uočimo da je inverz preslikavanja φ parametrizacija skupa U.)

Koordinatne funkcije $(x^1, \dots, x^n)$ od φ definirane sa

$$\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p)) \in \mathbf{R}^n$$

nazivaju se lokalnim koordinatama na U.

Topološke mnogostrukosti

Po definiciji topološke mnogostrukosti, svaka točka $p \in M$ je sadržana u domeni neke karte (U, φ).

Topološke mnogostrukosti

Po definiciji topološke mnogostrukosti, svaka točka $p \in M$ je sadržana u domeni neke karte (U, φ).

Govorit ćemo o (U, φ) kao o *karti koja sadrži* p umjesto kao o *karti čija domena sadrži* p.

Topološke mnogostrukosti

Po definiciji topološke mnogostrukosti, svaka točka $p \in M$ je sadržana u domeni neke karte (U, φ).

Govorit ćemo o (U, φ) kao o *karti koja sadrži* p umjesto kao o *karti čija domena sadrži* p.

Ponekad ćemo naglašavati koordinatne funkcije $(x^1, \dots, x^n)$ umjesto preslikavanja φ i govoriti o *koordinatnoj karti* $(U, (x^1, \dots, x^n))$ ili *lokalnim koordinatama* na M.

Primjer 1. Sfera

Jedinična sfera S^n je skup

$$S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : |x| = 1\}.$$

Primjer 1. Sfera

Jedinična sfera S^n je skup

$$S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : |x| = 1\}.$$

S^n je topološki prostor u relativnoj topologiji (topologija naslijedjena od $\mathbf{R}^{n+1}$).

Primjer 1. Sfera

Jedinična sfera S^n je skup

$$S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : |x| = 1\}.$$

S^n je topološki prostor u relativnoj topologiji (topologija naslijedjena od $\mathbf{R}^{n+1}$).

Nadalje, S^n je Hausdorffov prostor koji zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti jer je topološki potprostor od $\mathbf{R}^{n+1}$.

Primjer 1. Sfera

Jedinična sfera S^n je skup

$$S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : |x| = 1\}.$$

S^n je topološki prostor u relativnoj topologiji (topologija naslijedjena od $\mathbf{R}^{n+1}$).

Nadalje, S^n je Hausdorffov prostor koji zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti jer je topološki potprostor od $\mathbf{R}^{n+1}$.

Pokažimo da je S^n lokalno euklidski prostor.

Primjer 1. Sfera

U tu svrhu, pokrit ćemo S^n s $2n+2$ koordinatnih karata definiranih na sljedeći način:

Primjer 1. Sfera

U tu svrhu, pokrit ćemo S^n s $2n + 2$ koordinatnih karata definiranih na sljedeći način:

$$U_i^+ = \{x = (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in S^n : x^i > 0\},$$
$$U_i^- = \{x = (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in S^n : x^i < 0\},$$

Primjer 1. Sfera

U tu svrhu, pokrit ćemo S^n s $2n+2$ koordinatnih karata definiranih na sljedeći način:

$$U_i^+ = \{x = (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in S^n : x^i > 0\},$$
$$U_i^- = \{x = (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in S^n : x^i < 0\},$$

$$\varphi_i^+ : U_i^+ \to B^n := \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1\},$$

Primjer 1. Sfera

U tu svrhu, pokrit ćemo S^n s $2n+2$ koordinatnih karata definiranih na sljedeći način:

$$U_i^+ = \{x = (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in S^n : x^i > 0\},$$
$$U_i^- = \{x = (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in S^n : x^i < 0\},$$

$$\varphi_i^+ : U_i^+ \to B^n := \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1\},$$

$$\varphi_i^+(x^1, \ldots, x^{n+1}) = (x^1, \ldots, \widehat{x^i}, \ldots, x^{n+1}),$$

pri čemu je član označen sa $\widehat{\ }$ ispušten.

Primjer 1. Sfera

Analogno su definirana koordinatna preslikavanja $\varphi_i^- : U_i^- \to B^n$.

Primjer 1. Sfera

Analogno su definirana koordinatna preslikavanja $\varphi_i^- : U_i^- \to B^n$.

Inverz $(\varphi_i^\pm)^{-1} : B^n \to U_i^\pm$

$$(\varphi_i^\pm)^{-1}(u^1, \dots, u^n) = (u^1, \dots, u^{i-1}, \pm\sqrt{1 - |u|^2}, u^i, \dots, u^n)$$

je neprekidan na B^n.